This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06639324 4

PAP
Archi

Archiv

der

thematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

f die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

ASTOR LIBRARY
NEW-YORK.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

8

Achter Theil.

Mit sechs lithographirten Tafeln.

Greifswald.
Verlag von C. A. Koch.

1846.

NEW YORK PUBLIC LIBRARY

Inhaltsverzeichniss des achten Theils.

Arithmetik.

der dlung.		Heft.	Seite.
II.	Abgekürztes Verfahren bei der Kubikwurzelausziehung. Von dem Herrn Schulrath J. H. T. Müller, Director des Realgymnasiums zu Wiesbaden	I.	46
V.	Auflösung der quadratischen Gleichungen mit imaginären Coefficienten. Von dem Herausgeber	I.	65
VI.	Verwandlung der irrationalen Grösse $\sqrt[3]{A}$ in einen Kettenbruch. Von Herrn P. Seeling, Elementarlehrer zu Hückeswagen im Regierungsbezirk Düsseldorf	I.	69
X.	Auszug aus einem Schreiben des Herrn Schulrath J. H. T. Müller, Director des Realgymnasiums zu Wiesbaden, an den Herausgeber. (Ueber Kramp's Behandlungsweise der Auflösung der cubischen Gleichungen.)	I.	107
XI.	Ueber die Theorie der Proportionen. Von dem Herrn Dr. Lehmann zu Berlin	II.	113
XII.	Ueber die Bestimmung einer Gränze, welche die Anzahl der bei der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers zweier Zahlen zu machenden Divisionen nicht übersteigen kann. Von dem Herausgeber	II.	137
XIV.	Beweis des Taylor'schen Lehrsatzes. Nach der Abhandlung: Note sur la formule de Taylor par M. J. Caqué in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par Joseph		

Nr. der Abhandlung.		Hett.	Seite.
	Liouville. Octobre 1845. p. 379. frei bearbeitet von dem Herausgeber	II.	166
XXV.	Das Binomialtheorem, die Exponentialreihe, die logarithmische Reihe, die Reihen für den Sinus und Cosinus und die Reihe für den durch seine Tangente bestimmten Arcus, zusammenhängend im Geiste der neueren Analysis dargestellt. Von dem Herausgeber	III.	272
XXXIII.	Ueber die höheren Differenzialquotienten des Ausdrucks $(x^2+ax+b)^{-(\mu+1)}$. Von dem Herrn Professor Dr. O. Schlömilch an der Universität zu Jena	IV.	357
XXXVI.	Bemerkungen zu den im Archiv Thl. VIII. Heft 2. p. 213—214 von Herrn Dr. Dienger aufgestellten Theoremen I—V. Von dem Herrn Doctor F. Arndt, Lehrer am Gymnasium zu Stralsund	IV.	383
XXXVII.	Weitere Erörterungen analytischer Gegenstände. Versuch einer genetischen Entwickelung der analytischen Reihe. Von dem Herrn Dr. Barfuss zu Weimar	IV.	387
XL.	Note sur la convergence des séries. Par Monsieur C. J. Malmsten, Profess. des Math. à Upsal	IV.	419
XLI.	Ueber die höheren Differenzialquotienten beliebiger Funktionen des Logarithmus. Von dem Herrn Prof. Dr. O. Schlömilch an der Universität zu Jena	IV.	427
XLIII.	Zur Abhandlung Nr. XLVII. in Thl. VII. S. 430. des Archivs. Von dem Herrn Dr. Dienger, Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg	IV.	450

Geometrie.

I.	Darstellung der geometrischen Verwandtschaften mittelst projektivischer Gebilde. Von Hrn. Fr. Seydewitz, Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt	I.	1
III.	Verschiedene mathematische Bemerkungen. Von dem Herrn Professor Dr. Stegmann an der Universität zu Marburg	I.	49
	1. Ueber die mechanische Construction der Lemniscate		49

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	II. Ueber die sogenannte Neoide		53
	III. Ueber die Nabelpunkte auf dem Ellipsoid		55
IV.	Bestimmung der grössten in ein gegebenes Dreieck zu beschreibenden Ellipse. Von Herrn Wilh. Mösta, Stud. der Math. zu Marburg	I.	59
X.	Bemerkung zu der Aufgabe des Herrn A. Ritman. Von dem Herrn Dr. T. Wittstein zu Hannover	I.	110
XV.	Ueber einige Eigenschaften des Punktes der kleinsten Entfernung. Von Herrn Fr. Seydewitz, Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt	II.	174
XVI.	Ueber einen Satz der analytischen Geometrie. Von dem Herausgeber	II.	194
XIX.	Beweis des Ptolemäischen Lehrsatzes. Von dem Herrn Prof. Dr. Hessel zu Marburg	II.	215
XIX.	Aufgabe. Von Demselben . .	II.	217
XIX.	Ueber die acht Kreise, von denen die drei Kreise, welche sich über den drei Seiten eines Dreiecks als Durchmessern beschreiben lassen, berührt werden	II.	217
XIX.	Anzahl der Diagonalen eines Polyeders . . .	II.	221
XXI.	Ueber plagiographische Projection. Von dem Herrn Professor Dr. Anger in Danzig . .	III.	235
XXVII.	Ueber ein neues logisches Gesetz und seine Anwendung auf die Begründung der Parallelentheorie. Von dem Herrn Professor Dr. Wilh. Matzka zu Tarnow in Galizien	III.	320
XXIX.	Zu Archiv Thl. V. S. 430. Von dem Hrn. Director Nizze am Gymnasium zu Stralsund	III.	335
XXXI.	Analytische Behandlung einiger die Linien zweiten Grades betreffenden Gegenstände. Von dem Herrn Dr. F. Arndt, Lehrer am Gymnasium zu Stralsund	IV.	342
XXXIV.	Ueber geradlinige Raumgebilde, die einfacher sind als das Dreieck, und über deren Verwendung zur Fundamentallehre der Geometrie. Von dem Hrn. Prof. Dr. Wilh. Matzka zu Tarnow in Galizien	IV.	365
XXXV.	Ueber die Toroide. Nach einigen Aufsätzen der Herren Breton (De Champ), Torquem, Catalan in den Nouvelles Annales de Mathématiques, Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, rédigé par MM. Ter-		

Nr. der Abhandlung.		Heft.
	quem et Gerono. T. III. Paris. 1844. frei bearbeitet von dem Herausgeber	IV.
XXXVIII.	Ein neues Theorem von den Linien des zweiten Grades. „Die Quadratsumme der reciproken Werthe zweier auf einander senkrechten Durchmesser bei einem Kegelschnitt (Ellipse und Hyperbel) ist constant, nämlich bei der Ellipse der Quadratsumme, bei der Hyperbel der Quadratdifferenz der reciproken Werthe der Axen gleich.“ Von dem Herrn Dr. F. Arndt, Lehrer am Gymnasium zu Stralsund	IV.
XXXIX.	Ueber die natürliche Winkeleinheit in der analytischen Goniometrie und über die Ausmerzung des Kreisbogens aus den wissenschaftlich-geometrischen Erforschungen der Winkel. Von dem Herrn Professor Dr. Wilh. Matzka zu Tarnow in Galizien	IV.
XLIII.	Anschaulicher Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes. Von Herrn R. Hoppe, Lehrer der Mathematik zu Keilhau bei Rudolstadt . .	IV.
	Trigonometrie.	
X.	Berichtigung. Von dem Herrn Dr. Dippe, Oberlehrer am Gymnasium Fridericianum zu Schwerin	I.
	Geodäsie.	
XXII.	Ueber den Distanzmesser mit Parallelfäden. Von dem Herrn Professor Dr. G. W. v. Langsdorff an der höheren Bürgerschule zu Mannheim	III.
XXIII.	Ueber Distanzmesser. Von dem Herausgeber	III.
XXXII.	Ueber das Rückwärtseinschneiden mit dem Messtische oder das Problem der drei Punkte. Von dem Herausgeber	IV.
XLII.	Ueber eine geodätische Aufgabe. Von dem Herausgeber	IV.
	Mechanik.	
XIII.	Ueber die Bewegung eines schweren Punktes auf einer krummen Linie. Von dem Herrn	

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Dr. O. Schlömilch, Professor an der Universität zu Jena	II.	157
XVII.	Ueber die Schwingungen eines kleinen Körpers, der an einem elastischen Körper befestigt ist. Von dem Herrn Dr. Dienger, Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg .	II.	205
XX.	Ueber die beste Construction horizontal belasteter Gewölbe. Von dem Herrn Reallehrer Brenner zu Tuttlingen im Königreich Würtemberg	III.	225
XXIV.	Kriterium der Stabilität schwimmender Körper. Von Hrn. R. Hoppe, Lehrer der Mathematik in Keilhau bei Rudolstadt	III.	268
XXX.	Näherungswerth der Abweichung des Watt'schen Parallelogramms. Von dem Herrn Professor Dr. G. W. v. Langsdorff an der höheren Bürgerschule zu Mannheim	IV.	337
	Astronomie.		
VII.	Ueber gewisse bei einer besonderen Klasse astronomischer Aufgaben häufig in Anwendung kommende Gleichungen. Von dem Herausgeber	I.	88
VIII.	Ueber eine astronomische Aufgabe. Von dem Herausgeber	I.	99
	Physik.		
XXVI.	Beitrag zu der Lehre von den Farben. Von dem Herrn Dr. Botzenhart, Assistenten der Physik am k. k. polytechnischen Institut zu Wien	III.	318
	Geschichte der Mathematik und Physik.		
XIX.	Ueber Fermat	II.	223
	Uebungs-Aufgaben für Schüler.		
IX.	Vermischte Aufgaben	I.	105
XVIII.	Vermischte Aufgaben	II.	212

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XVII.	Aufgaben von dem Herrn Oberlehrer Seydewitz am Gymnasium zu Heiligenstadt .	II.	213
XVIII.	Aufgaben von dem Herrn Dr. J. Dienger, Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg	II.	213
XXVIII.	Aufgaben von dem Herrn Dr. A. Wiegand, Oberlehrer an der Realschule zu Halle . .	III.	334
	Berichtigungen	IV.	452

Literarische Berichte*).

XXIX.	. . . . .	I.	425
XXX.	. . . . .	II.	445
XXXI.	. . . . .	III.	457
XXXII.	. . . . .	IV.	469

*) Ich bemerke hierbei, dass die Literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

I.

Darstellung der geometrischen Verwandtschaften mittels projektivischer Gebilde.

Von

Herrn Fr. Seydewitz,

Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

(Fortsetzung der Abhandlung Theil VII. Nr. XIII.)

Die Verwandtschaften der Collineation und der Reciprocität.

§. 19.

Man denke sich wieder in der Ebene $\mathfrak{E}$ zwei Strahlbüschel B, B' oder zwei Gerade A, A', und in der Ebene $\mathfrak{E}_1$ zwei Strahlbüschel B_1, B'_1 oder zwei Gerade A_1, A'_1 gegeben; es seien der Reihe nach $a, b, c, d, e \ldots$ und $a', b', c', d', e' \ldots$; $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e} \ldots$ und $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}', \mathfrak{e}' \ldots$; $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 \ldots$ und $a'_1, b'_1, c'_1, d'_1, e'_1 \ldots$; $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{e}_1 \ldots$ und $\mathfrak{a}'_1, \mathfrak{b}'_1, \mathfrak{c}'_1, \mathfrak{d}'_1, \mathfrak{e}'_1 \ldots$ diejenigen Strahlen- und Punktenpaare dieser Gebilde, welche resp. durch die beliebigen Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e} \ldots$; die beliebigen Geraden $a, b, c, d, e \ldots$ der Ebene $\mathfrak{E}$, und durch die beliebigen Punkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{e}_1 \ldots$ und die beliebigen Geraden $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 \ldots$ der Ebene $\mathfrak{E}_1$ bestimmt werden oder diese selber erst bestimmen; und zwar seien e, e'; $\mathfrak{e}, \mathfrak{e}'$; e_1, e'_1; $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}'_1$ diejenigen zwei Elemente dieser vier Paar Gebilde, welche jedesmal mit dem gemeinschaftlichen Strahle oder Durchschnitte derselben zusammenfallen. Sind nun die Ebenen $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_1$ durch irgend zwei dieser vier Paar Gebilde dergestalt auf einander bezogen, dass entweder

$\alpha)$ $B\,(a, b, c, d, e\ldots) = B_1\,(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1\ldots)$ und
$B'\,(a', b', c', d', e'\ldots) = B'_1\,(a'_1, b'_1, c'_1, d'_1, e'_1\ldots)$; oder

$\beta)$ $A\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}\ldots) = A_1\,(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{e}_1\ldots)$ und
$A'\,(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}', \mathfrak{e}'\ldots) = A'_1\,(\mathfrak{a}'_1, \mathfrak{b}'_1, \mathfrak{c}'_1, \mathfrak{d}'_1, \mathfrak{e}'_1\ldots)$; oder aber

$\gamma)$ $B\,(a, b, c, d, e\ldots) = A_1\,(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1\ldots)$ und
$B'\,(a', b', c', d', e'\ldots) = A'_1\,(a'_1, b'_1, c'_1, d'_1, e'_1\ldots)$ ist,

indem das den Gebilden der einen Ebene gemeinschaftliche Element dem den Gebilden der anderen Ebene gemeinschaftlichen Elemente entspricht; so wird die neue Art geometrischer Verwandtschaft, in welche hierdurch die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ und die Systeme ihrer Elemente treten, im Falle $\alpha)$ und $\beta)$ mit dem Namen der Collineation, und im Falle $\gamma)$ mit dem der Reciprocität bezeichnet; und man sagt: diese Ebenen und Systeme sind collinear- oder reciprok-verwandt.

Aus dieser Definition und dem in Nro. XXX. des 4ten Theils des Archivs. Einl. 5. entwickelten Satze ergibt sich nun auf den ersten Anblick das bekannte Theorem:

1. Sind in einer Reihe von Ebenen, in bestimmter Ordnung genommen, je zwei unmittelbar aufeinander folgende collinear- oder reciprok-verwandt, so ist eine jede derselben mit einer jeden, und namentlich auch die erste mit der letzten collinear- oder reciprok-verwandt.

Noch mehr: denkt man sich in jener Reihe von Ebenen je zwei unmittelbar auf einander folgende geometrisch verwandt überhaupt, aber so, dass das Hauptdreieck einer jeden Ebene nicht nur dem Hauptdreiecke der ihr vorangehenden, sondern auch dem der ihr nachfolgenden Ebene zugeordnet ist — was im Allgemeinen nicht nothwendig ist, indem eine jede Ebene in Bezug auf die vorangehende und die nachfolgende zwei verschiedene Hauptdreiecke haben kann — und sind z. B. der Reihe nach P, P', P''; P_1, P'_1, P''_1; $B_{II}, B'_{II}, B''_{II}$; $P_{III}, P'_{III}, P''_{III}$; $B_{IV}, B'_{IV}, B''_{IV}$...; die zugeordneten Hauptlinien und Hauptpunkte der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_{II}$, $\mathfrak{E}_{III}$, $\mathfrak{E}_{IV}$...; so werden sich einerseits in den betreffenden Gebilden B, B_1, A_{II}, B_{III}, A_{IV}... die Elemente P'', P'_1, B''_{II}, P'_{III}, B''_{IV}..., andererseits in den Gebilden B', B'_1, A'_{II}, B'_{III}, A'_{IV}... die Elemente P'', P_1, B''_{II}, P_{III}, B''_{IV}... entsprechen; folglich müssen auch in den alternirenden Gebilden B, A_{II}, A_{IV}... die Elemente P'', B''_{II}, B''_{IV}..., und in den alternirenden Gebilden B', A'_{II}, A'_{IV}... die Elemente P'', B''_{II}, B_{IV}''..., d. h. die den Gebilden der 1ten, 3ten, 5ten... Ebene gemeinschaftlichen Elemente in beider Hinsicht sich entsprechen; und dasselbe gilt von denen der 2ten, 4ten, 6ten....

2. Sind in einer Reihe von Ebenen, in bestimmter Ordnung genommen, je zwei unmittelbar auf einander folgende geometrisch verwandt überhaupt, jedoch so,

dass jede dieser Ebenen in Bezug auf die ihr folgende das nämliche Hauptdreieck als in Bezug auf die ihr vorangehende besitzt, so sind je zwei alternirende Ebenen dieser Reihe oder überhaupt je zwei, welche beide zwei Stellen von ungerader oder von gerader Zahl einnehmen, collinear- oder reciprok-verwandt.

§. 20.

Sind die Gebilde B, B' oder A, A' der Ebene $\mathfrak{E}$ projektivisch, so sind auch die Gebilde B_1, B'_1 oder A_1, A'_1 der Ebene $\mathfrak{E}_1$ projektivisch, und wenn nun in dem gemeinschaftlichen Elemente der beiden ersteren zwei entsprechende e, e' oder $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}'$ sich vereinigen, so werden den letzteren auch in den beiden anderen Gebilden zwei Elemente e_1, e'_1 oder $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}'_1$, die sich vereinigen, entsprechen müssen. Nun aber bestimmen die Punkte einer jeden Geraden der einen Ebene zwei perspectivische Strahlbüschel B, B', und die Strahlen eines jeden Punktes zwei perspektivische Gerade A, A', und umgekehrt; also folgt:

1.

α. In je zwei collinearen Ebenen entspricht nicht nur einem jeden Punkte der einen ein Punkt der anderen, sondern auch einer jeden Geraden der einen Ebene eine Gerade der anderen.

β. In je zwei collinearen Ebenen entspricht nicht nur einer jeden Geraden der einen eine Gerade der anderen, sondern auch einem jeden Punkte der einen Ebene ein Punkt der anderen.

γ. In je zwei reciproken Ebenen entspricht nicht nur einem jeden Punkte der einen Ebene eine Gerade der anderen, sondern auch einer jeden Geraden der ersteren ein Punkt der zweiten.

2.

α. Einer jeden Geraden und deren Punkten entspricht wieder eine Gerade und deren Punkte; und einem jeden Punkte und dessen Strahlen entspricht wieder ein Punkt und dessen Strahlen.

β. Einem jeden Punkte und dessen Strahlen entspricht wieder ein Punkt und dessen Strahlen; und einer jeden Geraden und deren Punkten entspricht wieder eine Gerade und deren Punkte.

γ. Einer jeden Geraden und deren Punkten entspricht ein Punkt und dessen Strahlen; und einem jeden Punkt und dessen Strahlen entspricht eine Gerade und deren Punkte.

3.

α und β.

In jeder der beiden Ebenen gibt es eine Gerade, welche der unendlich entfernten Geraden der anderen Ebene entspricht.

γ. In jeder der beiden Ebenen gibt es einen Punkt, welcher der unendlich entfernten Geraden der anderen Ebene entspricht.

Eine jede der beiden so eben unter α und β. genannten Geraden soll die Achse der betreffenden Ebene, und ein jeder der beiden unter γ. genannten Punkte soll der Mittelpunkt der Ebene heissen.

4.

α und β.

Die unendlich entfernten Punkte der Achsen beider Ebenen sind entsprechende Punkte.

5.

α und β.

Allen Geraden, welche mit der Achse der einen Ebene parallel sind, entsprechen solche, welche ihrerseits mit der Achse der anderen parallel laufen.

§. 21.

Da in α. je zwei entsprechende Gerade in Ansehung der Punkte, in denen sie von den projektivischen Strahlbüscheln B, B_1 (oder B', B'_1) geschnitten werden, ebenfalls projektivisch sein müssen, und da die Punkte, in denen zwei Paar entsprechende Geraden sich schneiden, entsprechende Punkte sind; so werden auch irgend zwei entsprechende Strahlbüschel — indem man sie sich von irgend zwei entsprechenden Geraden durchschnitten denkt — in Ansehung ihrer entsprechenden Strahlenpaare projektivisch sein müssen; und ähnlich verhält es sich in β. und γ.

1.

α. In zwei collinearen Ebenen sind je zwei entsprechende Gerade in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare, und je zwei entsprechende Strahlbüschel in Ansehung ihrer entsprechenden Strahlenpaare projektivisch;

β. In zwei collinearen Ebenen sind je zwei entsprechende Strahlbüschel in Ansehung ihrer entsprechenden Strahlenpaare, und je zwei entsprechende Gerade in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch;

oder:

das Doppelverhältniss $\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}$, welches durch irgend vier Punkte a, b, c, d einer Geraden bestimmt wird, ist gleich dem Doppelverhältnisse $\frac{a_1c_1}{b_1c_1} : \frac{a_1b_1}{b_1b_1}$, welches durch die entsprechenden Punkte a_1, b_1, c_1, b_1 bestimmt wird; und das Doppelverhältniss $\frac{\sin.ac}{\sin.bc} : \frac{\sin.ad}{\sin.bd}$, welches irgend vier Strahlen a, b, c, d eines Punktes bestimmen, ist gleich dem Doppelverhältnisse $\frac{\sin.a_1c_1}{\sin.b_1c_1} : \frac{\sin.a_1d_1}{\sin.b_1d_1}$, welches die entsprechenden Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1 bestimmen.

γ. Jede Gerade der einen von zwei reciprok-verwandten Ebenen ist mit dem entsprechenden Strahlbüschel der anderen, und jedes Strahlbüschel der ersten ist mit der entsprechenden Geraden der zweiten Ebene — in Ansehung ihrer entsprechenden Elementenpaare projectivisch;

oder:

das Doppelverhältniss $\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}$, welches in irgend einer von beiden Ebenen durch vier beliebge Punkte a, b, c, d einer Geraden bestimmt wird, ist gleich dem Doppelverhältnsse $\frac{\sin.a_1c_1}{\sin.b_1c_1} : \frac{\sin.a_1d_1}{\sin.b_1d_1}$, welches durch die entsprechenden Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1 der anderen Ebene bestimmt wird.

Aus diesem Satze und aus der Definition der Collineation und Reciprocität ergibt sich nun sofort:

2.

α. Ist die Verwandtschaft der Collineation zweier Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ durch zwei Paar projektivische Strahlbüschel B, B_1 und B', B'_1 bestimmt, so bleibt die Beziehung der Ebenen und ihrer sämmtlichen Elemente zu einander unverändert, wenn man jene zwei Paar Strahlbüschel 1) entweder mit zwei beliebigen anderen Paar entsprechenden Strahlbüscheln, oder 2) mit irgend zwei Paar entsprechenden Geraden

β. Ist die Verwandtschaft der Collineation zweier Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ durch zwei Paar projektivische Gerade A, A_1 und A', A'_1 bestimmt, so bleibt die Beziehung der Ebenen und ihrer sämmtlichen Elemente zu einander unverändert, wenn man je zwei Paar Geraden 1) entweder mit zwei beliebigen anderen Paar entsprechenden Geraden, oder 2) mit irgend zwei Paar entsprechenden Strahlbüscheln beider Ebe-

beider Ebenen vertauscht, und die entsprechenden Strahlen- oder Punktenpaare derselben als projektivisch entsprechende betrachtet; und daher 3) sind je zwei im Sinne von α. collinear-verwandte Ebenen zugleich auch im Sinne von β. collinear-verwandt.

nen vertauscht, und die entsprechenden Punkten- oder Strahlenpaare derselben als projektivisch entsprechende betrachtet; und daher 3) sind je zwei im Sinne von β. collinear-verwandte Ebenen zugleich auch im Sinne von α. collinear-verwandt.

γ. Ist die Verwandtschaft der Reciprocität zweier Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ durch zwei Strahlbüschel B, B' der ersten und zwei mit denselben projektivische Gerade A_1, A'_1 der zweiten Ebene bestimmt, so bleibt die Beziehung der Ebenen und ihrer sämmtlichen Elemente zu einander unverändert, wenn man 1) jene zwei Strahlbüschel mit irgend zwei anderen Strahlbüscheln der Ebene $\mathfrak{E}$ und diese zwei Geraden mit den entsprechenden Geraden der Ebene $\mathfrak{E}_1$, oder 2) jene zwei Strahlbüschel mit irgend zwei Geraden der Ebene $\mathfrak{E}$ und diese zwei Gerade mit den entsprechenden Strahlbüscheln der Ebene $\mathfrak{E}_1$ vertauscht, und die entsprechenden Elementenpaare der neuen Gebilde als projektivisch entsprechende betrachtet; und daher 3) spielen beide Ebenen in dieser Beziehung zu einander durchaus eine und dieselbe Rolle.

Da nun zwei projektivische Gebilde vollkommen bestimmt sind, sobald irgend drei Paar entsprechende Elemente derselben gegeben sind, so folgt aus dem letzten Satze:

3.

Die Verwandtschaft der Collineation zweier Ebenen ist vollkommen bestimmt, sobald entweder irgend vier Paar entsprechende Punkte oder irgend vier Paar entsprechende Gerade derselben gegeben sind.

Die Verwandtschaft der Reciprocität zweier Ebenen ist vollkommen bestimmt, sobald in einer von beiden Ebenen irgend vier Punkte und in der anderen die denselben entsprechenden Geraden gegeben sind.

Und zwar kann man in zwei Ebenen vier Elementenpaare beliebig annehmen und dann festsetzen, die Ebenen sollen collinear- oder reciprok-verwandt, und jene vier Elementenpaare sollen entsprechende sein.

Ist in der Ebene $\mathfrak{E}$ irgend eine Involution von Punkten oder Strahlen gegeben, z. B. ist

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots \mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}' \ldots) = A'(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}' \ldots \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots),$$

so folgt aus 1. z. B. für collineare Ebenen:

$$A_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots) = A(a, b, c, d \ldots a', b', c', d \ldots)$$
$$= A'(a', b', c', d \ldots a, b, c, d \ldots) = A'_1(a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots),$$

also

$$A_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots) = A'_1(a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots);$$

u. s. w.

4.

In zwei collinear-verwandten Ebenen entspricht einer jeden Involution von Punkten oder Strahlen der einen Ebene wieder eine Involution von Punkten oder Strahlen der anderen; den Hauptpunkten oder Hauptstrahlen der ersteren entsprechen die Hauptpunkte oder Hauptstrahlen der letzteren, und daher entsprechen je vier harmonischen Punkten oder Strahlen der einen Ebene wiederum vier harmonische Punkte oder Strahlen der anderen.

In zwei reciprok-vewandten Ebenen entspricht einer jeden Involution von Punkten oder Strahlen der einen Ebene resp. eine Involution von Strahlen oder Punkten der anderen; den Hauptpunkten oder Hauptstrahlen der ersteren entsprechen die Hauptstrahlen oder Hauptpunkte der letzteren; und daher entsprechen je vier harmonischen Punkten oder Strahlen der einen Ebene vier harmonische Strahlen oder Punkte der anderen.

Da zwei projektivische Gerade ähnlich sind, wenn deren unendlich entfernte Punkte sich entsprechen, so folgt aus 4. des vorigen Paragraphen und aus 1. des jetzigen:

5.

In zwei collinear-verwandten Ebenen sind je zwei entsprechende Gerade, welche mit den Achsen parallel laufen, in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch-ähnlich.

§. 22.

Man denke sich in einer von zwei collinear-verwandten Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$, z. B. in $\mathfrak{E}$, alle diejenigen Geraden a, b, c, d..., welche auf der Achse derselben senkrecht stehen; so entsprechen denselben, als Parallelen, lauter solche Linien in $\mathfrak{E}_1$, welche sich in einem und demselben Punkte der Achse von $\mathfrak{E}_1$ schneiden, und umgekehrt: jedem Strahle dieses Punktes entspricht eine von

jenen Senkrechten. Denkt man sich also denjenigen Strahl dieses Punktes, welcher auf der Achse von $\mathfrak{E}_1$ senkrecht ist, so folgt:

1. In zwei collinearen Ebenen gibt es allemal zwei, aber auch nur zwei, entsprechende Gerade, deren jede auf der betreffenden Achse senkrecht steht.

Jetzt denke man sich in $\mathfrak{E}$ irgend zwei Gerade, welche einen spitzen Winkel φ einschliessen, und zugleich die beiden Schaaren sämmtlicher Geraden, welche mit jenen zweien parallel laufen; so entsprechen diesen zwei Schaaren in $\mathfrak{E}_1$ zwei Strahlbüschel, deren Mittelpunkte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ auf der Achse liegen; und denkt man sich über der Strecke $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$, als Sehne, einen Kreis construirt, welcher des Winkels φ fähig ist, so müssen je zwei Strahlen dieser Strahlbüschel, welche sich auf der Peripherie dieses Kreises schneiden, zwei zu jenen beiden Parallelen-Schaaren gehörige Gerade entsprechen. Offenbar aber gibt es zwei solche Kreise, welche symmetrisch auf beiden Seiten der Achse liegen; und nur, wenn φ kein spitzer, sondern ein rechter Winkel ist, fallen beide in einen einzigen zusammen.

2. Sind in einer von zwei collinearen Ebenen irgend zwei Richtungen gegeben, so gibt es in derselben unzählige Paare von Geraden, welche jene Richtungen haben, und deren entsprechende in der anderen Ebene denselben Winkel, als jene, einschliesen; und zwar liegen die Durchschnitte dieser entsprechenden Geraden auf zwei congruenten Kreisen, welche einander in zwei Punkten der Achse schneiden.

Es seien endlich A, B, C drei beliebige Gerade der Ebene $\mathfrak{E}$, von denen A und B den spitzen Winkel φ; B und C den spitzen Winkel ψ; A und C den Winkel $(\varphi+\psi)$ einschliessen; den drei Schaaren Gerader, welche mit A, B, C parallel sind, entsprechen in $\mathfrak{E}_1$ drei Strahlbüschel, deren Mittelpunkte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{s}$ auf der Achse von $\mathfrak{E}_1$ liegen; und beschreibt man auf beiden Seiten der Achse über der Strecke $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$ einen des Winkels φ, und über der Strecke $\mathfrak{n}\mathfrak{s}$ einen des Winkels ψ fähigen Kreis, und verbindet irgend einen Durchschnitt dieser Kreise, welcher ausser der Achse liegt, mit den Punkten $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{s}$ durch die Geraden a_1, b_1, c_1, so müssen den letzteren in $\mathfrak{E}$ drei solche Gerade a, b, c entsprechen, welche beziehlich mit A, B, C parallel sind und also paarweise die Winkel φ, ψ, $(\varphi+\psi)$ einschliessen. Liegt nun, wie in Taf. I. Fig. 1., der Punkt $\mathfrak{n}$ zwischen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{s}$, so hat nur der Durchschnitt solcher zwei Kreise, deren Mittelpunkte auf einerlei Seite der Achse liegen, die Eigenschaft, dass die von ihm ausgehenden Linien a_1, b_1, c_1 die drei Winkel φ, ψ, $(\varphi+\psi)$ einschliessen; liegt aber der Punkt $\mathfrak{n}$ ausserhalb $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{s}$, wie in Taf. I. Fig. 2., so kommt dieselbe Eigenschaft nur dem Durchschnitte solcher zwei Kreise zu, deren Mittelpunkte auf verschiedenen Seiten der Achse liegen. In jedem anderen Falle nämlich erhält man die drei Winkel φ, ψ, $(\varphi-\psi)$. Es gibt also in $\mathfrak{E}_1$ allemal zwei Punkte s_1, σ_1, von welchen aus man drei Gerade a_1, b_1, c_1 ziehen kann, welche mit einander dieselben drei Winkel φ, ψ, $(\varphi+\psi)$, als die denselben entsprechenden Geraden a, b, c einschliessen, und zwar sind diese Punkte gleichweit von

der Achse entfernt, und ihre Verbindungslinie steht auf der Achse senkrecht, was unmittelbar aus der symmetrischen Lage der Kreise erhellt.

Da nach Steiner's „Abhängigkeit geom. Gebilde u. s. w. Thl. I. S. 47." zwei projektivische Strahlbüschel allemal projektivisch gleich sind, sobald irgend drei Paar entsprechende Winkel derselben, welche durch drei entsprechende Strahlenpaare bestimmt werden, gleich sind; so folgt aus der vorigen Betrachtung und aus §. 21. 1., dass je zwei Strahlen eines Punktes s_1, σ_1 den nämlichen (spitzen) Winkel, als die entsprechenden Strahlen des entsprechenden Punktes s, σ einschliessen.

Gesetzt nun, es gäbe noch zwei entsprechende projektivisch gleiche Strahlbüschel B, B_1, so könnte man in B die den drei Geraden A, B, C parallelen Strahlen ziehen und schliessen, dass die denselben entsprehenden Strahlen von B_1 durch die Punkte m, n, ś gehen, und dass der Punkt B_1 entweder mit s_1 oder mit σ_1 zusammenfallen müsse. Es gibt also nur zwei Paar solche Strahlbüschel.

Die Geraden A, B, C konnten eben so gut in der Ebene $\mathfrak{E}_1$, als in $\mathfrak{E}$, angenommen werden, und man würde in $\mathfrak{E}$, sowie vorhin die Punkte s_1, σ_1, zwei Punkte gefunden haben, welche dem so eben Gesagten gemäss durchaus einerlei mit s, σ sein müssen. Hieraus folgt, dass auch die Punkte s, σ gleichweit von der Achse der $\mathfrak{E}$ entfernt liegen, und ihre Verbindungslinie auf der letzteren senkrecht steht. Die Geraden $s\sigma$, $s_1\sigma_1$ sind also jene zwei entsprechenden Geraden, welche beide auf der betreffenden Achse senkrecht stehen.

Es seien jetzt q, $\mathfrak{p}_1$ die Punkte, in welchen die Achsen Q, P_1 der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ von den Senkrechten $s\sigma$, $s_1\sigma_1$ geschnitten werden (Taf. I. Fig. 3.); so entspricht q dem unendlich entfernten Punkte von $s_1\sigma_1$, und $\mathfrak{p}_1$ dem unendlich entfernten von $s\sigma$; sie sind also die sogenannten Durchschnitte der Parallelstrahlen dieser, in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivischen Geraden. Man bestimme nun auf diesen letzteren zwei Punktenpaare ś, t und $ś_1$, t_1 dergestalt, dass die Strecken $\mathfrak{q}ś = \mathfrak{q}t = \mathfrak{p}_1s_1 = \mathfrak{p}_1\sigma_1$ und $\mathfrak{p}_1ś_1 = \mathfrak{p}_1t_1 = \mathfrak{q}s = \mathfrak{q}\sigma$ seien; so müssen sowohl die Punkte ś, $ś_1$ als auch t, t_1 entsprechende Punkte der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ sein; denn nach S. 250. des IV. Thls. des Archivs ist Rechteck $\mathfrak{q}s \cdot \mathfrak{p}_1s_1 = \mathfrak{q}ś \cdot \mathfrak{p}_1ś_{II}$, wenn $ś_{II}$ der dem ś entsprechende Punkt ist; also ist, da $\mathfrak{q}ś = \mathfrak{p}_1s_1$, auch $\mathfrak{p}_1ś_{II} = \mathfrak{q}s = \mathfrak{p}_1ś_1 = \mathfrak{p}_1t_1$, und da die Aufeinanderfolge der Punkte t, ś, σ, s mit der ihrer entsprechenden übereinstimmen muss, so fällt $ś_{II}$ mit $ś_1$ zusammen u. s. w.

Hiernach sind auch die Strecken $sś = s_1ś_1 = \sigma t = \sigma_1t_1$, und $st = s_1t_1 = \sigma ś = \sigma_1s_1$. Man denke sich durch die Punkte ś, $ś_1$ (oder t, t_1) in den betreffenden Ebenen zwei Parallelen S, S_1 mit den Achsen Q, P_1, und durch die Punkte s, s_1 die entsprechenden Strahlenpaare $a, b, c, d\ldots$; $a_1, b_1, c_1, d_1\ldots$ gezogen, welche die S, S_1 in den Punkten a, b, c, d...; a_1, b_1, c_1, d_1... schneiden — so sind, zufolge §. 20. 5., und weil ś, $ś_1$ entsprechende Punkte sind, die S, S_1 entsprechende Gerade, und demnach ś, a, b, c, d... und $ś_1$, a_1, b_1, c_1, d_1... lauter entsprechende Punktenpaare. Aber die Strahlen $a, b, c, d\ldots$ bilden mit der

Senkrechten $s\sigma$ die nämlichen Winkel, als die entsprechenden $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots$ mit $s_1\sigma_1$; und es ist $s\sigma = s_1\sigma_1$; also ist auch $\mathfrak{s}\mathfrak{a} = \mathfrak{s}_1\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{s}\mathfrak{b} = \mathfrak{s}_1\mathfrak{b}_1$ u. s. w., d. h. die Geraden S, S_1 sind in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch-gleich.

Legt man durch t, t mit Q, P_1 zwei Parallelen T, T_1, so gilt von ihnen das nämliche, als von S, S_1.

Es gehe durch den Punkt p_1 irgend eine Gerade, welche S_1 in $\mathfrak{a}_1$ und T_1 in α_1 schneide; so ist die derselben entsprechende Gerade mit der Senkrechten $s\sigma$ parallel und schneidet folglich die S und T in entsprechenden Punkten $\mathfrak{a}$ und α, die auf einerlei Seite der Senkrechten liegen, was mit $\mathfrak{a}_1$ und α_1 nicht der Fall ist. Denkt man sich also die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ so gelegt, dass die Punktenpaare $\mathfrak{s}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$ und $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots$ von S, S_1 nach einerlei Seite hin auf einander folgen, so müssen dagegen die entsprechenden Punktenpaare $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 \ldots$ von T, T_1 nach entgegengesetzten Richtungen laufen.

Denkt man sich ausser S_1 und T_1 noch irgend eine dritte Gerade R_1 parallel mit P_1, welche von $s_1\sigma_1$ in $\mathfrak{r}_1$, und von jener durch p_1 gelegten Geraden in $\mathfrak{a}'_1$ geschnitten wird, so kann das Segment $\mathfrak{r}_1\mathfrak{a}'_1$ dem Segment $\mathfrak{s}_1\mathfrak{a}_1$ nicht gleich sein, aber $\mathfrak{s}_1\mathfrak{a}_1$ ist gleich $\mathfrak{s}\mathfrak{a}$, und letzteres ist dem dem $\mathfrak{r}_1\mathfrak{a}'_1$ entsprechenden Segmente $\mathfrak{r}\mathfrak{a}'$ der entsprechenden, mit Q parallelen Geraden R gleich; also sind die Geraden R, R_1 nicht projektivisch gleich. Nun aber können nur solche Gerade, welche mit den Achsen parallel sind, projektivisch-gleich sein, weil sonst zwei Paar unendlich entfernte Punkte, und folglich die unendlich entfernten Geraden selber entsprechend sein müssten; also gibt es ausser S, S_1 und T, T_1 kein drittes Paar entsprechende projektivisch-gleiche Gerade.

Als Ergebniss der ganzen vorigen Betrachtung kann man nun folgenden Satz aufstellen, der sich in der Folge als besonders wichtig herausstellen wird:

3.

In zwei collinearen Ebenen gibt es *a*) allemal zwei Paar entsprechende Punkte, deren entsprechende Strahlenpaare projektivisch gleiche Strahlbüschel bilden, aber es gibt kein drittes solches Paar; *b*) und diese Punktenpaare liegen auf denjenigen zwei entsprechenden Geraden, welche beide auf den Achsen der Ebenen senkrecht stehen, und sind gleichweit von der betreffenden Achse entfernt. *c*) Es gibt allemal zwei Paar entsprechende Gerade, welche in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch gleich sind; aber es gibt kein drittes solches Paar; *d*) und zwar sind diese Geraden mit den Achsen parallel, und je zwei derselben Ebene sind gleichweit von der betreffenden Achse entfernt. *e*) In jeder Ebene ist die Entfernung der beiden Geraden von der Achse ebenso gross als in der anderen Ebene die Entfernung jener beiden Punkte von der Achse, und die Entfernung einer jeden solchen Geraden von einem jener Punkte ist eben so gross als die der entsprechenden Geraden von dem

entsprechenden Punkte. *f*) Denkt man sich die Ebenen und deren Achsen parallel mit einander, so ist allemal das eine Paar der projektivisch gleichen entsprechenden Geraden gleichliegend, das andere ungleichliegend, und das nämliche gilt von den projektivisch gleichen entsprechenden Strahlbüscheln.

§. 23.

Befindet sich in der Ebene $\mathfrak{E}$ irgend ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, und sind B, B' irgend zwei Punkte desselben, so bestimmen die übrigen Punkte von $\mathfrak{K}$ zwei projektivische Strahlbüschel B, B'; diesen aber entsprechen in der collinear-verwandten Ebene $\mathfrak{E}_1$ zwei Strahlbüschel B_1, B'_1, wovon jeder mit einem der ersteren projektivisch ist; also sind auch letztere unter sich projektivisch, d. h. dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ entspricht wieder ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$; und in der reciprok-verwandten Ebene $\mathfrak{E}_1$ entspricht jedem Strahlbüschel B, B' eine demselben projektivische Gerade A_1, A'_1; also sind letztere auch unter sich projektivisch; d. h. allen Punkten von $\mathfrak{K}$ entsprechen die Tangenten eines Kegelschnittes $\mathfrak{K}_1$. Ist nun e' der gemeinschaftliche Strahl von B, B'; e'_1 der von B_1, B'_1, und sind e, e_1 die Tangenten in B und B_1, so sind in den Strahlbüscheln B, B', B'_1, B_1 der Reihe nach e, e', e'_1, e_1 entsprechende Strahlen, also auch e, e_1 in B, B_1 u. s. w.

1.

In zwei collinear-verwandten Ebenen entspricht einem jeden Kegelschnitte wiederum ein Kegelschnitt, d. h. einem jeden Punkte des einen entspricht ein Punkt des andern, und der Tangente in jenem Punkte entspricht die Tangente im letzteren.

In zwei reciprok-verwandten Ebenen entspricht einem jeden Kegelschnitte wiederum ein Kegelschnitt, d. h. einem jeden Punkte des einen entspricht eine Tangente des anderen, und der Tangente im ersteren entspricht der Berührungspunkt der letzteren.

Ferner: ist $\mathfrak{C}$ irgend eine Curve der $n$ten Ordnung und der $m$ten Klasse in der Ebene $\mathfrak{E}$, d. h. wird $\mathfrak{C}$ von einer beliebigen Geraden A höchstens in n Punkten geschnitten, und gehen an $\mathfrak{C}$ von einem beliebigen Punkte B höchstens m Tangenten, so hat auch das der $\mathfrak{C}$ entsprechende System von Punkten $\mathfrak{C}_1$ mit der der A entsprechenden Geraden A_1 höchstens n Punkte, und das der $\mathfrak{C}$ entsprechende System von Geraden $\mathfrak{C}_1$ hat mit dem dem B entsprechenden Punkte B_1 höchstens m Gerade gemein u. s. w. u. s. w.

2.

In zwei collinear-verwandten Ebenen entspricht einer jeden Curve der einen Ebene wieder eine Curve

in der anderen, und zwar von derselben Ordnung und Klasse als die erstere ist; nämlich jedem Punkte der einen Curve entspricht ein Punkt der anderen, und der Tangente im ersteren entspricht die Tangente im letzteren.

In zwei reciprok-verwandten Ebenen entspricht einer jeden Curve der einen Ebene wieder eine Curve in der anderen, deren Klasse der Ordnung der ersteren, und deren Ordnung der Klasse der ersteren gleich ist; nämlich einem jeden Punkte der einen Curve entspricht eine Tangente der anderen, und der Tangente im ersteren entspricht der Berührungspunkt der letzteren.

In einer Ebene $\mathfrak{E}$ befinde sich ein beliebiger Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, und in irgend einer anderen Ebene $\mathfrak{E}_1$ ein beliebiger Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$; auf $\mathfrak{K}$ wähle man drei beliebige Punkte B, B', a und ebenso auf $\mathfrak{K}_1$ drei beliebige Punkte B_1, B'_1, a_1, und ziehe in B, B' die Tangenten s, s', welche sich in $\mathfrak{s}$ schneiden, in B_1, B'_1 die Tangenten s_1, s'_1, die sich in $\mathfrak{s}_1$ schneiden, und verbinde endlich B, B' mit a durch a, a', und B_1, B'_1 mit a_1 durch a_1, a'_1. Nach §. 21. 3. darf man nun festsetzen: die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ sollen collinear, und zwar die vier Punktenpaare B, B_1; B', B'_1; a, a_1; $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$ entsprechende Punkte derselben sein. Dann aber entspricht dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ ein Kegelschnitt, welcher durch die Punkte B_1, B'_1 und a_1 geht und in B_1, B'_1 zwei Gerade berührt, welche den Tangenten s, s' von $\mathfrak{K}$ entsprechen; nun aber sind s, s_1; s', s'_1 entsprechende Linien von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$; also hat dieser Kegelschnitt mit $\mathfrak{K}_1$ nicht nur die drei Punkte B_1, B'_1, a_1, sondern auch die beiden Tangenten in B_1, B'_1 gemein, d. h. er ist mit demselben identisch; u. s. w.

3.

Zwei beliebige Kegelschnitte sind auf unzählige Weisen mit einander collinear- oder auch reciprok-verwandt.

Unter anderen ist also auch ein jeder Kegelschnitt auf unzählige Weisen mit sich selber collinear- und reciprok-verwandt.

Besondere Fälle,
oder
die Verwandtschaften der Affinität, der Gleichheit, der Aehnlichkeit und der Congruenz.

§. 24.

Denkt man sich zwei collineare Ebenen im Sinne von β. bestimmt, so kann man a priori folgende besondere Fälle der Collineations-Verwandtschaft statuiren.

1. Ein Paar der Linien A, A_1; A', A'_1 sind projektivisch ähnlich.

2. Ein Paar derselben sind projektivisch-gleich.

3. Beide Paare sind projektivisch-ähnlich.

4. Beide Paare sind projektivisch-gleich.

5. In Nro. 3. ist das Verhältniss der entsprechenden Strecken von A, A_1 gleich dem Verhältnisse der entsprechenden Strecken von A', A'_1.

6. 7. 8. 9. 10. In jedem der vorigen Fälle schliessen zugleich die Geraden A, A' denselben Winkel ein, als die Geraden A_1, A'_1; und zwar legt man die Geraden A, A_1 so auf einander, dass sie gleichliegend sind, so sind die Geraden A', A'_1 entweder

a) gleichliegend, oder

b) ungleichliegend.

Bestimmt man dagegen jene Ebenen im Sinne von *a*., so sind nur folgende Fälle denkbar:

11. Ein Paar der Strahlbüschel B, B_1; B', B'_1 sind projektivisch-gleich.

12. Beide Paare sind projektivisch-gleich; und zwar, wenn das eine Paar B, B_1 gleichliegend sind, so sind die beiden anderen B_1, B'_1 entweder

a) gleichliegend, oder

b) ungleichliegend.

13. 14. In Nro. 11. und 12. sind zugleich auch die Strecken B, B' und B_1, B'_1 einander gleich.

Die meisten der hier aufgeführten Fälle sind es aber nur scheinbar; entweder nämlich enthalten sie Bestimmungen, welche in collinearen Ebenen überhaupt gewissen Elementenpaaren derselben eigen sind, oder sie fallen mit anderen der hier genannten Fälle zusammen. Hier aber kann nur von solchen die Rede sein, in welchen sämmtliche Elementenpaare eine der allgemeinen untergeordnete Bestimmung erleiden, sowie von solchen, welche sich auf dieselbe Weise zu diesen Fällen selbst wieder verhalten.

Da nach §. 21. 5. und §. 22. 3. es in zwei collinearen Ebenen allemal unzählige Paare projektivisch-ähnlicher entsprechender Geraden und zwei Paar projektivisch-gleiche gibt, welche mit den Achsen parallel laufen, und da in Taf. I. Fig. 3. je zwei entsprechende Strahlen der Punkte s, s_1 oder σ, σ_1 mit jenen ersteren gleiche Winkel bilden müssen, so erhellt sogleich, dass Nro. 1., 2., 6. und 7. keine besondere Art von Collineations-Verwandtschaft begründen; und dasselbe gilt von Nro. 11., 12. *b*. und 13. wegen der projektivisch-gleichen Strahlbüschel s, s_1 und σ, σ_1, deren gegenseitige Lage der in 12. *b*. geforderten entspricht. Der Fall 14. *b*. ist derjenige, wenn in Taf. I. Fig. 3. die Strecken $s\sigma$ und $s_1\sigma_1$ gleich gross werden, d. h. wenn die Punkte s, σ mit t, τ u. s. w. zusammenfallen. Diese Besonderheit aber ist — hier wenigstens — desswegen von keinem Interesse, weil dieselbe auf die übrigen

Elemente der Ebenen keinen wesentlichen Einfluss übt. Es bleiben also nur noch die Fälle 3., 4., 5., 8., 9., 10., 12. *a.* und 14. *a.* zu erwägen übrig. Der wichtigste derselben ist Nro. 3.; mit ihm fallen, wie sofort gezeigt werden soll, Nro. 4., 5., 8. und 10. *b.* zusammen, und Nro. 9. *b.* und die identischen Nro. 10. *a* und 12. *a.* bilden zwei besondere Arten von Nro. 3., denen wiederum die identischen Nro. 9. *a.* und 14. *a.* als die letzte Spitze von Besonderung sich unterordnen.

§. 25.

Sind sowohl die Geraden A, A_1 als A', A'_1 projektivisch-ähnlich, so sind die unendlich entfernten Punkte eines jeden Paares entsprechende Punkte; also entsprechen sich die unendlich entfernten Geraden beider Ebenen gegenseitig, d. h. ihre Achsen fallen ins Unendliche hinaus.

Zwei collinear-verwandte Ebenen, deren unendlich entfernte Geraden sich gegenseitig entsprechen, heissen affin, und ihre Verwandtschaft die der Affinität.

Hieraus folgt sofort:

1. In zwei affinen Ebenen sind die unendlich entfernten Punkte je zweier entsprechenden Geraden entsprechende Punkte; und daher sind

2. Je zwei entsprechende Gerade in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch-ähnlich; und

3. Jeder Schaar von Parallelen der einen Ebene entspricht wiederum eine Schaar von Parallelen in der anderen.

In Taf. I. Fig. 4. seien $a, b, c, d, e, f \ldots$ und $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1 \ldots$ beliebige entsprechende Punktenpaare zweier affiner Ebenen, und zwar d, d_1 die Durchschnitte von bc und ae, b_1c_1 und a_1e_1; so hat man kraft des zweiten Satzes dieses Paragraphen:

$$\Delta abc : \Delta acd = bc : cd = b_1c_1 : c_1d_1 = \Delta a_1b_1c_1 : \Delta a_1c_1d_1;$$
$$\Delta acd : \Delta ace = ad : ae = a_1d_1 : a_1e_1 = \Delta a_1c_1d_1 : \Delta a_1c_1e_1;$$

also auch $\Delta abc : \Delta ace = \Delta a_1b_1c_1 : \Delta a_1c_1e_1$ oder

$$\Delta abc : \Delta a_1b_1c_1 = \Delta ace : \Delta a_1c_1e_1 = \Delta acf : \Delta a_1c_1f_1$$

u. s. w.

Also ist auch Fig. $abcef$: Fig. $a_1b_1c_1e_1f_1 = \Delta abc : \Delta a_1b_1c_1 = \text{const.}$; und da jede krummlinichte Figur als eine geradlinichte mit unendlich-kleinen Seiten angesehen werden kann, so gilt ganz allgemein:

4. In zwei affinen Ebenen haben je zwei entsprechende Flächenräume ein bestimmtes unveränderliches Verhältniss zu einander.

5. Sind in zwei affinen Ebenen ein einziges Paar

entsprechende Flächenräume einander gleich, so sind je zwei solche Räume einander gleich.

Affine Ebenen heissen gleich, und ihre Verwandtschaft die der Gleichheit, wenn das Verhältniss ihrer entsprechenden Flächenräume das der Einheit ist.

Es seien in Taf. I. Fig. 5. B, B_1 die Mittelpunkte irgend zweier entsprechender Strahlbüschel affiner Ebenen; so sind diese Strahlbüschel hinsichtlich ihrer entsprechenden Strahlenpaare projektivisch und besitzen nach Thl. IV. des Archivs S. 249. zwei Paar entsprechende Strahlen a, b; a_1, b_1, die zu einander rechtwinklig sind (Schenkel der entsprechenden rechten Winkel). Sind nun $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$ irgend zwei entsprechende Punkte von a, a_1 und b, b_1, und nimmt man die Strecken $B\mathfrak{c}=B\mathfrak{b}$, $B_1\mathfrak{c}_1=B_1\mathfrak{b}_1$, so sind, weil $B\mathfrak{c}:B_1\mathfrak{c}_1=B\mathfrak{b}:B_1\mathfrak{b}_1$, auch $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}_1$ entsprechende Punkte von b, b_1, und es sind nicht nur $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, sondern auch $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1$ entsprechende Strecken. Nun aber ist

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\mathfrak{c},\quad \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1=\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1,$$

also auch

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}:\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1=\mathfrak{a}\mathfrak{c}:\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1.$$

6. **In zwei affinen Ebenen lassen sich zu jedem Paar entsprechenden Geraden unzählige andere finden, deren entsprechende Strecken zu einander in demselben Verhältniss als die der beiden ersteren stehen.** (Vgl. §. 24. Fall 5.)

Nimmt man in Taf. I. Fig. 5. die entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ auf a, a_1 beliebig an, macht $B\mathfrak{a}\,.\,B_1\mathfrak{a}_1=q^2$ und bestimmt auf b eine Strecke $B\mathfrak{b}$ und demzufolge $B_1\mathfrak{b}_1$ dergestalt, dass

$$B\mathfrak{b}^2:q^2=B\mathfrak{b}:B_1\mathfrak{b}_1=\text{const.},$$

so ist

$$B\mathfrak{a}\,.\,B_1\mathfrak{a}_1=B\mathfrak{b}\,.\,B_1\mathfrak{b}_1 \text{ oder } B\mathfrak{a}:B\mathfrak{b}=B\mathfrak{b}_1:B\mathfrak{a}_1,$$

also

$$\text{W.}\ B\mathfrak{a}\mathfrak{b}=\text{W.}\ B_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1,\quad \text{W.}\ B\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\text{W.}\ B_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1=R$$

und

$$\text{W.}\ \mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{c}+\text{W.}\ \mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1=2R.$$

7. **In zwei affinen Ebenen gibt es unzählige Paare von Geraden, deren entsprechende denselben spitzen Winkel als sie selber einschliessen, und deren Strecken zu den entsprechenden Strecken in einem und demselben Verhältnisse stehen; im Allgemeinen aber lassen sich zwei solche Paare entsprechender Geraden nicht dergestalt legen, dass beide zugleich hinsichtlich ihrer entsprechenden Punkte gleichliegend sind.** (Vgl. §. 24. Fall 10. *b*.)

In Taf. I. Fig. 6. seien a, a_1; b, b_1 wiederum die Schenkel zweier entsprechenden rechten Winkel B, B_1 und zwar so auf einander

gelegt, dass beide Paare gleichliegend sind, was in diesem Falle immer möglich ist; es seien a, a_1 in a, a_1 und n, n_1 in b, b_1 entsprechende Punkte, und in denselben auf a, a_1 und b, b_1 Senkrechte errichtet, welche sich beziehlich in den Punkten r, r_1 schneiden; die Verbindungslinie der letzteren schneide a, a_1 in s. Man beschreibe über der Strecke Bs als Durchmesser einen Kreis und errichte im Mittelpunkte i der Strecke aa_1 eine Senkrechte, welche den ersteren in einem Punkte m schneiden möge; verbinde s mit m durch eine Gerade, welche die in a, a_1 errichteten Senkrechten in q, q_1 schneidet, und lege durch letztere mit a, a_1 zwei Parallelen, wodurch man auf b, b_1 die Punkte b, b_1 erhält. Diess vorausgesetzt, so ist:

$$Bb : B_1b_1 = aq : a_1q_1 = ar : a_1r_1 = Bn : B_1n_1,$$

also sind b, b_1 entsprechende Punkte. Ferner ist, weil $ai = a_1i$, auch $qm = q_1m$, und es ist W. Bmq = W. $B_1mq_1 = R$; also $Bq = B_1q_1$; nun aber ist $Bq = ab$, als Diagonalen eines Rechtecks, und $B_1q_1 = a_1b_1$; folglich ist auch $ab = a_1b_1$; und macht man $Bc = Bb$, $B_1c_1 = B_1b_1$, so sind auch c, c_1 entsprechende Punkte, und $ac = a_1c_1$. Da nun die Geraden A, A_1; C, C_1, denen die Strecken ab, a_1b_1; ac, a_1c_1 angehören, in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch-ähnlich sind, ein Paar entsprechende Strecken derselben aber gleich sind, so sind dieselben insbesondere projektivisch-gleich. Offenbar aber gibt es keine solche Gerade, wenn sowohl $Ba > B_1a_1$, als auch $Bb > B_1b_1$ ist. Ist M eine Parallele mit A, und gehen durch a, b irgend zwei Parallelen, welche M in v, w schneiden, so bilden auch die entsprechenden Punkte a_1, b_1, v_1, w_1 ein Parallelogramm, folglich ist die Strecke $vw = ab = a_1b_1 = v_1w_1$, d. h. in den Richtungen von A, A_1 und C, C_1 gibt es unzählige Paare projektivisch-gleicher entsprechender Geraden.

8. In zwei affinen Ebenen gibt es im Allgemeinen zwei Paar Schaaren paralleler Geraden, die sich entsprechen und in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch-gleich sind. (Vgl. §. 24. Fall 4.).

Sind zugleich die Dreiecke Bab und $B_1a_1b_1$ von gleichem Inhalt, so ist

$$Ba \cdot Bb = B_1a_1 \cdot B_1b_1 \text{ oder}$$
$$Ba : B_1b_1 = B_1a_1 : Bb,$$

woraus folgt, dass wenn $Ba > B_1a_1$, nothwendig $Bb < B_1b_1$ sein muss, die Geraden A, A_1; C, C_1 also nothwendig existiren; zugleich aber sind dann auch die Dreiecke congruent, also

$$\text{W. } Bab = \text{W. } B_1b_1a_1;$$
$$\text{W. } Bab + \text{W. } B_1a_1b_1 = R; \text{ W. } bac + \text{W. } b_1a_1c_1 = 2R.$$

9. In zwei gleichen Ebenen gibt es allemal zwei Paar Schaaren paralleler Geraden, die sich entsprechen und in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch-gleich sind; und zwar schliessen die beiden Schaaren der einen Ebene den nämlichen

Winkel ein, als die der anderen; im Allgemeinen aber lassen sich zwei solche Paare entsprechender Geraden nicht dergestalt legen, dass beide zugleich hinsichtlich ihrer entsprechenden Punkte gleichliegend sind. (Vgl. §. 24. Fall 9. *b*.)

Denkt man sich für einen Augenblick (Taf. I. Fig. 7.) zwei affine Ebenen so auf einander gelegt, dass zwei ihrer entsprechenden projektivisch-gleichen Geraden (A, A_1) sammt ihren entsprechenden Punkten sich decken, so werden im Allgemeinen je zwei entsprechende projektivisch-gleiche Gerade (C, C_1) der anderen Parallelenschaar nicht auf einander fallen; es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}\ldots$ und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1\ldots$ entsprechende Punktenpaare von C, C_1; so ist $\mathfrak{a}\mathfrak{h} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{f} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{f}_1\ldots$, also die Linien $\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1\ldots$ parallel, und W. $\mathfrak{a}\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{h}_1\mathfrak{h} = \psi_0$ oder $= \varphi_0$, jenachdem C, C_1 auf einerlei oder auf verschiedenen Seiten von (AA_1) liegen. Da nun jede der Geraden $\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1\ldots$ zwei entsprechende Punktenpaare enthält, nämlich $\mathfrak{d}, \mathfrak{h}$ und $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{h}_1$; $\mathfrak{c}, \mathfrak{g}$ und $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{g}_1$; $\mathfrak{b}, \mathfrak{f}$ und $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{f}_1\ldots$, so fallen in jeder zwei entsprechende Gerade zusammen, und man erhält also zwei Schaaren entsprechender Parallelen, welche gegen die Linien A, A_1 gleich geneigt sind. Sind φ und ψ die spitzen Neigungswinkel, welche den angedeuteten verschiedenen Lagen von C, C_1 entsprechen, und sind α, α_1 die von A und C, A_1 und C_1 eingeschlossenen Winkel, so ist

$$\alpha + \varphi = 2R - \alpha_1 - \varphi = \psi_0;$$
$$2\varphi = 2R - (\alpha + \alpha_1);$$
$$\psi - \alpha = 2R - \alpha_1 - \psi = \varphi_0;$$
$$2\psi = 2R - (\alpha_1 - \alpha);$$

und ebenso

$$2\varphi_0 = 2R - (\alpha_1 + \alpha),$$
$$2\psi_0 = 2R - (\alpha_1 - \alpha).$$

Nimmt man statt der Geraden A, A_1 irgend zwei andere entsprechende, mit ihnen parallele Gerade, z. B. diejenigen, welche durch $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}_1$ gehen, so kann man dieselben zur Deckung bringen, ohne dass die Geraden $\mathfrak{h}\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}_1\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{g}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{g}_1\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{f}\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{f}_1\mathfrak{b}_1\ldots$ ihren Ort verlassen; nur die Abstände ihrer Punkte von einander ändern sich. — Oder will man, statt A, A_1, die C, C_1 zur Deckung bringen, so wende man die eine Ebene um die Senkrechte, welche von dem Punkte $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1)$ auf $\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1$ gefällt wird, herum, und dann behaupten die Geraden $\mathfrak{d}\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{d}_1\mathfrak{h}_1\ldots$ wiederum ihre Stelle. Also besitzen die Ebenen nur zwei Paar Schaaren entsprechender Parallelen, welche gegen die Schaaren der entsprechenden projektivisch-gleichen Geraden gleich geneigt sind.

10. In zwei affinen Ebenen gibt es allemal zwei, aber auch nur zwei Paar unendlich entfernte entsprechende Punkte, deren entsprechende Strahlen gegen je zwei entsprechende projektivisch-gleiche Gerade einerlei Neigung haben.

Ferner erhellt aus Nro. 9. unmittelbar:

11. In zwei gleichen Ebenen gibt es allemal zwei Paar unendlich entfernte entsprechende Punkte, deren entsprechende Strahlen gegen je zwei entsprechende projektivisch-gleiche Gerade einerlei Neigung haben, und zwar gehören dieselben wechselseitig der jedesmaligen anderen Schaar solcher Geraden an.

Dass der Fall 8. des § 24. eine allgemeine Eigenschaft affiner Ebenen betrifft, leuchtet unmittelbar daraus hervor, dass in zwei concentrischen projektivischen Strahlbüscheln allemal zwei Paar entsprechende Strahlen sich vereinigen müssen, sobald dieselben ungleichliegend sind. Denn demnach gibt es in zwei beliebigen entsprechenden Strahlbüscheln affiner Ebenen allemal zwei solche Paare entsprechender Geraden, welche einerlei (spitze) Winkel einschliessen.

§. 26.

Sind zur Bestimmung zweier affiner Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ zwei Paar projektivisch-ähnliche Gerade A, A_1 und A', A'_1 gegeben; ist der Winkel, welchen A, A' einschliessen, dem von A_1, A'_1 eingeschlossenen gleich, und ist das Verhältniss je zweier entsprechender Strecken von A, A_1 dem Verhältnisse je zweier solcher Strecken von A', A'_1 gleich, während zugleich auch beide Linienpaare so gelegt werden können, dass beide gleichliegend sind, so müssen die Verhältnisse aller entsprechenden Strecken beider Ebenen einander gleich sein. Denn ist $\mathfrak{a}$ der Durchschnitt von A, A' und schneidet irgend eine Gerade M die erstere in $\mathfrak{m}$, die letztere in $\mathfrak{m}'$; so ist das Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{m}\mathfrak{m}'$ dem von den entsprechenden Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}'_1$ gebildeten Dreiecke $\mathfrak{a}_1\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}'_1$ ähnlich, indem W. $\mathfrak{m}\mathfrak{a}\mathfrak{m}' =$ W. $\mathfrak{m}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{m}'_1$ und $\mathfrak{m}\mathfrak{a} : \mathfrak{m}_1\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{m}'\mathfrak{a} : \mathfrak{m}'_1\mathfrak{a}_1$ ist. Also ist auch $\mathfrak{m}\mathfrak{m}' : \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}'_1 = \mathfrak{m}\mathfrak{a} : \mathfrak{m}_1\mathfrak{a}_1 =$ const., und da je zwei entsprechende Strecken der entsprechenden Geraden M, M_1 einerlei Verhältniss haben, und M beliebig angenommen ist, für den Fall solcher Geraden aber, welche durch den Punkt $\mathfrak{a}$ gehen oder mit A oder A' parallel sind, statt dieser letzteren eine der schon betrachteten Geraden M genommen werden kann, so müssen, wie gesagt, je zwei entsprechende Strecken beider Ebenen sich zu einander wie $\mathfrak{m}\mathfrak{a} : \mathfrak{m}_1\mathfrak{a}_1$ verhalten.

1. Sind in zwei affinen Ebenen irgend drei Paar entsprechende Strecken, welche zwei Dreiecke bilden, von einerlei Verhältniss, so stehen je zwei entsprechende Strecken derselben zu einander in demselben Verhältniss (Vgl. §. 24. Fall 10. *a.*).

Affine Ebenen heissen ähnlich, und ihre Verwandtschaft die der Aehnlichkeit, wenn je zwei entsprechende Strecken derselben zu einander in einem und demselben Verhältniss stehen.

Sind in zwei Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ zwei Paar projektivisch-gleiche Strahlbüschel B, B_1; B', B'_1 gegeben, und können beide Paare zugleich gleichliegend gelegt werden, so müssen je zwei parallelen

Strahlen a, a' von B, B' ebenfalls zwei parallele Strahlen a_1, a'_1 von B_1, B'_1 entsprechen; folglich sind die unendlich entfernten Geraden beider Ebenen entsprechende Gerade, und die Ebenen selbst sind affin. Zugleich aber bestimmen je zwei entsprechende Punkte a, a_1 zwei Dreiecke $BB'a$, $B_1B'_1a_1$, deren entsprechende Winkel gleich sind; also ist $Ba : B_1a_1 = B'a : B'_1a_1 = BB' : B_1B'_1$. Beide Ebenen sind also ähnlich.

2. Sind in zwei collinearen Ebenen zwei Paar entsprechende Strahlbüschel, deren Mittelpunkte nicht unendlich entfernt sind, projektivisch-gleich, und sind beide Paare gleichliegend, so sind diese Ebenen ähnlich (Vgl. §. 24. Fall 12. *a.*)

Es seien die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ affin, und je zwei entsprechende Strahlbüschel B, B_1 derselben projektivisch-gleich; B' sei ein zweiter Strahlbüschel in $\mathfrak{E}$, dessen Strahlen mit denen des B parallel laufen; so laufen auch die entsprechenden Strahlen des dem B' entsprechenden Strahlbüschels B'_1 mit den entsprechenden Strahlen von B_1 parallel; folglich sind auch B', B'_1 projektivisch-gleich, und zwar sowohl B, B_1 als B', B'_1 gleichliegend.

3 Zwei affine Ebenen können, ohne ähnlich zu sein, keine zwei entsprechende Strahlbüschel besitzen, welche in Ansehung ihrer entsprechenden Strahlenpaare projektivisch-gleich sind, es sei denn, dass ihre Mittelpunkte unendlich entfernt liegen.

4. In zwei ähnlichen Ebenen sind je zwei entsprechende Strahlbüschel in Ansehung ihrer entsprechenden Strahlenpaare projektivisch-gleich.

Ferner zeigt man auf die bekannte Weise, dass

5. In zwei ähnlichen Ebenen das Verhältniss je zweier entsprechender Flächenräume unveränderlich und zwar dem der Quadrate zweier entsprechender Strecken gleich ist.

Ist das Verhältniss der entsprechenden Strecken zweier ähnlicher Ebenen dem der Einheit gleich, so müssen je zwei entsprechende Strecken einander gleich sein; in diesem Falle heissen die Ebenen congruent, und ihre Verwandtschaft die der Congruenz (Vgl. §. 24. Fall 9. *a.* u. 14. *a.*).

6. Zwei ähnliche Ebenen können, ohne congruent zu sein, keine entsprechenden Geraden besitzen, welche in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch-gleich sind, es sei denn, wenn man will, die unendlich entfernten Geraden.

§. 27.

Da zwei projektivisch-ähnliche Gerade vollkommen bestimmt sind, wenn irgend zwei Paar ihrer entsprechenden Punkte gegeben sind, so folgt aus dem Obigen mit Leichtigkeit, dass

1. Zwei affine Ebenen vollkommen bestimmt sind, sobald drei Paar entsprechende Punkte oder Geraden beliebig gegeben sind.

2. Zwei ähnliche Ebenen sind vollkommen bestimmt, sobald zwei Paar entprechende Punkte, oder auch ein Paar entsprechende Punkte und ein Paar entsprechende Geraden beliebig gegeben sind.

3. Zwei gleiche Ebenen sind vollkommen bestimmt, sobald zwei Paar entsprechende Gerade und auf dem einen von beiden ein Paar entsprechende Punkte beliebig gegeben sind.

4. Zwei congruente Ebenen sind vollkommen bestimmt, sobald ein einziges Paar entsprechende Gerade und auf denselben ein einziges Paar entsprechende Punkte beliebig gegeben sind.

Eine Frage, welche bereits der Entdecker der geometrischen Verwandtschaften, Herr Professor Möbius, in seinem Barycentrischen Calcül aufgeworfen und die Bedeutsamkeit derselben für die gesammte Geometrie nachgewiesen hat, ist folgende: Wie viele und welche Stücke müssen gegeben sein, um eine einer gegebenen Figur collineare, affine, gleiche, ähnliche, congruente zu konstruiren? Die vorigen Sätze und der Satz §. 21. 3. führen sehr leicht zur Beantwortung dieser Frage. Hier soll nur noch die hierauf Bezug habende Betrachtung von §. 23. 3. weiter fortgesetzt werden.

Sind $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$ zwei Kegelschnitte, welche in zwei affinen Ebenen sich entprechen, und denkt man sich in $\mathfrak{K}$ eine Schaar paralleler Sehnen, so entsprechen denselben ebenfalls parallele Sehnen von $\mathfrak{K}_1$, und den Mittelpunkten der ersteren die Mittelpunkte der letzteren kraft §. 25. 2. und 3.; also entsprechen sich auch die den Richtungen der beiden Parallelenschaaren zugeordneten Durchmesser der Kegelschnitte, also auch die den letzteren parallelen Sehnen, die Mittelpunkte der letzteren, und folglich auch die jenen Durchmessern zugeordneten Durchmesser selbst.

5. In zwei affinen Kegelschnitten entsprechen allemal dem Mittelpunkte des einen der Mittelpunkt des anderen und je zwei zugeordneten Durchmessern des einen zwei zugeordnete Durchmesser des anderen. Und daher entsprechen sich auch die Achsen derselben (als die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel der von den zugeordneten Durchmessern gebildeten projektivischen Strahlbüschel).

Und da einem unendlich entfernten Punkte der einen Ebene nur ein unendlich entfernter der anderen entsprechen kann, so folgt ferner:

6. Eine Hyperbel kann nur mit einer Hyperbel, eine Ellipse mit einer Ellipse, und eine Parabel mit einer Parabel affin sein.

7. Den Asymptoten einer Hyperbel entsprechen allemal die Asymptoten der affinen Hyperbel.

Aus §. 26. 4. ergibt sich:

8. In zwei ähnlichen Kegelschnitten entsprechen je zwei zugeordneten Durchmessern des einen zwei solche zugeordnete des anderen, welche denselben Winkel als jene einschliessen.

In zwei beliebigen Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ seien zwei beliebige Ellipsen $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$ gegeben; B, B' seien die Endpunkte irgend eines Durchmessers von $\mathfrak{K}$, und es sei a ein Endpunkt des demselben zugeordneten Durchmessers; ebenso seien B_1, B'_1 die Endpunkte eines beliebigen Durchmessers von $\mathfrak{K}_1$, und a_1 sei ein Endpunkt des zugeordneten Durchmessers. Jetzt denke man sich die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ affin, und zwar B, B_1; B', B'_1; a, a_1 als entsprechende Punktenpaare derselben; so entspricht der Ellipse $\mathfrak{K}$ eine Ellipse K_1, welche durch die Punkte B_1, B'_1, a_1 geht, und welche in B_1, B'_1 zwei Gerade berührt, denen in $\mathfrak{E}$ die Tangenten in B, B' entsprechen. Ferner ist nach 5. die Strecke $B_1B'_1$ ein Durchmesser von K_1; also fallen die Mittelpunkte von $\mathfrak{K}_1$ und K_1 zusammen, und da die Mittelpunkte von $\mathfrak{K}$ und K_1 sich entsprechen, so entsprechen sich auch die beiden Durchmesser von $\mathfrak{K}$, K_1, welche durch die Punkte a, a_1 gehen; in $\mathfrak{K}$ aber ist der eine dieser letzteren dem BB' zugeordnet; also ist auch der andere dem $B_1B'_1$ in K_1 zugeordnet. Demnach sind sowohl die Geraden, welche $\mathfrak{K}_1$, als auch diejenigen, welche K_1 in B_1, B'_1 berühren, mit diesem dem $B_1B'_1$ zugeordneten Durchmesser parallel, d. h. sie fallen zusammen. Und da es immer nur einen einzigen Kegelschnitt gibt, welcher durch drei gegebene Punkte geht und in zweien derselben zwei gegebene Gerade berührt, so sind $\mathfrak{K}_1$ und K_1 identisch.

Oder sind $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$ irgend zwei Hyperbeln, und sind B, B'; B_1, B'_1 wiederum die Endpunkte irgend zweier Durchmesser derselben, so denke man sich durch B, B' nach dem einen unendlich entfernten Punkte α von $\mathfrak{K}$ zwei Strahlen a, a', und nach dem anderen β die Strahlen b, b', und ebenso nach dem einen unendlich entfernten Punkte α_1 von $\mathfrak{K}_1$ durch B_1, B'_1 die Strahlen a_1, a'_1, und nach dem anderen β_1 die Strahlen b_1, b'_1 gezogen, und setze fest, die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ sollen collinear, und zwar a, a_1; b, b_1; a', a'_1; b', b'_1 sollen entsprechende Gerade, oder, was einerlei ist, die Punkte B, B_1; B', B'_1; α, α_1; β, β_1 sollen entsprechende Punkte sein. Dann aber müssen sich die unendlich entfernten Geraden $\alpha\beta$ und $\alpha_1\beta_1$ entsprechen; folglich sind die Ebenen affin. Der Hyperbel $\mathfrak{K}$ entspreche in $\mathfrak{E}_1$ eine Hyperbel K_1; so fällt der Mittelpunkt der letzteren mit dem von $\mathfrak{K}_1$, zugleich aber auch die unendlich entfernten Punkte der einen Hyperbel mit denen der anderen, folglich auch deren Asymptoten zusammen. Die Hyperbeln $\mathfrak{K}_1$, K_1 haben also ausser den Punkten B_1, B'_1 auch noch zwei Tangenten und deren Berührungspunkte gemein; folglich sind sie identisch.

Sind endlich $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$ zwei beliebige Parabeln, und denkt man sich an $\mathfrak{K}$ irgend zwei Tangenten A, A', welche dieselben in a, a' berühren, und an $\mathfrak{K}_1$ auch zwei beliebige Tangenten A_1, A'_1 gelegt, welche dieselben in a_1, a'_1 berühren, so kann man festsetzen, die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ sollen affin, und zwar die Geraden A, A_1;

A', A'_1; aa', $a_1a'_1$ entsprechende Gerade sein. Entspricht nun der Parabel $\mathfrak{K}$ eine Parabel K_1, so geht letztere durch die Punkte a_1, a'_1, welche den a, a' entsprechen, und berührt in diesen zwei Gerade A_1, A'_1, welche den Tangenten A, A' entsprechen. Die Parabeln $\mathfrak{K}_1$, K_1 haben also zwei Tangenten und deren Berührungspunkte und ausserdem die unendlich entfernte Tangente gemein; folglich sind dieselben identisch.

9. Zwei beliebige Ellipsen sind allemal affine Figuren; und zwar darf man in jeder zwei zugeordnete Durchmesser beliebig auswählen und sodann festsetzen, dass die der einen denen der anderen entsprechen sollen.

10. Zwei beliebige Hyperbeln sind allemal affine Figuren; und zwar darf man ausser den Asymptoten in jeder einen Durchmesser (und den ihm zugeordneten) beliebig auswählen und sodann festsetzen, dass die einen den anderen entsprechen sollen.

11. Zwei beliebige Parabeln sind allemal affine Figuren; und zwar darf man in jeder zwei Tangenten beliebig auswählen und sodann festsetzen, dass sowohl diese Tangenten als auch deren Berührungspunkte einander entsprechen sollen.

In Taf. II. Fig. 8. sei P eine beliebige Parabel, A, A' seien zwei beliebige Tangenten derselben, a, a' deren Berührungspunkte, $\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_{II}$ die der Sehne aa' parallele Tangente; a'_1 deren Berührungspunkt und $\mathfrak{s}$ der Durchschnitt von A, A'; so ist die Gerade $\mathfrak{s}a'_1$, als harmonische Polare des unendlich entfernten Punktes der Sehne aa', der dieser letzteren zugeordnete Durchmesser, also a'_1 der Scheitel des Parabelsegments über aa'. Da nun $\mathfrak{s}$ der harmonische Pol von aa' ist, folglich die Punkte $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{m}$ mit dem Punkte a'_1 und dem unendlich entfernten der Parabel harmonisch sind, so ist $\mathfrak{s}a'_1 = \mathfrak{m}a'_1$, folglich

$$\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_{II} = \frac{1}{2}aa' \text{ und } \Delta aa'a'_1 = \frac{1}{2}\Delta aa'\mathfrak{s} = 2\Delta\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_{II}\mathfrak{s}.$$

Man denke sich nun mit der Parabel P eine zweite, P_1, zusammengefallen, und wähle für P die Tangenten A, A', für P_1 die Tangenten A_1, A'_1 (wovon erstere mit A, letztere mit $\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_{II}$ zusammenfällt) beliebig aus; so darf man festsetzen, P und P_1 sollen affin und zwar A, A_1; A', A'_1; a, a_1; a', a'_1 entsprechende Elemente sein. Dann aber sind nicht nur die Dreiecke $aa'\mathfrak{s}$ und $a_1a'_1\mathfrak{s}_1$, sondern auch die Parabelsegmente über den Sehnen aa' und $a_1a'_1$ entsprechende Flächenräume. Denn, um das letztere ganz ausser Zweifel zu setzen, ist $\mathfrak{p}$ irgend ein innerhalb des $\Delta aa'\mathfrak{s}$ liegender Punkt von P, und ist p die Tangente in $\mathfrak{p}$, so liegen die Durchschnitte $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$ von p und A, p und A' nothwendig zwischen a und $\mathfrak{s}$, a' und $\mathfrak{s}$; also liegen auch die entsprechenden Punkte $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}'_1$ zwischen a_1 und $\mathfrak{s}_1$, a'_1 und $\mathfrak{s}_1$, und sowie $\mathfrak{p}$ zwischen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$ liegt, muss auch auf der Tangente p der dem $\mathfrak{p}$ entsprechende Punkt $\mathfrak{p}_1$ zwischen $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}'_1$, also innerhalb des Dreiecks $a_1a'_1\mathfrak{s}_1$ liegen. Nach §. 25. 4 ist also

$$S.\,aa' : S.\,a_1a'_1 = \Delta aa'\mathfrak{s} : \Delta a_1a'_1\mathfrak{s}_1;$$

aus demselben Grunde aber ist auch

$$S.\,aa' : S.\,a'a'_1 = \Delta aa'\mathfrak{s} : \Delta a'a'_1\mathfrak{s}_{II};$$

folglich ist

$$S.\,aa' : S.\,a_1a'_1 : S.\,a'a'_1 = \Delta aa'\mathfrak{s} : \Delta a_1a'_1\mathfrak{s}_1 : \Delta a'a'_1\mathfrak{s}_{II};$$

hieraus aber ergibt sich nun:

$$(S.\,aa' - S.\,a_1a'_1 - S.\,a'a'_1) : (\Delta aa'\mathfrak{s} - \Delta a_1a'_1\mathfrak{s}_1 - \Delta a'a'_1\mathfrak{s}_{II})$$
$$= \Delta aa'a'_1 : (\Delta aa'a'_1 + \Delta\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_{II}\mathfrak{s}) = S.\,aa' : \Delta aa'\mathfrak{s};$$

also da

$$\Delta\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_{II}\mathfrak{s} = \frac{1}{2}\Delta aa'a'_1, \quad \Delta aa'\mathfrak{s} = 2\Delta aa'a_1$$

ist, so hat man die Proportion

$$1 : \frac{3}{2} = S.\,aa' : 2\Delta aa'a'_1,$$

d. h.

$$S.\,aa' = \frac{4}{3}\Delta aa'a'_1.$$

12. Ein jedes Parabelsegment beträgt vier Drittheile des Dreiecks, dessen Grundlinie die Sehne, und dessen Scheitel der Scheitel dieses Segmentes ist.

Auf einander gelegte collineare und reciproke Ebenen.

A.

Collineare.

§. 28.

Werden irgend zwei collineare Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ beliebig auf einander gelegt, und sind B, B_1; B', B'_1 irgend zwei Paar entsprechende Strahlbüschel derselben, so ist sowohl

$$B\,(a,\ b,\ c,\ d\ldots) = B_1\,(a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1\ldots),$$

als auch

$$B'\,(a',\ b',\ c',\ d'\ldots) = B'_1\,(a'_1,\ b'_1,\ c'_1,\ d'_1\ldots);$$

also schneiden sich je zwei entsprechende Strahlen von B, B_1 auf einem Kegelschnitte K, welcher auch die Punkte B, B_1 enthält, und je zwei entsprechende Strahlen von B', B'_1 auf einem zweiten Kegelschnitte K', der auch durch die Punkte B', B'_1 geht. Es sind nun aber die Strahlen BB' und $B_1B'_1$ allemal entsprechende sowohl von B und B_1, als auch von B' und B'_1; also haben die Kegelschnitte K, K' nothwendig einen Punkt i gemein, und dann nothwendig noch einen zweiten p, und wenn einen dritten q, auch noch einen vierten r, es sei denn, dass sie sich berühren oder oskuliren. Von diesen drei Punkten p, q, r gehört keiner den Geraden BB', $B_1B'_1$ selber an; denkt man sich also irgend einen derselben mit B, B', B_1, B'_1 durch die Geraden a, a', a_1, a'_1 verbunden, so müssen den a, a' von $\mathfrak{E}$ die a_1, a'_1 in $\mathfrak{E}_1$ entsprechen; folglich fallen in jedem dieser drei Punkte zwei entsprechende Punkte der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ zusammen. Das nämliche lässt sich aber nicht vom Punkte i sagen; denn rechnet man ihn zu $\mathfrak{E}$, so kann demselben irgend ein Punkt i_1 der Geraden $B_1B'_1$ entsprechen, der nicht mit i identisch ist. Gäbe es aber noch einen vierten Punkt, in welchem sich entsprechende vereinigten, so würde derselbe zwei entsprechende Strahlen von B, B_1, und zwei andere von B', B'_1 bestimmen, also ebenfalls den Kegelschnitten K, K' gemeinschaftlich angehören, was widersprechend ist, da diese Kegelschnitte nicht zusammenfallen können.

Verbindet man die Punkte p und q, q und r, r und p durch drei Gerade R, P, Q, so sieht man sogleich, dass in einer jeden zwei entsprechende Geraden beider Ebenen zusammenfallen; eine jede vierte Gerade aber von derselben Eigenschaft würde wenigstens eine der drei ersteren in einem neuen Punkte schneiden, der zwei entsprechende vereinigte, was dem Vorigen widerspricht. Oder wählt man statt der Strahlbüschel B, B_1; B', B'_1 zwei Paar entsprechende Gerade A, A_1; A', A'_1, so sind sämmtliche Gerade, welche die entsprechenden Punkte von A, A_1 verbinden, die Tangenten eines Kegelschnittes $\mathfrak{K}$, und sämmtliche Gerade, welche die entsprechenden Punkte von A', A'_1 verbinden, sind die Tangenten eines Kegelschnittes $\mathfrak{K}'$; diese beiden Kegelschnitte haben allemal eine Tangente i gemein, welche den Durchschnitt von A, A' mit dem von A_1, A'_1 verbindet; also haben sie nothwendig noch eine, und wenn eine dritte, auch noch eine vierte Tangente gemein, es sei denn, dass sie sich berühren oder oskuliren. In jeder der drei letzteren fallen zwei entsprechende Gerade der Ebenen zusammen, und nur in der ersteren geschieht dies nicht.

Existirt nur einer der Punkte p, q, r, z. B. p, so kann auch nur eine der, auf die letzte Weise erhaltenen Geraden P, Q, R, nämlich P, existiren; denn zwei der letzteren würden auch die dritte, und alle drei auch drei Punkte p, q, r fordern, und umgekehrt; und dass P im Allgemeinen nicht durch p gehen kann, erhellt daraus, dass, wenn in zwei auf einander gelegten projekti-

vischen Geraden ein Paar entsprechende Punkte sich vereinigen, im Allgemeinen allemal ein zweites solches Paar sich nachweisen lässt.

1. Werden zwei collineare Ebenen beliebig aufeinander gelegt, so gibt es im Allgemeinen entweder nur einen oder drei Punkte in denselben, in denen sich zwei entprechende vereinigen; und zwar gibt es im ersten Falle nur eine, durch jenen Punkt nicht gehende Gerade, in welcher zwei entsprechende sich vereinigen; im letzten Falle dagegen ist jede Verbindungslinie der drei Punkte eine solche Gerade.

Ein jeder der Punkte p, q, r wird ein Situationspunkt, und eine jede der Geraden P, Q, R eine, dem ersteren zugeordnete, Situationslinie der collinearen Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ genannt.

Da je zwei entprechende Gerade in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch sind und perspektivisch werden, wenn in ihrem Durchschnitt zwei entsprechende Punkte sich vereinigen, und da ähnliches von zwei entprechenden Strahlbüscheln gilt, in deren gemeinschaftlichem Strahle entsprechende zusammenfallen, so folgt:

2. Je zwei entsprechende Strahlen eines Situationspunktes sind in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare perspektivisch, und zwar liegt ihr Projektionspunkt auf der zugeordneten Situationslinie; und

Je zwei entsprechende Strahlbüschel, deren Mittelpunkte auf einer Situationslinie liegen, sind in Ansehung ihrer entsprechenden Strahlenpaare perspektivisch, und zwar geht ihr perspektivischer Durchschnitt durch den zugeordneten Situationspunkt.

Mittels §. 21. 3. ergibt sich:

3. Die Verwandtschaft der Collineation zweier auf einander gelegter Ebenen ist vollkommen bestimmt, sobald ein Situationspunkt, oder eine Situationslinie, und irgend drei Paar entsprechende Punkte oder Geraden beliebig gegeben sind.

4. Wenn von zwei auf einander gelegten collinearen Ebenen ein Situationspunkt und ausserdem drei Paar entsprechende Punkte beliebig gegeben sind, die zugeordnete Situationslinie und zu einem beliebig gegebenen Punkte der einen Ebene den entsprechenden Punkt der anderen zu finden.

Auflösung.

Sind in Taf. II. Fig. 9. der Situationspunkt p und die entsprechenden Punktenpaare a, a_1; b, b_1; c, c_1 gegeben, so verbinde man p mit den letzteren durch die Geraden a, a_1; b, b_1; c, c_1, ziehe bc und ac (oder ab), welche a und b resp. in α und β schneiden, und ebenso b_1c_1 und a_1c_1 (oder a_1b_1), welche a_1 und b_1 resp. in α_1 und β_1 schneiden; endlich ziehe man aa_1 und $\alpha\alpha_1$, welche

sich in a_0, und bb_1 und $\beta\beta_1$, welche sich in b_0 schneiden; so ist die Gerade P, welche a_0 mit b_0 verbindet, die gesuchte Situationslinie. — Ist nun q irgend ein Punkt von $\mathfrak{E}$, so verbinde man denselben mit a und b durch zwei Gerade, welche b und a resp. in β' und α' schneiden, ziehe sofort die Geraden $a_0\alpha'$ und $b_0\beta'$, welche a_1 und b_1 resp. in α'_1 und β'_1 schneiden, und noch die Geraden $a_1\beta'_1$ und $b_1\alpha'_1$; so ist der Durchschnitt q_1 dieser letzteren der dem q entsprechende Punkt.

Beweis.

Die Geraden a, a_1; b, b_1; c, c_1 entsprechen sich paarweise, weil auf je zweien derselben, z. B. auf a, a_1, zwei Paar entsprechende Punkte p, p_1, a, a_1 liegen, und da aus demselben Grunde auch die Geraden ac, a_1c_1; bc, b_1c_1 sich entsprechen, so gilt diess auch von den Punkten β, β_1; α, α_1. Nach Lehrsatz 2. liegen demnach die Punkte a_0 und b_0 auf der dem p zugeordneten Situationslinie. — Kraft desselben Satzes entsprechen sich nun auch die Punkte α', α'_1; β', β'_1, und mithin auch die Geraden $b\alpha'$, $b_1\alpha'_1$; $a\beta'$, $a_1\beta'_1$. Also sind q, q_1, als Durchschnitte zweier Paar entsprechender Geraden, entsprechende Punkte.

5. Wenn von zwei auf einander gelegten affinen Ebenen drei Paar entsprechende Punkte oder Gerade beliebig gegeben sind, einen Situationspunkt beider Ebenen, d. h. einen Punkt zu finden, in welchem sich zwei entsprechende Punkte vereinigen.

Auflösung.

Sind in Taf. II. Fig. 10. die entsprechenden Punktenpaare a, a_1; b, b_1; c, c_1 gegeben, so ziehe man die Geraden ab und a_1b_1, die sich in γ schneiden, und lege durch c mit ab, durch c_1 mit a_1b_1 zwei Parallelen, die sich in γ_1 schneiden; ebenso sei β der Durchschnitt von ac und a_1c_1, und β_1 der Durchschnitt zweier durch b mit ac, und durch b_1 mit a_1c_1 parallel gelegten Linien. Jetzt verbinde man γ mit γ_1, und β mit β_1 durch zwei Gerade; so ist der Durchschnitt p dieser letzteren der gesuchte Situationspunkt.

Beweis.

Denn legt man durch p der Reihe nach mit ab, ac, a_1b_1, a_1c_1 Parallelen, welche beziehlich die ac, ab, a_1c_1, a_1b_1 in den Punkten b, c, b_1, c_1 schneiden, so ist

$$\frac{ac}{ab} = \frac{\gamma\gamma_1}{\gamma p} = \frac{a_1c_1}{a_1b_1}, \text{ und } \frac{ab}{ae} = \frac{\beta\beta_1}{\beta p} = \frac{a_1b_1}{a_1e_1};$$

und da auch die Lage der Punkte a, b, c und a_1, b_1, c_1; a, e, b und a_1, e_1, b_1 die nämliche als die der Punkte γ, p, γ_1; β, p, β_1, folglich übereinstimmend sein muss, so sind b, b_1; c, c_1 entsprechende Punkte und somit nach §. 25. 3. sind die Geraden pb, pb_1; pe, pc_1 ebenfalls entsprechend. Dem Durchschnitte von pb und pe entspricht also der Durchschnitt von pb_1 und pe_1.

Denkt man sich die zwei entsprechenden Strahlbüschel, deren Mittelpunkte in p liegen, so haben dieselben, wie je zwei concentrische projektivische Strahlbüschel, im Allgemeinen zwei Paar entsprechende Strahlen gemein; diese können jedoch auch ganz fehlen oder im Grenzfalle sich zu einem einzigen vereinigen; und da bei auf einander gelegten affinen Ebenen jedesmal die entsprechenden unendlich entfernten Geraden sich vereinigen, so folgt:

6. In zwei beliebig auf einander gelegten affinen Ebenen gibt es allemal einen Situationspunkt, welchen die unendlich entfernte Gerade als Situationslinie zugeordnet ist; und ausserdem gibt es im Allgemeinen zwei oder (nur eine oder) keine Situationslinien und Situationspunkte, und diese gehören den beiden ersteren an.

§. 29.

Ein ausgezeichneter Fall, dessen allgemeine Möglichkeit Magnus in seiner „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie. Berlin. 1833“ zuerst nachgewiesen hat, ist derjenige, dass in zwei entsprechenden Strahlbüscheln je zwei entsprechende Strahlen, und dass zugleich in zwei entsprechenden Geraden je zwei entsprechende Punkte einander decken. Für uns ist dieser Fall durch die in §. 22. angestellten Betrachtungen bereits erledigt.

a) In der That: legt man irgend zwei collineare Ebenen dergestalt auf einander, dass irgend eines der beiden Paare projektivisch gleicher entsprechender Geraden, z. B. T, T_1 in Taf. I. Fig. 3., sammt ihren entsprechenden Punkten einander decken, so werden auch die Mittelpunkte σ, σ_1 und die entsprechenden Strahlenpaare zweier projektivisch gleicher Strahlbüschel zusammenfallen müssen. Die Achsen beider Ebenen sind dann unter einander und mit T, T_1 parallel, und die zwei andern projektivisch gleichen Geraden S, S_1 sind von dem Punkte $(\sigma\sigma_1)$, sowie auch die Mittelpunkte der zwei anderen projektivisch gleichen Strahlbüschel s, s_1 von der Geraden (TT_1) gleichweit entfernt.

b) Dreht man jetzt die eine Ebene um den Punkt $(\sigma\sigma_1)$, ohne sie jedoch von der anderen zu trennen, um einen Winkel von 180°, so müssen jetzt die Geraden S, S_1 sammt ihren entsprechenden Punktenpaaren sich decken, während das nämliche auch noch von den entsprechenden Strahlenpaaren der Strahlbüschel σ, σ_1 gilt. Die Geraden T, T_1 nehmen dann den Punkt $(\sigma\sigma_1)$, und die Punkte s, s_1 die Gerade (SS_1) in die Mitte.

c) Man denke sich die Ebenen in die Lage *a*) zurückgebracht, nun aber die eine um die Gerade (TT_1) — ohne Verschiebung — herumgewendet, so fallen die Strahlbüschel s, s_1 und deren entsprechende Strahlenpaare auf einander u. s. w.

d) Und denkt man sich jetzt wieder die eine Ebene um den Punkt (ss_1) — ohne Umwendung — um 180° herumgedreht, so

kommen die Geraden S, S_1 sammt ihren entsprechenden Punktenpaaren zur Deckung u. s. w.

1. Sind irgend zwei collineare Ebenen gegeben, so lassen sich dieselben auf vier verschiedene Arten dergestalt aufeinander legen, dass sowohl zwei entsprechende Strahlbüschel und deren entsprechende Stralenpaare, als auch zwei entsprechende Gerade und deren entsprechende Punktenpaare einander decken. Man erhält nämlich allemal eine von diesen vier Lagen, wenn man die beiden auf den Achsen senkrecht stehenden entsprechenden Geraden auf einander legt und sodann diejenigen zwei entsprechenden projektivisch gleichen Geraden oder die Mittelpunkte derjenigen zwei entsprechenden projektivisch-gleichen Strahlbüschel, welche gleichliegend sind, sich decken lässt; und die drei anderen erhält man hiernach, indem man die eine Ebene entweder um den Mittelpunkt der vereinigten Strahlbüschel und zwar um einen Winkel von zwei Rechten herumdreht, oder um die vereinigten Geraden, ohne Verschiebung, herumwendet, oder, wenn diess letztere geschehen, jene Drehung um den Mittelpunkt der neuen vereinigten Strahlbüschel wieder eintreten lässt. In keinem Falle aber, selbst nicht, wenn beide Paare projektivisch-gleicher Geraden und die Mittelpunkte beider Paare projektivisch-gleicher Strahlbüschel auf einander fallen, können zugleich die entprechenden Elementenpaare des einen Paars und auch die des anderen einander decken, es sei denn, dass die Ebenen congruent sind.

Zwei auf einander gelegte Ebenen heissen collinear und collinear-liegend, und ihr Situationspunkt Collineationspunkt, ihre Situationslinie Collineationslinie, wenn sie collinear sind und sich in einer der vier so eben angedeuteten Lagen befinden; und ähnlicherweise werden die Ausdrücke affin und affin-liegend, ähnlich und ähnlich-liegend, Affinitätspunkt, Affinitätslinie, Aehnlichkeitspunkt und Aehlichkeitslinie zu verstehen sein.

2. In zwei collinearen und collinear-liegenden Ebenen liegen je zwei entsprechende Punkte mit dem Collineationspunkte in gerader Linie, und schneiden sich je zwei entsprechende Gerade in einem Punkte der Collineationslinie.

3. In zwei collinearen und collinear-liegenden Ebenen sind die Achsen derselben mit der Collineationslinie parallel, und eine jede von beiden ist ebensoweit von dieser letzteren, als die andere vom Collineationspunkte entfernt.

Aus den Sätzen 3., 4., 6. des §. 26. und den Sätzen 8., 10. des §. 25. erhellt nun sogleich:

4. Zwei affine Ebenen können allemal, aber auch nur dann in affine Lagen gebracht werden, wenn auf

den einen Paar Schenkeln zweier entsprechenden rechten Winkel das Verhältniss der entsprechenden Strecken grösser, und auf den anderen kleiner als die Einheit ist.

5. Zwei affine Ebenen lassen sich im Allgemeinen auf unzählige verschiedene Arten in affine Lage bringen. Befinden sie sich nämlich in einer solchen, so erhält man sofort eine andere, indem man die eine Ebene entweder um die Affinitätslinie ohne Verschiebung herumwendet, oder um einen beliebigen Punkt der Affinitätslinie und zwar um einen bestimmten unveränderlichen Winkel herumdreht, oder auch dergestalt verschiebt, dass irgend ein Strahl des Affinitätspunktes in seinem Orte verharrt. Der Affinitätspunkt liegt allemal unendlich entfernt, wofern nicht der besondere Fall der Aehnlichkeit vorhanden ist; und zwar liegt derselbe allemal in einer von zwei festen Richtungen der als ruhend vorgestellten Ebene, welche bei jeder Drehung oder Umwendung der anderen Ebene mit einander wechseln.

6. Zwei ähnliche Ebenen lassen sich auf unzählige verschiedene Arten in ähnliche Lage bringen, indem man zu diesem Zwecke nur irgend zwei Paar entsprechende Strahlen auf einander zu legen braucht. Die Aehnlichkeitslinie ist jedesmal, der Aehnlichkeitspunkt dagegen nie unendlich entfernt.

In Taf. II. Fig. 11. sind zwei gleiche Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ dargestellt; S, S_1 sind zwei entsprechende projektivisch-gleiche Gerade, welche sich sammt ihren entsprechenden Punktenpaaren decken; T, T_1 sind ebenfalls projektivisch-gleich, aber ungleichliegend, und dasselbe gilt von den Parallelen b, b_1; c, c_1; d, d_1.... Wendet man die Ebene $\mathfrak{E}_1$ um die Gerade (SS_1) herum, so fallen die Punkte $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{m}_1$... auf ε_1, ν_1, μ_1..., die Geraden $\mathfrak{c}\varepsilon_1$, $\mathfrak{n}\nu_1$, $\mathfrak{m}\mu_1$... sind nun mit (SS_1) parallel und vereinigen eine jede zwei entsprechende Strahlen. Dreht man dagegen die Ebene $\mathfrak{E}_1$ um einen beliebigen Punkt von (SS_1), z. B. um $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1)$, und zwar um 180° herum, so tritt jetzt die Gerade (TT_1) an die Stelle von (SS_1) und die Geraden S, S_1 sind ungleichliegend u. s. w.

7. Zwei gleiche Ebenen lassen sich auf unzählige verschiedene Arten dergestalt aufeinander legen, dass zwei entsprechende Gerade und deren entsprechende Punktenpaare, und zugleich zwei entsprechende Punkte und deren entsprechende Strahlenpaare einander decken. Dieser Punkt, der Projektionspunkt beider Ebenen, ist allemal unendlich weit entfernt, und je zwei seiner vereinigten Strahlen, die Projektionsstrahlen der Ebenen, sind in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch-gleich. Die Grundlinie der Ebenen, d. h. die Gerade, deren jeder Punkt zwei entsprechende vereinigt, ist entweder unter einem bestimmten, unveränderlichen Winkel gegen die Projektionsstrahlen geneigt, oder mit den-

selben parallel; im ersten Falle sind je zwei in einem Projektionstrahl vereinigte Gerade ungleichliegend, im zweiten aber gleichliegend, und der eine Fall entsteht aus dem anderen, indem man die eine Ebene um die Grundlinie herumwendet. Dreht man im ersten Falle die eine Ebene um irgend einen Punkt der Grundlinie, und zwar um einen Winkel von zwei Rechten, so wird jetzt einer der Projektionsstrahlen zur Grundlinie, die neuen Projektionsstrahlen aber sind wieder ungleichliegend; und dreht man im zweiten die Ebene um das doppete Complement jenes unveränderlichen Winkels, so ändert auch jetzt die Grundlinie ihre Richtung, aber auch jetzt werden die neuen Projektionsstrahlen wieder gleichliegend. Endlich erhält man in beiden Fällen nach und nach immer neue Grundlinien von derselben Richtung, wenn man die eine Ebene bloss so verschiebt, dass ein Projektionsstrahl in seinem Orte verharrt.

Keiner weiteren Erklärung endlich wird der folgende Satz bedürfen:

8. Zwei congruente Ebenen lassen sich allemal so legen, dass je zwei entsprehende Elemente derselben sich decken. Dreht man sodann die eine Ebene um irgend einen festen Punkt, und zwar um einen Winkel von zwei Rechten herum, so sind je zwei entsprechende Gerade parallel und, sowie auch je zwei entsprechende Punkte, von jenem festen Punkte, dem Mittelpunkte der Ebenen, gleichweit entfernt; wendet man dagegen die eine Ebene um irgend eine Gerade ohne Verschiebung herum, so liegen beide Ebenen zu einander symmetrisch, d. h. je zwei entsprechende Gerade schneiden sich auf jener Geraden, der Symmetrallinie, und bilden mit ihr gleiche Winkel, und je zwei entsprechende Punkte sind gleichweit von der Symmetrallinie entfernt, und ihre Verbindungslinie steht auf derselben senkrecht. Verschiebt man endlich die eine Ebene dergestalt, dass irgend eine Gerade in ihrem Orte verharrt, so sind je zwei entsprechende Punkte und je zwei entsprechende Gerade gleichweit von einander entfernt.

§. 30.

Wenn in zwei auf einander gelegten collinearen Ebenen irgend zwei Punkte einander in doppeltem Sinne entsprechen, so müssen in der sie verbindenden Geraden zwei entsprechende sich vereinigen, also eine Situationslinie bilden, und nach dem 4ten Thl. des Archivs S. 258. *b.* müssen je zwei entsprechende Punkte dieser Geraden sich in doppeltem Sinne entsprechen, d. h. die Geraden selbst sind involutorisch; folglich fallen die Durchschnitte ihrer Parallelstrahlen, d. h. die den unendlich entfernten Punkten entsprechenden Punkte, zusammen; jene Situationslinie geht also

durch den Durchschnitt der beiden Achsen. Man sieht sogleich, dass diess nicht im Allgemeinen stattfinden kann, indem man ja zwei entsprechende Gerade so auf einander legen kann, dass die den unendlich entfernten Punkten derselben entsprechenden Punkte nicht zusammenfallen. Legt man sie aber wirklich auf diese Weise, so müssen auch die beiden Strahlbüschel, deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt der zugeordnete Situationspunkt ist, involutorisch sein, sonst aber im Allgemeinen keine anderen Geraden und keine anderen Strahlbüschel. Eine Ausnahme bildet ganz allein der in §. 24. unter Nro. 14. *b* bezeichnete Fall. Sind nämlich die Abstände der Mittelpunkte s, s_1 der projektivisch-gleichen Strahlbüschel von den Achsen einander gleich, so kann man die Ebenen so auf einander legen, dass zu gleicher Zeit die Achsen Q, P_1 (Taf. I. Fig. 3.) und die Punkte s, s_1 und σ, σ_1 einander decken, und dann werden einerseits die Strahlbüschel σ, σ_1 und je zwei ihrer entsprechenden Strahlenpaare, sowie auch die Geraden T, T_1 mit ihren entsprechenden Punktenpaaren einander decken; andererseits aber die Strahlbüschel s, s_1, sowie die Geraden S, S_1, eine Involution bilden. Ist nun $\mathfrak{g}$ irgend ein Punkt von $\mathfrak{E}$, so liegt sein entsprechender $\mathfrak{g}_1$ auf der Geraden, welche $\mathfrak{g}$ mit $(\sigma\sigma_1)$ verbindet; in dieser aber vereinigen sich zwei entsprechende, und den unendlich entfernten Punkten beider entsprechen zwei Punkte, welche sich auf der Achse (QP_1) vereinigen; also sind dieselben involutorisch, und die Punkte $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1$ entsprechen sich in doppeltem Sinne. Oder ist g irgend eine Gerade von $\mathfrak{E}$, so schneidet sie die ihr entsprechende g_1 in einem Punkte von (TT_1), in welchem sich zwei entsprechende vereinigen; da nun die Punkte, wo diese Geraden g, g_1 die (SS_1) schneiden, sich in doppeltem Sinne entsprechen, so gilt diess auch von g, g_1; und demnach gehören letztere zu zwei involutorischen Strahlbüscheln.

Wären die Strecken $s\sigma$, $s_1\sigma_1$ nicht einander gleich, und man legte $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ so auf einander, dass die Achsen Q, P_1 sich vereinigen, so könnten dieselben nicht collinear liegen, und höchstens nur die Punkte der Situationslinien sich in doppeltem Sinne entsprechen. Da aber in diesem Falle der eine Situationspunkt der unendlich entfernte von (QP_1) sein würde, so wären zwei Situationslinien mit (QP_1) parallel, also die in denselben vereinigten Geraden projektivisch-ähnlich; solche aber können nach dem 4ten Thl. des Archivs S. 261. *a* niemals involutorisch sein. Dagegen würde diess von den in der dritten Situationslinie vereinigten Geraden, aber auch nur von diesen allein, gelten, weil hier die Durchschnitte der Parallelstrahlen in endlicher Entfernung sich vereinigen.

a) In zwei beliebig auf einander gelegten collinearen Ebenen gibt es im Allgemeinen keine zwei Punkte und keine zwei Gerade, welche sich in doppeltem Sinne entsprechen. *b*) Legt man sie aber dergestalt auf einander, dass zwei entsprechende Gerade einander, und zugleich die den Achsen angehörigen Punkte sich decken, oder so, dass in zwei entsprechenden rechten Winkeln die ungleichnamigen Schenkel auf einander fallen, so sind jene zwei Gerade und die im zugeordneten Situationspunkte vereinigten Strahl-

büschel, und andererseits die mit diesen Winkeln concentrischen Strahlbüschel und die mit der zugeordneten Situationslinie vereinigten Geraden involutorisch, d. h. je zwei entsprechende Elemente derselben entsprechen sich in doppeltem Sinne, im Allgemeinen aber auch nur diese allein. *c*) Fallen die Achsen beider Ebenen auf einander, so entspricht jede denselben parallele Gerade einer anderen in doppeltem Sinne, und das nämliche gilt von den Punkten derjenigen Situationslinie, welche nicht mit den Achsen parallel ist, sonst aber im Allgemeinen von keinem anderen Elemente. *d*) Sind in beiden Ebenen die Mittelpunkte der projektivisch-gleichen Strahlbüschel gleichweit von einander entfernt ($s\sigma = s_1\sigma_1$), und liegen die Ebenen collinear, so entspricht jeder Punkt einem anderen, und jede Gerade einer anderen in doppeltem Sinne.

B.

Auf einander gelegte reciproke Ebenen.

§. 31.

Denkt man sich irgend zwei reciprok-verwandte Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ beliebig auf einander gelegt, und ist A irgend eine Gerade von $\mathfrak{E}$ und B_1 der ihr entsprechende Punkt von $\mathfrak{E}_1$, ferner $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$... die Punkte von A, und a_1, b_1, c_1, d_1... die denselben entsprechenden Strahlen von B_1, so ist

$$A\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}\ldots) = B_1\,(a_1, b_1, c_1, d_1\ldots).$$

Sind nun $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$... diejenigen Punkte von A, in welchen dieselbe von a_1, b_1, c_1, d_1... geschnitten wird, so ist auch

$$A\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}\ldots) = A_1\,(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1\ldots).$$

Oder sind $a, b, c, d\ldots$ diejenigen Strahlen des Punktes B_1, welche nach den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$... gehen, so ist

$$B_1\,(a_1, b_1, c_1, d_1\ldots) = B\,(a, b, c, d\ldots).$$

Nach §. 20. 2, müssen auch die den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$... entsprechenden Geraden durch die den Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1... entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$... gehen, und die den Strahlen $a, b, c, d\ldots$ estsprechenden Punkte auf den den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$... entsprechenden Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1.. liegen.

Je zwei Punkte einer Geraden, von denen ein jeder auf der dem anderen entsprechenden Geraden liegt, insofern immer nur der eine zu der anderen und der andere zu der anderen Ebene gerechnet wird, sollen zwei zugeordnete

Punkte jener Geraden; und je zwei Strahlen eines Punktes, von denen ein jeder nach dem anderen entsprechenden Punkte geht, wobei ebenfalls nicht beide Strahlen zu jeder Ebene gerechnet werden, sollen zwei zugeordnete Strahlen jenes Punktes heissen.

1. In zwei auf einander gelegten reciproken Ebenen bilden die zugeordneten

Punktenpaare einer jeden Geraden zwei in Ansehung derselben projektivische Gerade.	Strahlenpaare eines jeden Punktes zwei in Ansehung derselben projektivische Strahlbüschel.

Rechnet man einen Punkt zu beiden Ebenen zugleich, so entsprechen demselben im Allgemeinen zwei verschiedene Gerade, und dem Durchschnitte der letzteren auch zwei Gerade, welche ihrerseits den ersteren zum Durchschnitte haben; und ebenso entsprechen einer jeden Geraden zwei Punkte, und der Verbindungslinie der letzteren zwei andere Punkte, welche auf jener ersteren liegen. Zwei Punkte, von denen ein jeder der Durchschnitt der dem anderen in doppeltem Sinne entsprechenden Geraden ist, sollen zwei Wechselpunkte, und zwei Gerade, von denen eine jede die der anderen in doppeltem Sinne entsprechenden Punkte enthält, sollen zwei Wechselstrahlen beider Ebenen heissen. Je zwei Wechselpunkte und Wechselstrahlen sind also in doppeltem Sinne zugeordnete Punkte und Strahlen. Denkt man sich nun die zugeordneten Punktenpaare einer Geraden, welche irgend zwei Wechselpunkte mit einander verbindet, so müssen dieselben, weil in den projektivischen Geraden, die sie bilden, ein einziges Paar sich in doppeltem Sinne entsprechen, eine Involution von Punkten bilden, und desshalb je zwei zugeordnete Punkte dieser Geraden Wechselpunkte beider Ebenen sein u. s. w.

2. Je zwei zugeordnete Punkte einer Geraden sind Wechselpunkte beider Ebenen, sobald diess von einem einzigen Paare solcher Punkte gilt; und dann bilden sie eine Involution von Punkten.	2. Je zwei zugeordnete Strahlen eines Punktes sind Wechselstrahlen beider Ebenen, sobald diess von einem einzigen Paare solcher Strahlen gilt; und dann bilden sie eine Involution von Strahlen.

Denkt man sich zwei Gerade a, b, deren jede zwei Wechselpunkte verbindet, und ist p ihr Durchschnittspunkt, ferner P die Gerade, welche dem Punkte p entspricht, insofern derselbe zu $\mathfrak{E}_1$ gerechnet wird, endlich $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ die Punkte, wo die Geraden a, b von P geschnitten werden, so sind nach dem vorigen Satze sowohl p und $\mathfrak{a}$, als auch p und $\mathfrak{b}$ Wechselpunkte, d. h. rechnet man p zur Ebene $\mathfrak{E}$, so geht die entsprechende Gerade von p ebenfalls durch die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Der Punkt p ist also ein solcher Punkt beider Ebenen, welchem ein und dieselbe Gerade P entspricht, es mag derselbe zu der einen oder zur anderen Ebene gerechnet werden. Ist nun c irgend eine dritte Gerade, welche zwei Wechselpunkte verbindet, und ist $\mathfrak{c}$ ihr Durchschnitt mit P, so liegt der Wechselpunkt von $\mathfrak{c}$ auf c; aber die Geraden, welche

dem Punkte c in dem einen und dem anderen Sinne entsprechen, gehen beide durch p, d. h. p ist der Wechselpunkt von c; also geht die Gerade c durch p. Gäbe es nun noch einen Punkt von derselben Eigenschaft als p, so würden die Geraden $a, b, c \ldots$ auch durch diesen gehen, was unmöglich ist.

3. In zwei auf einander gelegten reciproken Ebenen gehen sämmtliche Geraden, wovon jede zwei Wechselpunkte verbindet, durch einen und denselben Punkt, und diesem Punkte entsprechen in beiden Ebenen zwei Gerade, welche mit einander zusammenfallen. Es gibt aber nur einen Punkt, welcher diese beiden Eigenschaften zugleich besitzt.

liegen die Durchschnitte je zweier Wechselstrahlen auf einer und derselben Geraden, und dieser Geraden entsprechen in beiden Ebenen zwei Punkte, welche sich mit einander vereinigen. Es gibt aber nur eine Gerade, welche diese beiden Eigenschaften zugleich besitzt.

Da die Gerade, welche die Mittelpunkte M, M_1 beider Ebenen verbindet, der Wechselstrahl der unendlich entfernten Geraden ist, so folgt aus dem vorigen Satze rechts:

4. Diejenige Gerade, welche die Mittelpunkte beider Ebenen mit einander verbindet, läuft mit derjenigen parallel, deren entsprechende Punkte sich vereinigen.

Es sei A irgend eine Gerade, und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$ seien ihre Punkte; in $\mathfrak{E}$ liegend vorgestellt, entspreche ihr der Punkt B_1, in $\mathfrak{E}_1$ liegend, der Punkt B, und ebenso den Punkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$ einerseits die Strahlen $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots$ von B_1, andererseits die Strahlen $a, b, c, d \ldots$ von B. Dann sind die Durchschnitte von a, a_1; b, b_1; c, c_1; $d, d_1 \ldots$ die Wechselpunkte von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$, und da

$$B(a, b, c, d \ldots) = A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots),$$

so ist auch

$$B(a, b, c, d \ldots) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots);$$

d. h. diese Durchschnitte sammt den Punkten B, B_1 liegen auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$. Und da der oben mit p bezeichnete Punkt der Wechselpunkt des Durchschnittes von A und P ist, oder auch, weil die Geraden $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$, welche p mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$ verbinden, durch die Wechselpunkte der letzteren gehen, und

$$B(a, b, c, d \ldots) = A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots) \equiv p(\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots),$$

also

$$B(a, b, c, d \ldots) = p(\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots)$$

ist, so liegt auch p auf $\mathfrak{K}$. In den Strahlbüscheln p, B entspricht demjenigen Strahle von p, welcher nach dem Durchschnitte von A und P geht, der beiden gemeinschaftliche Strahl Bp; also berührt ersterer den $\mathfrak{K}$ im Punkte p.

Durch ein analoges Räsonnement gelangt man zur rechten Seite des folgenden Doppelsatzes, worin wir der Kürze wegen den Punkt p den Pol und die Gerade P die Polare der beiden Ebenen nennen wollen:

5. In zwei auf einander gelegten reciproken Ebenen

liegen die sämmtlichen Punkte, deren Wechselpunkte einer und derselben Geraden angehören, auf dem Umfange eines Kegelschnitts, welcher auch die beiden, dieser Geraden entsprechenden Punkte enthält und im Pole der beiden Ebenen diejenige Gerade berührt, welche nach dem Durchschnitte jener Geraden und der Polare der beiden Ebenen gerichtet ist.

umhüllen die sämmtlichen Geraden, deren Wechselstrahlen einem und demselben Punkte angehören, einen Kegelschnitt, welcher auch die beiden, diesem Punkte entsprechenden Geraden, und ausserdem die Polare der beiden Ebenen in demjenigen Punkte berührt, welcher mit jenem ersteren Punkte und dem Pole der beiden Ebenen in gerader Linie liegt.

Der Kegelschnitt, welcher die Wechselpunkte der Punkte einer Geraden enthält, soll der Wechselpunkt-Kegelschnitt dieser Geraden, und derjenige, welcher von den Wechselstrahlen der Strahlen eines Punktes umhüllt wird, soll der Wechselstrahlen-Kegelschnitt dieses Punktes — in Bezug auf die reciproken Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ — genannt werden.

Die Anwendung, welche wir von dem vorigen Satze machen werden, erfordert noch folgende anderweitige Betrachtung. Es sei K irgend ein Kegelschnitt, p ein beliebiger Punkt und P die harmonische Polare von p in Bezug auf K; ferner seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ die Strahlen von p, welche K in den Punktenpaaren a_0, α_0; b_0, β_0; c_0, γ_0; $d_0, \delta_0 \ldots$ und eine beliebige Gerade A in $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$ schneiden; endlich seien $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots$ die harmonischen Polaren der Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$, welche die Strahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ resp. in den Punkten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots$ schneiden, und $a, b, c, d \ldots$ die Geraden, welche $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$ mit dem harmonischen Pole B von A verbinden. Diess vorausgesetzt, so sind je zwei Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_1$; $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1 \ldots$ resp. mit a_0, α_0; b_0, β_0; c_0, γ_0; $d_0, \delta_0 \ldots$ harmonisch, und die Strahlenpaare a, a_1; b, b_1; c, c_1; $d, d_1 \ldots$, als zugeordnete harmonische Polaren des Punktes B für K, bilden eine Involution; also hat man

$$p(\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots) \equiv A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots) \equiv B(a, b, c, d \ldots)$$
$$= B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots),$$

und folglich

$$p(\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots),$$

d. h. die Punkte $a, b, c, d \ldots$ nebst p und B liegen auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1$. Da die Gerade, welche die Punkte B und p verbindet, die harmonischen Pole von A und P enthält, also die harmonische Polare des Durchschnittspunktes von A und P ist, so muss derselben im Strahlbüschel p der nach diesem letzteren Punkte gehende Strahl entsprechen, dieser Strahl also den Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$ in p berühren. Nach gehöriger Berücksichtigung der anderen Seite erhält man also folgenden Doppelsatz:

6. Ist irgend ein Kegelschnitt und ist in der Ebene desselben irgend ein Punkt und irgend eine Gerade gegeben, und bestimmt man auf jedem Strahle dieses Punktes denjenigen Punkt, welcher zu den beiden Durchschnitten des Kegelschnittes und dem Durchschnitte jener Geraden der vierte harmonische, dem letzteren zugeordnete Punkt, oder, um umfassender zu reden, welcher der dem Durchschnite jener Geraden zugeordnete harmonische Pol in Bezug auf den Kegelschnitt ist, so gehören alle diese Punkte einem neuen Kegelschnitte an, welcher auch den harmonischen Pol der gegebenen Geraden enthält, und in dem gegebenen Punkte diejenige Gerade berührt, die nach dem Durchschnitte der gegebenen Geraden und der harmonischen Polare des gegebenen Punktes gerichtet ist.

6. Ist irgend ein Kegelschnitt und in der Ebene desselben irgend eine Gerade und irgend ein Strahlbüschel gegeben, und bestimmt man für jeden Punkt dieser Geraden denjenigen Strahl desselben, welcher mit den beiden an den Kegelschnitt gehenden Tangenten und mit dem jenem Strahlbüschel angehörigen Strahle harmonisch und zwar dem letzteren zugeordnet ist, oder, um umfassender zu reden, welcher die diesem letzteren Strahle zugeordnete harmonische Polare in Bezug auf den Kegelschnitt ist, so umhüllen alle diese Strahlen einen neuen Kegelschnitt, welcher auch die harmonische Polare des Mittelpunktes des gegebenen Strahlbüschels, und die gegebene Gerade in demjenigen Punkte berührt, der mit diesem Mittelpunkte und dem harmonischen Pole der gegebenen Geraden in gerader Linie liegt.

Ein besonderer Fall der linken Seite dieses Satzes ist, wenn die gegebene Gerade unendlich entfernt ist, oder der zu bestimmende Punkt in der Mitte der jedesmaligen Sehne liegen soll.

7. In zwei auf einander gelegten reciproken Ebenen

auf einer beliebig gegebenen Geraden einen Punkt zu finden, dessen entsprechende Geraden durch diesen Punkt selber gehen.

in einem beliebig gegebenen Strahlbüschel einen Strahl zu finden, dessen entsprechende Punkte auf diesem Strahle selber liegen.

Auflösung. Zu drei beliebigen Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ der gegebenen Geraden A suche man die entsprechenden Geraden a_1, b_1, c_1, welche A in den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ schneiden; denke sich zwei projektivische Gerade A, A_1, wovon $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ drei Paar entsprechende Punkte sind, und suche diejenigen zwei Punkte $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$, $(\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1)$ von A, A_1, in deren jedem sich zwei entsprechende vereinigen, so hat jeder von beiden die verlangte Eigenschaft.

Auflösung. Zu drei beliebigen Strahlen a, b, c des gegebenen Strahlbüschels B suche man die entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ und verbinde sie mit B durch a_1, b_1, c_1; denke sich zwei projektivische Strahlbüschel B, B_1, wovon a, b, c und a_1, b_1, c_1 drei Paar entsprechende Strahlen sind, und suche diejenigen zwei Strahlen (ee_1), (ff_1) von B, B_1, in deren jedem sich zwei entsprechende vereinigen; so hat jeder von beiden die verlangte Eigenschaft.

Beweis (links). Denn sind e_1, f_1 die entsprechenden Geraden von $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, und schneiden sie die A (A_1) in ε_1, φ_1, so hat man nach §. 21. γ.:

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}\ldots) = B_1(a_1, b_1, c_1, e_1, f_1\ldots) \equiv A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \varepsilon_1, \varphi_1\ldots);$$

also

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}\ldots) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \varepsilon_1, \varphi_1\ldots).$$

Aber nach der Konstruktion ist

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}\ldots) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{f}_1\ldots),$$

also auch

$$A(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \varepsilon_1, \varphi_1\ldots) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{f}_1\ldots),$$

und da zwei projektivische Gebilde durch drei Paar entsprechende Elemente bestimmt sind, so fallen $\mathfrak{c}_1$ und ε_1, φ_1 und $\mathfrak{f}_1$ zusammen.

Sind die Punktenreihen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ ungleichliegend, so gibt es bekanntlich allemal zwei Punkte $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$, $(\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1)$; sind sie dagegen gleichliegend, so gibt es entweder zwei, oder nur einen, oder auch keinen solchen Punkt. Ist aber in der Ebene $(\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1)$ ein einziger solcher Punkt $(\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1)$ vorhanden, so gibt es auf jedem Strahle desselben im Allgemeinen nothwendig einen zweiten $(\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1)$, und somit unzählig viele in der Ebene.

8. Ist in zwei auf einander gelegten reciproken Ebenen ein einziger Punkt vorhanden, dessen entsprechende Geraden durch ihn selber gehen, oder eine einzige Gerade, deren entsprechende Punkte auf ihr selber liegen, so gibt es im Allgemeinen unzählig viele solche Punkte und Gerade.

Auf drei beliebigen Strahlen α, β, γ des Punktes p seien $\mathfrak{a}_0$, α_0; $\mathfrak{b}_0$, β_0; $\mathfrak{c}_0$, γ_0 drei solche Punktenpaare, deren entsprechende Geraden durch die betreffenden Punkte selber gehen; so sind jedes Paar die Hauptpunkte derjenigen Involution, welche

von den Wechselpunkten der betreffenden Geraden gebildet wird, also mit je zwei Wechselpunkten, z. B. mit p und dem der Geraden P angehörigen Punkte harmonisch. Denkt man sich also durch die fünf Punkte $\mathfrak{a}_0$, α_0, $\mathfrak{b}_0$, β_0, $\mathfrak{c}_0$ einen Kegelschnitt K gelegt, so ist P, die Polare der beiden Ebenen, zugleich die harmonische Polare des Poles p der beiden Ebenen in Bezug auf K, und folglich liegt auch der Punkt γ_0 auf K. Denkt man sich ferner eine beliebige Gerade A und einerseits den Wechselpunkt-Kegelschnitt von A, welcher die Strahlen α, β, γ, δ... von p in den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$... schneidet, andererseits auf jedem dieser Strahlen denjenigen Punkt bestimmt, welcher zu den beiden Durchschnitten $\mathfrak{a}_0$, α_0; $\mathfrak{b}_0$, β_0; $\mathfrak{c}_0$, γ_0; $\mathfrak{d}_0$, δ_0... des Kegelschnittes K und zu dem Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$... der Geraden A der vierte harmonische, dem letzteren zugeordnete Punkt ist, so liegen alle diese Punkte nach Lehrsatz 6. auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1$, welcher im Punkte p diejenige Gerade berührt, die nach dem Durchschnitte von A und P gerichtet ist. Nun aber sind auch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_0$, α_0; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_0$, β_0; $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_0$, γ_0 harmonisch; also haben die Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ vier Punkte p, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ gemein; zugleich aber auch die Tangente in p (5.), also fallen sie zusammen. Denkt man sich also auf einem beliebigen vierten Strahle δ von p zwei Punkte, deren entsprechende Geraden durch sie selber gehen, so sind nicht nur diese, sondern auch die Punkte $\mathfrak{d}_0$, δ_0 des Kegelschnittes K sowohl mit $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$ als auch mit p und dem der P angehörigen Punkte harmonisch; jene beide ersteren fallen also mit $\mathfrak{d}_0$, δ_0 zusammen. Wiederholt man endlich dieses ganze Räsonnement auf der Seite rechts, so erhält man zunächst folgenden Doppelsatz:

9. In zwei auf einander gelegten reciproken Ebenen

liegen sämmtliche Punkte, deren entsprechende Geraden durch sie selber gehen, auf dem Umfange eines einzigen Kegelschnittes, für welchen der Pol der beiden Ebenen der harmonische Pol der Polare der beiden Ebenen ist, und je zwei Wechselpunkte der beiden Ebenen zwei zugeordnete harmonische Pole sind.

umhüllen sämmtliche Gerade, deren entsprechende Punkte auf ihnen selber liegen, einen einzigen Kegelschnitt, für welchen die Polare der beiden Ebenen zugleich die harmonische Polare des Pols der beiden Ebenen ist, und je zwei Wechselstrahlen der beiden Ebenen zwei zugeordnete harmonische Polaren sind.

Jeder Mittelpunkt der beiden Ebenen hat offenbar einen unendlich entfernten Punkt zum Wechselpunkte, nämlich denjenigen der Geraden, welche ihn mit dem Punkte p verbindet; also läuft die harmonische Polare des einen, M, in Bezug auf den Kegelschnitt K (links) mit der Geraden pM, und die des anderen, M_1, mit der Geraden M_1p parallel; da nun pM und pM_1 selber mit einander nicht parallel sind, so kann die Gerade MM_1, welche man die Mittellinie der beiden Ebenen nennen kann, nicht durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes K (links) gehen. Dagegen geht dieselbe nothwendig durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes K (rechts), indem ihr Wechselstrahl die unendlich entfernte Gerade ist, folglich auch der harmonische Pol dieser

letzteren in Bezug auf diesen Kegelschnitt der ersteren angehören muss.

10. Die Mittellinie der beiden Ebenen geht durch den Mittelpunkt desjenigen Kegelschnittes, dessen Tangenten durch die ihnen selbst entsprechenden Punkte gehen, und nur dann auch durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes, der diese Punkte enthält, wenn der Pol der beiden Ebenen unendlich entfernt ist, oder die Mittellinie mit der Polare der beiden Ebenen zusammenfällt.

In Taf. II. Fig. 12. sei $\mathfrak{K}$ derjenige Kegelschnitt, dessen Punkte auf ihren entsprechenden Geraden liegen, und K derjenige, welcher von diesen letzteren umhüllt wird; so wird, wenn irgend zwei Tangenten von K mit a, b oder c_1, d_1 bezeichnet werden, jenachdem sie in $\mathfrak{E}$ oder in $\mathfrak{E}_1$ liegen sollen, und nun den a und b die Punkte $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}_1$ von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{E}_1$ entsprechen, der der c_1 entsprechende Punkt $\mathfrak{c}$ auf a, und der der d_1 entsprechende Punkt $\mathfrak{d}$ auf b liegen, und also der andere Durchschnitt dieser Tangente mit $\mathfrak{K}$ sein müssen. Dem Durchschnitte $\mathfrak{s}$ von a und b entspricht also die Gerade $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, und dem Durchschnitte t_1 von c_1 und d_1 entspricht die Gerade $\mathfrak{cd}$; folglich ist der Durchschnitt $(\mathfrak{s}_1\mathfrak{t})$ von $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{cd}$ der Wechselpunkt von $(\mathfrak{s}\mathfrak{t}_1)$, und beide liegen mit dem Pole p beider Ebenen in gerader Linie. Man denke sich $\mathfrak{a}_1$ mit $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}_1$ mit $\mathfrak{c}$ durch zwei Gerade verbunden, welche sich im Punkte $\mathfrak{q}$ schneiden, und von diesem Punkte und dem Punkte p nach $(\mathfrak{s}\mathfrak{t}_1)$ die Geraden g, h gezogen; so ist h die harmonische Polare des Punktes $\mathfrak{q}$ in Bezug auf $\mathfrak{K}$, folglich, da h durch den Punkt p geht, liegt $\mathfrak{q}$ auf der Polare P beider Ebenen, welche die harmonische Polare von p für $\mathfrak{K}$ ist. — Die Geraden g, h sind mit den Tangenten a, b harmonisch, also zwei zugeordnete harmonische Polaren in Bezug auf K, d. h. der harmonische Pol von h für K liegt auf g; derselbe liegt aber auch auf P, welche auch für K die harmonische Polare von p ist; demnach ist $\mathfrak{q}$ der harmonische Pol von h nicht nur in Bezug auf $\mathfrak{K}$, sondern auch auf K; und es gibt somit auf der Linie P unzählige Punktenpaare $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, welche in Bezug auf $\mathfrak{K}$ und K zugleich zugeordnete harmonische Pole sind. Die Polare der beiden Ebenen ist also eine reelle oder ideale gemeinschaftliche Sekante von $\mathfrak{K}$ und K, und ebenso zeigt man, dass der Pol der beiden Ebenen ein reeller oder idealer gemeinschaftlicher Tangentendurchschnitt derselben ist. Haben aber irgend ein System von Kegelschnitten eine reelle oder ideale Sekante P gemein, welche zugleich in Bezug auf alle die harmonische Polare eines und desselben Punktes p ist, so sage ich, diese Kegelschnitte haben längs der Geraden P eine reelle oder ideale doppelte Berührung.

11. In zwei auf einander gelegten reciproken Ebenen gibt es im Allgemeinen zwei sich entsprechende Kegelschnitte, welche längs der Polare beider Ebenen als Berührungssehne, und unter dem Pole beider Ebenen, als Berührungspole, eine reelle oder ideale doppelte Berührung haben, und die Eigenthümlichkeit dem ent-

$$Z = f(x_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$$

darzustellen.

Verbinden wir den Halbirungspunkt K der Sehne so liegt, wie man leicht einsehen wird, der Mittelpunkt in der Verlängerung dieser Linie AK. Dasselbe gilt von BS, welche durch den Halbirungspunkt der Sehne worden ist; daher wird sich der Mittelpunkt O der Durchschnitt dieser beiden Geraden ergeben.

Die Gerade AK geht durch die Punkte

$$x = 0 \qquad x = \frac{x_1 + x_3}{2}$$

und

$$y = 0 \qquad y = \frac{y_3}{2};$$

daher ist ihre Gleichung

$$y = \frac{y_3}{x_1 + x_3} \cdot x. \quad \ldots \ldots$$

Ebenso ergibt sich für die Gerade BS, d Punkte

$$x = c \qquad x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

und

$$y = 0 \qquad y = \frac{y_2}{2}$$

geht, die Gleichung

$$y = \frac{y_2}{x_1 + x_2 - 2c}(x - c). \quad \ldots$$

Aus der Verbindung der Gleichungen (1) und die Coordinaten des Durchschnittspunktes O:

$$\begin{cases} x = \dfrac{c\, y_2 (x_1 + x_3)}{y_2 (x_1 + x_3) - y_3 (x_1 + x_2 - 2c)} \\ y = \dfrac{c\, y_2 y_3}{y_2 (x_1 + x_2) - y_3 (x_1 + x_2 - 2c)} \end{cases}$$

Ferner finden wir leicht:

$$\begin{cases} AO = \dfrac{c\, y_2}{\frac{1}{2}(x_1 + x_3) - y_3 (x_1 + x_2 - 2c)} \sqrt{y_3^2 + (x_1 + x_3)^2} \\ AK = \frac{1}{2}\sqrt{y_3^2 + (x_1 + x_3)^2} \\ OK = \left(\dfrac{c\, y_2}{y_2 (x_1 + x_3) - y_3 (x_1 + x_2 - 2c)} - \frac{1}{2} \right) \sqrt{y_3^2 + (x_1 \\ MK = \frac{1}{2}\sqrt{y_3^2 + (x_1 - x_3)^2} \end{cases}$$

Hätte man den Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ gleich anfangs durch Drehung der einen eine andere Lage zu einander gegeben, und sodann die eine um die neue Achse A herumgewendet, so würde man gleichwohl wieder dieselbe Lage der Ebene $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ wie vorhin erhalten haben, weil beidemale die ungleichnamigen Schenkel der entsprechenden rechten Winkel in den Strahlbüscheln der zugeordneten Durchmesser zusammenfallen müssen, und es nur zwei solche rechte Winkel geben kann; es sei denn, dass man die andere Achse B statt A zur Umwendungsachse nähme.

Diess ergibt sich mit mehr Klarheit und Einfachheit, wenn wir die Sache unabhängig von den Kegelschnitten K, $\mathfrak{K}$ betrachten. Es seien die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ beliebig concentrisch gelegt: die Winkel st (Taf. II. Fig. 14.) und s_1t_1 seien die von zwei Paar zugeordneten Durchmessern s, s_1 und t, t_1 gebildeten rechten Winkel; so kann man die Ebenen zweimal durch Drehung und wiederum zweimal durch Umwendung so legen, dass die Durchmesser s und t_1, t und s_1 auf einander fallen; durch Drehung nämlich, indem man die Ebene $\mathfrak{E}_1$ entweder um den spitzen Winkel st_1 rechts herum, oder um das Supplement dieses Winkels links herum dreht; und durch Umwendung, indem man die Ebene $\mathfrak{E}_1$ entweder um die Gerade A, welche den spitzen Winkel st_1 hälftet, oder um die auf A senkrechte Gerade B wendet. In einer jeden von diesen vier Lagen erhalten auch je zwei entsprechende Elemente beider Ebenen eine verschiedene Lage zu einander; ausserdem aber gibt es keine fünfte.

Liegen die zugeordneten Durchmesser [illegible]er Affi[illegible]ts involutorisch, so kann man sich zur Umwendung d[illegible]e der [illegible]att der Geraden A, B der Durchmesser s, t selber b[illegible]ene[illegible]8. ind nun a, a_1 irgend zwei Wechselpunkte von s. und dreht [illegible]an [illegible]ie Ebene $\mathfrak{E}_1$ um 180°, so bilden auch jetzt die Punkte a, a_1 in ihrer neuen Lage zwei Wechselpunkte, dieselben schliessen aber den Mittelpunkt M der von den Wechselpunkten gebildeten Involution ein oder aus, jenachdem sie ihn vorher aus- oder einschlossen; und zwar gilt diess zugleich dann auch von je zwei Wechselpunkten des Durchmessers t. Wendet man dagegen die eine Ebene um den Durchmesser t herum, so tritt nur auf s jener Unterschied der Lage ein. Nun aber sind die Hauptpunkte der genannten Involution allemal zwei Punkte des in Rede stehenden Kegelschnitts, und sie existiren oder nicht, jenachdem der Mittelpunkt der Involution ausserhalb oder zwischen je zwei zugeordneten Punkten liegt; ferner ist es klar, dass je zwei zugeordnete Durchmesser der beiden Ebenen jetzt zugleich zugeordnete Durchmesser des Kegelschnittes sind, und solche zwei Durchmesser schneiden denselben entweder alle beide, oder nur der eine von beiden; also kann man mit vollkommener Sicherheit schliessen:

15. Werden zwei reciproke Ebenen dergestalt auf einander gelegt, dass ihre zugeordneten Durchmesserpaare eine Involution von Strahlen bilden, *a*) so gehören die sämmtlichen Punkte, welche auf ihren entsprechenden Geraden liegen, dem Umfange eines Kegelschnittes an, welcher diese Geraden in jenen Punkten berührt. *b*) Dreht man nun die eine Ebene um einen Winkel von zwei Rechten um ihren gemeinsamen

wo der Kürze wegen

$$y_2(x_1+x_3)-y_3(x_1+x_2-2c)=N$$

gesetzt ist.

§. 2.

In dieser Formel für Z kommen vor die Grössen: x_1, x_2, y_2, x_3, y_3. Da aber der Inhalt der Ellipse bestimmt wird durch zwei beliebige, jedoch von einander unabhängige von diesen fünf Grössen, weil die Lage und Gestalt einer in ein gegebenes Dreieck zu beschreibenden Ellipse schon durch zwei Berührungspunkte vollkommen determinirt ist, so kommt es jetzt darauf an, Z als Function von zwei independenten Variabeln, etwa $Z=f(x_1, y_2)$ darzustellen. Hierzu sind drei neue Gleichungen zwischen jenen fünf Grössen erforderlich, welche man, wie folgt, erhält.

Verbinden wir A, B, C mit den gegenüberliegenden Berührungspunkten N, Q, M der Ellipse, so schneiden sich diese drei Verbindungslinien nach einem bekannten Satze in einem Punkte, und man hat die Relation:

$$AM.QC.BN=AQ.CN.BM,$$

d. i.

$$x_1(b-x_3\sec\alpha)\frac{y_2}{\sin\beta}=x_3\sec\alpha\,(a-\frac{y_2}{\sin\beta})(x-x_1) \quad \ldots (10)$$

Ausserdem haben wir noch:

$$\left\{\begin{array}{l} y_3=x_3\,\mathrm{tang}\,\alpha \\ y_2=(c-x_2)\,\mathrm{tang}\,\beta \end{array}\right\} \ldots\ldots (11)$$

Aus (10) ergibt sich:

$$x_3=\frac{b\,x_1\,y_2\cos\alpha}{(2x_1-c)\,y_2+a\,(c-x_1)\sin\beta} \ldots\ldots (12)$$

daher aus (11):

$$y_3=\frac{b\,x_1\,y_2\sin\alpha}{(2x_1-c)\,y_2+a\,(c-x_1)\sin\beta} \ldots\ldots (13)$$

$$x_2=c-y_2\,\mathrm{cotg}\,\beta. \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Indem wir die Werthe für x_2, x_3, y_3 aus (12), (13), (14) in (9) substituiren, erhalten wir:

$$Z=\tfrac{1}{2}b\pi c\sin\alpha\,\frac{U^2}{W^2}(c-x_1)y_2 \ldots\ldots (15)$$

wo $U=bx_1\sin\alpha-x_1y_2$ und $W=x_1y_2+b\sin\alpha(c-x_1)$.

§. 3.

Damit nun dieser Ausdruck ein Maximum werde, müssen die Gleichungen bestehen:

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x_1}\right)=0,\ \left(\frac{\partial Z}{\partial y_2}\right)=0;$$

d. i. nach gehöriger Entwickelung:

$$\tfrac{1}{2}bc\pi\sin\alpha\left[(c-x_1)y_2.\tfrac{1}{2}\frac{U^{-\frac{1}{2}}}{W^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)-\frac{U^{\frac{1}{2}}}{W^{\frac{1}{2}}}.y_2-\tfrac{3}{2}\frac{U^{\frac{1}{2}}}{W^{\frac{3}{2}}}(c-x_1)y_2\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)\right]=0,$$

$$\tfrac{1}{2}bc\pi\sin\alpha(c-x_1)\left[\frac{U^{\frac{1}{2}}}{W^{\frac{1}{2}}}+\tfrac{1}{2}y_2\frac{U^{-\frac{1}{2}}}{W^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{\partial U}{\partial y_2}\right)-\tfrac{3}{2}y_2\frac{U^{\frac{1}{2}}}{W^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\partial W}{\partial y_2}\right)\right]=0;$$

oder einfacher:

$$(c-x_1)\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)-2U-3(c-x_1)\frac{U}{W}\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)=0,$$

$$2U+y_2\left(\frac{\partial U}{\partial y_2}\right)-3y_2\frac{U}{W}\left(\frac{\partial W}{\partial y_2}\right)=0.$$

Nun ist aber:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)=b\sin\alpha-y_2=\frac{U}{x_1}\text{ und }\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)=y_2-b\sin\alpha=-\frac{U}{x_1},$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y_2}\right)=-x_1\text{ und }\left(\frac{\partial W}{\partial y_2}\right)=x_1.$$

Daher lässt sich die erste der beiden gefundenen Bedingungsgleichungen durch U, die andere durch x_1 dividiren, und man erhält, sobald mit W multiplicirt worden ist, die Gleichungen

$$2x_1y_2-b(c-x_1)\sin\alpha=0,$$

$$2x_1y_2+2b(c-x_1)\sin\alpha=3cy_2.$$

Wird die erste mit 2 multiplicirt und zur andern addirt, so ergibt sich sofort

$$x_1=\frac{c}{2};$$

alsdann ist

$$y_2=\frac{a}{2}\sin\beta=\frac{b}{2}\sin\alpha;$$

daher aus (14): $x_2 = c - \frac{a}{2}\cos\beta$,

„ (13): $y_3 = \frac{b}{2}\sin\alpha$,

„ (12): $x_3 = \frac{b}{2}\cos\beta$.

Wir haben somit das interessante Resultat gefunden, dass die grösste Ellipse, die in ein Dreieck beschrieben werden kann, die Seiten desselben in ihren Mitten berührt, und dass ihr Mittelpunkt in Folge dessen mit dem Schwerpunkte des Dreiecks zusammenfällt.

Der Inhalt dieser Ellipse selbst ergibt sich aus (15), indem man für x_1 und y_2 die oben gefundenen Werthe substituirt, als:

$$J = \frac{1}{6\sqrt{3}}\, b\, c\, \pi \sin\alpha.$$

Der Inhalt des Dreiecks ABC ist aber $= \frac{b.c}{2}\sin\alpha$. Daher besteht die Proportion:

$$\text{Dreieck} : \text{Ellipse} = \frac{b.c}{2}\sin\alpha : \frac{1}{6\sqrt{3}}\, b.c.\pi\sin\alpha$$
$$= 3\sqrt{3} : \pi \text{ *)}.$$

---

*) Ueber die Bestimmung der grössten in ein gegebenes Viereck zu beschreibenden Ellipse, womit die in dem obigen Aufsatze aufgelöste Aufgabe begreiflicherweise nahe zusammenhängt, da ein Viereck in ein Dreieck übergeht, wenn man eine Seite desselben verschwinden läßt, s. m. eine treffliche Abhandlung von Gauss in der monatlichen Correspondenz. Band XXII. S. 112. und Aufsätze von Pfaff, Mollweide und Schumacher ebendas. S. 223., S. 227. und S. 507.; auch eine Abhandlung von mir in dem ersten Theile meiner Beiträge zur reinen und angewandten Mathematik. Brandenburg. 1838. 4. G.

V.

Auflösung der quadratischen Gleichungen mit imaginären Coefficienten.

Von

dem Herausgeber.

Zur Uebung der Anfänger in der Rechnung mit imaginären Grössen scheint mir folgende Auflösung der quadratischen Gleichungen mit imaginären Coefficienten, die ich dem Wesentlichen nach aus den Exercices de Mathématiques par Cauchy. 4me et 41me Livr. p. 79. entlehne, recht zweckmässig zu sein.

Wir wollen zuerst die reine Gleichung des zweiten Grades

$$1) \qquad x^2 = a + b\sqrt{-1}$$

auflösen, wo a und b reelle Grössen bezeichnen, und setzen zu dem Ende

$$2) \qquad x = p + q\sqrt{-1},$$

wo p und q ebenfalls reelle Grössen bezeichnen. Führen wir diesen Ausdruck von x in die Gleichung 1) ein, so erhalten wir die Gleichung

$$3) \qquad p^2 - q^2 + 2pq\sqrt{-1} = a + b\sqrt{-1},$$

aus der sich zur Bestimmung der Grössen p und q die beiden folgenden Gleichungen ergeben:

$$4) \qquad p^2 - q^2 = a, \quad 2pq = b.$$

Wegen der zweiten dieser beiden Gleichungen und der Gleichung 2) hat man

$$5) \qquad x = p + \frac{b}{2p}\sqrt{-1}$$

oder

6) $$x = \frac{b}{2q} + q\sqrt{-1}.$$

Quadrirt man aber die beiden Gleichungen 4) und addirt dann zu einander, so erhält man

7) $$p^2 + q^2 = \sqrt{a^2+b^2},$$

wo natürlich, weil p^2+q^2 stets eine positive Grösse ist, die Quadratwurzel positiv genommen werden muss. Aus den beiden Gleichungen

$$p^2 - q^2 = a, \quad p^2 + q^2 = \sqrt{a^2+b^2}$$

ergiebt sich nun auf der Stelle durch Addition und Subtraction

8) $$p^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}, \quad q^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}.$$

Also ist

9) $$p = \pm\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad q = \pm\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

und nach 5) und 6) erhält man daher für x die beiden Werthe

10) $$x = \pm\left\{\frac{(\sqrt{a^2+b^2}+a)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{b}{2^{\frac{1}{2}}(\sqrt{a^2+b^2}+a)^{\frac{1}{2}}}\sqrt{-1}\right\},$$

oder

11) $$x = \pm\left\{\frac{b}{2^{\frac{1}{2}}(\sqrt{a^2+b^2}-a)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(\sqrt{a^2+b^2}-a)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}\sqrt{-1}\right\}.$$

Für $b=0$ und ein positives a liefert die Gleichung 10) beiden folgenden Werthe für x:

12) $$x = \pm a^{\frac{1}{2}}.$$

Für $b=0$ und ein negatives a liefert die Gleichung 11) beiden folgenden Werthe für x:

13) $$x = \pm(-a)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}.$$

Für $a=0$ und ein positives b liefern die Gleichungen 10) u 11) die beiden folgenden Werthe für x:

14) $$x = \pm\left\{\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right\}$$

oder

15) $$x = \pm \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (1 + \sqrt{-1}).$$

Für $a=0$ und ein negatives b liefern die Gleichungen 10) und 11) die beiden folgenden Werthe für x:

16) $$x = \pm \left\{(-\frac{b}{2})^{\frac{1}{2}} - (-\frac{b}{2})^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right\},$$

oder

17) $$x = \pm (-\frac{b}{2})^{\frac{1}{2}}(1 - \sqrt{-1}).$$

Man hat, um alles dieses richtig zu verstehen, nur stets festzuhalten, dass nach dem Obigen $\sqrt{a^2+b^2}$ jederzeit positiv zu nehmen ist.

Die zwei Wurzeln der Gleichung

18) $$x^2 = \sqrt{-1}$$

sind also nach 14) und 15):

19) $$x = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right)$$

oder

20) $$x = \pm \frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

Die zwei Wurzeln der Gleichung

21) $$x^2 = -\sqrt{-1}$$

sind dagegen nach 16) und 17):

22) $$x = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right)$$

oder

23) $$x = \pm \frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

Haben wir nun die Gleichung

24) $$x^2 + Ax + B = 0$$

aufzulösen, so lässt sich dieselbe bekanntlich auf die Form

25) $$(x + \frac{A}{2})^2 = \frac{A^2}{4} - B$$

bringen, und nun ganz wie die Gleichung 1) auflösen, welches wir durch das folgende Beispiel erläutern wollen.

Die gegebene Gleichung sei

$$26) \qquad x^2 - (5+4\sqrt{-1})\,x + 6 + 8\sqrt{-1} = 0,$$

so bringt man dieselbe zuerst leicht auf die Form

$$\left\{x - (\tfrac{5}{2} + 2\sqrt{-1})\right\}^2 = (\tfrac{5}{2} + 2\sqrt{-1})^2 - (6+8\sqrt{-1}),$$

d. i. auf die Form

$$\left\{x - (\tfrac{5}{2} + 2\sqrt{-1})\right\}^2 = -\tfrac{15}{4} + 2\sqrt{-1}.$$

Setzt man nun im Obigen $a = -\frac{15}{4}$, $b = 2$, so ist nach 10):

$$27) \qquad x - (\tfrac{5}{2} + 2\sqrt{-1}) = \pm(\tfrac{1}{2} + 2\sqrt{-1}),$$

und folglich

$$28) \qquad x = \tfrac{5}{2} + 2\sqrt{-1} \pm (\tfrac{1}{2} + 2\sqrt{-1}).$$

Also hat die Gleichung 26) die beiden folgenden Wurzeln:

$$29) \quad \begin{cases} x = \frac{5}{2} + 2\sqrt{-1} - (\frac{1}{2} + 2\sqrt{-1}) = 2, \\ x = \frac{5}{2} + 2\sqrt{-1} + (\frac{1}{2} + 2\sqrt{-1}) = 3 + 4\sqrt{-1}; \end{cases}$$

von denen die erste reell, die zweite imaginär ist.

Dieses Exempel ist deshalb lehrreich, weil man aus demselben sieht, dass eine quadratische Gleichung mit imaginären Coefficienten eine reelle und eine imaginäre Wurzel haben kann, da bekanntlich im Gegentheil die Wurzeln einer quadratischen Gleichung, deren Coefficienten beide reell sind, immer entweder beide reell, oder beide imaginär sind.

Eine ähnliche Ausführung für die cubischen Gleichungen mit imaginären Coefficienten wird eine gute Uebung für Schüler sein.

VI.

Verwandlung der irrationalen Grösse $\sqrt[3]{A}$ in einen Kettenbruch.

Von

Herrn P. Seeling,

Elementarlehrer zu Hückeswagen im Regierungsbezirk Düsseldorf.

---

§. 1.

Vermittelst der Kettenbrüche kann man aus unvollständigen Kuben die Wurzel ziehen. Dieses soll zuerst an einem Beispiele in Zahlen gezeigt und dann auch allgemein dargestellt werden.

Es sei $x = \sqrt[3]{10}$.

Die grösste in $\sqrt[3]{10}$ enthaltene ganze Zahl ist $=2$. Also ist

$$x = 2 + \frac{\sqrt[3]{10}-2}{1}.$$

Der Bruch $\frac{\sqrt[3]{10}-2}{1}$ ist kleiner als 1. Man setze denselben $= \frac{1}{x^1}$; so ist

$$x^1 = \frac{1}{\sqrt[3]{10}-2},$$

und zwar $x^1 > 1$. Um den Nenner rational zu machen, multiplizire man Zähler und Nenner dieses Bruches mit $\sqrt[3]{100}+2\sqrt[3]{10}+4$ [1]). Dann erhält derselbe die Form:

$$\frac{\sqrt[3]{100}+2\sqrt[3]{10}+4}{10-8} = \frac{\sqrt[3]{100}+2\sqrt[3]{10}+4}{2}.$$

---

1) Weil $(a-b).(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$.

$$x^{II} = \frac{11}{\sqrt[3]{361}+2\sqrt[3]{19}-7}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{361}+3\sqrt[3]{19}+1}{8} = 2+\left(\frac{\sqrt[3]{361}+3\sqrt[3]{19}-15}{8} = \frac{1}{x^{III}}\right),$$

$$x^{III} = \frac{8}{\sqrt[3]{361}+3\sqrt[3]{19}-15}$$

$$= \frac{3\sqrt[3]{361}+8\sqrt[3]{19}+21}{1} = 63+\left(\frac{3\sqrt[3]{361}+8\sqrt[3]{19}-42}{1} = \frac{1}{x^{IIII}}\right),$$

$$x^{IIII} = \frac{1}{3\sqrt[3]{361}+8\sqrt[3]{19}-42} = \frac{190\sqrt[3]{361}+507\sqrt[3]{19}+1308}{2843} = 1+ \text{ u. s. w.}$$

Die Näherungswerthe von $\sqrt[3]{19}$ werden demnach sein:

Kettenbruchsnenner: 2, 1, 2, 63, 1, u. s. w.

Näherungswerthe: $\frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{8}{3}, \frac{507}{190}, \frac{515}{193}$, u. s. w.

§. 3.

Obiges Verfahren soll nun allgemein dargestellt werden. Es sei A eine ganze Zahl, aber kein vollständiger Kubus. Ferner sei die grösste in $\sqrt[3]{A}$ enthaltene ganze Zahl $= a$. Dann ist

$$x = \sqrt[3]{A} = a + \frac{\sqrt[3]{A}-a}{1}.$$

Diesen Bruch setze man $= \frac{1}{x^I}$, so ist

$$x^I = \frac{1}{\sqrt[3]{A}-a} = \frac{\sqrt[3]{A^2}+a\sqrt[3]{A}+a^2}{A-a^3} \text{ (s. Anm. 1.).}$$

Man setze $A-a^3=b$, so ist

$$x^I = \frac{\sqrt[3]{A^2}+a\sqrt[3]{A}+a^2}{b}.$$

Die grösste hierin enthaltene ganze Zahl sei a^I, so ist

$$x^I = a^I + \frac{\sqrt[3]{A^2}+a\sqrt[3]{A}+a^2-a^Ib}{b},$$

oder, wenn man $a^I b - a^2 = c$ setzt,

$$x^I = a^I + \frac{\sqrt[3]{A^2} + a\sqrt[3]{A} - c}{b}.$$

Setzt man diesen Bruch $= \frac{1}{x^{II}}$, so ist

$$x^{II} = \frac{b}{\sqrt[3]{A^2} + a\sqrt[3]{A} - c} = \frac{b[(a^2+c)\sqrt[3]{A^2} + (A+ac)\sqrt[3]{A} + c^2 - aA]}{A^2 + a^3 A - c^3 + 3aAc}$$

(siehe Anmerkung 2.)

$$= \frac{b^2[a^I\sqrt[3]{A^2} + (aa^I+1)\sqrt[3]{A} + a^{I2}b - 2a^2a^I - a]}{b^2[-a^{I3}b + 3a^2a^{I2} + 3aa^I + 1]}$$

$$= \frac{a^I\sqrt[3]{A^2} + (aa^I+1)\sqrt[3]{A} + a^{I2}b - 2a^2a^I - a}{-a^{I3}b + 3a^2a^{I2} + 3aa^I + 1}$$

$$= \frac{a^I\sqrt[3]{A^2} + (aa^I+1)\sqrt[3]{A} + a^{I2}A - a(aa^I+1)^2}{(aa^I+1)^3 - a^{I3}A}.$$ [3])

Man setze $(aa^I+1)^3 - a^{I3}A = d$, so ist

$$x^{II} = \frac{a^I\sqrt[3]{A^2} + (aa^I+1)\sqrt[3]{A} + a^{I2}A - a(aa^I+1)^2}{d}.$$

Die grösste hierin enthaltene ganze Zahl sei a^{II}. Dann ist

$$x^{II} = a^{II} + \frac{a^I\sqrt[3]{A^2} + (aa^I+1)\sqrt[3]{A} + a^{I2}A - a(aa^I+1)^2 - a^{II}d}{d},$$

oder, wenn man $a^{II}d + a(aa^I+1)^2 - a^{I2}A = e$ setzt,

$$x^{II} = a^{II} + \frac{a^I\sqrt[3]{A^2} + (aa^I+1)\sqrt[3]{A} - e}{d}.$$

Setzt man diesen Bruch $= \frac{1}{x^{III}}$, so ist

---

3) Man wird sich von der Richtigkeit dieser und der folgenden Reductionen überzeugen, wenn man für die Grössen b, c, d, e nach einander ihre Werthe einsetzt.

$$x^{III} = \frac{d}{a^{I}\sqrt[3]{A^2} + (aa^{I}+1)\sqrt[3]{A} - e}$$

$$= \frac{d\{[(aa^{I}+1)^2 + a^{I}e]\sqrt[3]{A^2} + [a^{I2}A + e(aa^{I}+1)]\sqrt[3]{A} + e^2 - a^{I}(aa^{I}+1)A\}}{a^{I3}A^2 + (aa^{I}+1)^3 A - e^3 + 3a^{I}(aa^{I}+1)Ae} \quad \text{(s. Anm. 2)}$$

$$= \frac{d^2\{(a^{I}a^{II}+1)\sqrt[3]{A^2} + [(aa^{I}+1)a^{II}+a]\sqrt[3]{A} + a^{II2}d + 2a^{II}[a(aa^{I}+1)^2 - a^{I2}A] + a^3a^{I} + a^2 - a^{I}A\}}{d^2\{-a^{II3}d - 3a^{II2}[a(aa^{I}+1)^2 - a^{I2}A] - 3a^{II}(a^3a^{I} + a^2 - a^{I}A) + A - a^3\}}$$

$$= \frac{(a^{I}a^{II}+1)\sqrt[3]{A^2} + [(aa^{I}+1)a^{II}+a]\sqrt[3]{A} + a^{II2}d + 2a^{II}[a(aa^{I}+1)^2 - a^{I2}A] + a^3a^{I} + a^2 - a^{I}A}{-a^{II3}d - 3a^{II2}[a(aa^{I}+1)^2 - a^{I2}A] - 3a^{II}(a^3a^{I} + a^2 - a^{I}A) + A - a^3}$$

$$= \frac{(a^{I}a^{II}+1)\sqrt[3]{A^2} + [a^{II}(aa^{I}+1)+a]\sqrt[3]{A} + (aa^{I}+1).[a^{II}(aa^{I}+1)+a]^2 - a^{I}(a^{I}a^{II}+1)^2 A}{(a^{I}a^{II}+1)^3 A - [a^{II}(aa^{I}+1)+a]^3}$$

$$= a^{III} + \text{u. s. w.}$$

Fährt man auf diese Weise fort, die vollständigen Quotienten zu entwickeln, so wird man sie im Allgemeinen von der Form

$$x^{(n)} = \frac{Q\sqrt[3]{A^2} + P\sqrt[3]{A} + J}{D}$$

finden.

Die Grösse $\sqrt[3]{A}$ ist demnach gleich dem Kettenbruche:

$$a+\cfrac{1}{a^I+\cfrac{1}{a^{II}+\cfrac{1}{a^{III}+\cfrac{1}{a^{IIII}+\text{ u. s. w.}}}}}$$

Die Näherungswerthe dieses Kettenbruches sind:

Kettenbruchsnenner: $a,\ a^I,\ a^{II},\ a^{III}$, u. s. w.

Näherungswerthe: $\frac{1}{0},\ \frac{a}{1},\ \frac{aa^I+1}{a^I},\ \frac{a^{II}(aa^I+1)+a}{a^Ia^{II}+1}$, u. s. w.

§. 4.

Es seien

$$\frac{p}{q^0},\ \frac{p}{q},\ \frac{p^I}{q^I},\ \text{u. s. w.}$$

einige auf einander folgende Näherungswerthe von $\sqrt[3]{A}$. Die zu denselben gehörigen (sie ergänzenden) vollständigen Quotienten seien

$$\frac{Q^0\sqrt[3]{A}+P^0\sqrt[3]{A}+J^0}{D^0},\ \frac{Q\sqrt[3]{A^2}+P\sqrt[3]{A}+J}{D},\ \frac{Q^I\sqrt[3]{A^2}+P^I\sqrt[3]{A}+J^I}{D^I},\ \text{u. s. w.}$$

und die hierin steckenden grössten ganzen Zahlen: m^0, m, m^I, u. s. w. Dann ist

$$p^I=mp+p^0,\ q^I=mq+q^0;\ p^{II}=m^Ip^I+p,\ q^{II}=m^Iq^I+q;\ \text{u. s. w.}$$

Betrachtet man nun genau die Berechnung im vorhergehenden Paragraphen, so wie auch die gefundenen vollständigen Quotienten, und vergleicht man letztere mit den ebendaselbst berechneten Näherungswerthen für $\sqrt[3]{A}$, so findet man Folgendes:

1. Jeder vollständige Quotient lässt sich, nachdem man den Nenner rational gemacht und die nöthigen Reductionen vorgenommen, durch das Quadrat des früheren Zählers aufheben.

2. Es ist allgemein (so weit die Berechnung in §. 3. reicht) $Q=q$, $P=p$; J abwechselnd $=+(p^0p^2-q^0q^2A)$ und $-(p^0p^2-q^0q^2A)$; und D abwechselnd $=-(p^3-q^3A)$ und $+(p^3-q^3A)$; überhaupt

$$x^{(n)}=\frac{Q\sqrt[3]{A^2}+P\sqrt[3]{A}+J}{D}=\frac{q\sqrt[3]{A^2}+p\sqrt[3]{A}\pm(p^0p^2-q^0q^2A)}{\mp(p^3-q^3A)},$$

wobei die obern Zeichen für die Näherungsbrüche ungerader

Ordnung, und die untern für die Näherungsbrüche gerader Ordnung gelten, wenn man $\frac{a}{1}$ als den ersten Näherungsbruch ansieht.

Die Richtigkeit dieser beiden Sätze in Beziehung auf die 3 ersten vollständigen Quotienten geht aus der Berechnung in §. 3. hervor. Soll also ihre allgemeine Gültigkeit bewiesen werden, so ist nur noch darzuthun, dass, wenn sie für irgend einen beliebigen vollständigen Nenner gelten, dies auch für den nächstfolgenden der Fall ist; mit andern Worten: dass, wenn $\frac{p^0}{q^0}$, $\frac{p}{q}$, $\frac{p^1}{q^1}$ drei auf einander folgende Näherungswerthe für $\sqrt[3]{A}$ sind, und wenn der zu $\frac{p}{q}$ gehörige vollständige Quotient

$$x^{(n)} = \frac{q\sqrt[3]{A^2} + p\sqrt[3]{A} \pm (p^0p^2 - q^0q^2A)}{\mp (p^3 - q^3A)}$$

ist, alsdann der folgende, zu $\frac{p^1}{q^1}$ gehörige, vollständige Quotient

$$x^{(n+1)} = \frac{q^1\sqrt[3]{A^2} + p^1\sqrt[3]{A} \mp (pp^{12} - qq^{12}A)}{\pm (p^{13} - q^{13}A)}$$

ist. Dies soll im folgenden Paragraphen bewiesen werden.

§. 5

$$x^{(n)} = \frac{q\sqrt[3]{A^2} + p\sqrt[3]{A} \pm (p^0p^2 - q^0q^2A)}{\mp (p^3 - q^3A)}$$

$$= m + \left(\frac{q\sqrt[3]{A^2} + q\sqrt[3]{A} \pm (p^0p^2 - q^0q^2A) \pm m(p^3 - q^3A)}{\mp (p^3 - q^3A)} = \frac{1}{x^{(n+1)}} \right),$$

$$x^{(n+1)} = \frac{\mp (p^3 - q^3A)}{q\sqrt[3]{A^2} + p\sqrt[3]{A} \pm (p^0p^2 - q^0q^2A) \pm m(p^3 - q^3A)}.$$

Der Nenner dieses Bruches wird rational gemacht nach der Formel:

$$(a+b\pm c).(a^2+b^2+c^2-ab\mp ac\mp bc) = a^3+b^3\pm c^3\mp 3abc.$$

Man erhält dann:

$$x^{(n+1)} = \frac{\mp(p^3-q^3A)\,.\left\{\begin{array}{c}[p^2\mp q(p^0p^2-q^0q^2A+mp^3-mq^3A)]\sqrt[3]{A^2}+[q^2A\mp p(p^0p^2-q^0q^2A+mp^3-mq^3A)]\sqrt[3]{A}\\ +(p^0p^2-q^0q^2A+mp^3-mq^3A)^2-pqA\end{array}\right\}}{q^3A^2+p^3A\pm(p^0p^2-q^0q^2A+mp^3-mq^3A)^3\mp 3pqA(p^0p^2-q^0q^2A+mp^3-mq^3A)} \quad \ldots\ldots (Z)$$

Ehe wir zur Reduction dieses Bruches schreiten, bedenken wir, dass im vorliegenden Falle (siehe Egen's Handb. d. allgem. Arithm. Thl. I. §. 269.) $pq^0 - p^0q = \mp 1$. Daraus folgt:

1) $p^3q^0 - p^0p^2q = \mp p^2$
$p^3q^0 - p^0p^2q \pm p^2 = 0$
$p^2 \mp p^0p^2q = \mp p^3q^0$ . . . . . (A)

2) $pq^0q^2A - p^0q^3A = \mp q^2A$
$pq^0q^2A - p^0q^3A \pm q^2A = 0$
$q^2A \pm pq^0q^2A = \pm p^0q^3A$ . . . . . (B)

3) $p^2q^{0\,2} - 2p^0pq^0q + p^{0\,2}q^2 = +1$ . . . . . (I)
$-2p^0pq^0q - 1 = -p^2q^{0\,2} - p^{0\,2}q^2$
$-2p^0p^2q^0q^2A - pqA = -p^3q^{0\,2}qA - p^{0\,2}pq^3A$ . . . . . (C)

4) Aus (I) $2p^0pq^0q + 1 = p^2q^{0\,2} + p^{0\,2}q^2$ (mit $\mp 3mp^4qA$ multiplizirt)
$\mp 6mp^0p^5q^0q^2A \mp 3mp^4qA = \mp 3mp^6q^{0\,2}qA \mp 3mp^{0\,2}p^4q^3A$...(D)

5) $2p^0pq^0q + 1 = p^2q^{0\,2} + p^{0\,2}q^2$ (mit $\pm 3mpq^4A^2$ multiplizirt)
$\pm 6mp^0p^2q^0q^5A^2 \pm 3mpq^4A^2 = \pm 3mp^3q^{0\,2}q^4A^2 \pm 3mp^{0\,2}pq^6A^2$...(E)

6) $p^3q^{0\,3} - 3p^0p^2q^{0\,2}q + 3p^{0\,2}pq^0q^2 - p^{0\,3}q^3 = \mp 1$ . . . . . (II)
(I) mit $3p^0q$ multiplizirt, gibt:
$3p^0p^2q^{0\,2}q - 6p^{0\,2}pq^0q^2 + 3p^{0\,3}q^3 = 3p^0q$
$3p^0p^2q^{0\,2}q - 6p^{0\,2}pq^0q^2 + 3p^{0\,3}q^3 - 3p^0q = 0$...(III)
(II) + (III) $p^3q^{0\,3} + 2p^{0\,3}q^3 - 3p^{0\,2}pq^0q^2 - 3p^0q = \mp 1$
$3p^{0\,2}pq^0q^2 + 3p^0q \mp 1 = p^3q^{0\,3} + 2p^{0\,3}q^3$ (mit $\mp p^3A$ mult.)
$\mp 3p^{0\,2}p^4q^0q^2A \mp 3p^0p^3qA + p^3A = \mp p^6q^{0\,3}A \mp 2p^{0\,3}p^3q^3A$...(F)

7) (I) mit $3pq^0$ multiplizirt gibt:
$3p^3q^{0\,3} - 6p^0p^2q^{0\,2}q + 3p^{0\,2}pq^0q^2 = 3pq^0$
$3p^3q^{0\,3} - 6p^0p^2q^{0\,2}q + 3p^{0\,2}pq^0q^2 - 3pq^0 = 0$...(IV)
(IV) — (II) $2p^3q^{0\,3} + p^{0\,3}q^3 - 3p^0p^2q^{0\,2}q - 3pq^0 = \pm 1$
$3p^0p^2q^{0\,2}q + 3pq^0 \pm 1 = 2p^3q^{0\,3} + p^{0\,3}q^3$ (mit $\pm q^3A^2$ mult.)
$\pm 3p^0p^2q^{0\,2}q^4A^2 \pm 3pq^0q^3A^2 + q^3A^2 = \pm 2p^3q^{0\,3}q^3A^2 \pm p^{0\,3}q^6A^2$...(G)

Man entwickele nun die einzelnen Grössen im Zähler und Nenner des obigen Bruches (Z), indem man jedoch den Faktor $\mp(p^3 - q^3A)$ für sich bestehen lässt. Dann setze man: in den Coefficienten von $\sqrt[3]{A^2}$ statt des 1sten Theils der obigen Gleichung (A) den 2ten Theil derselben; in den Coefficienten von $\sqrt[3]{A}$ statt des 1sten Theils der Gleichung (B) den 2ten Theil derselben; in den rationalen Theil des Zählers statt des 1sten Theils der Gleichung (C) den 2ten Theil derselben, und endlich in den Nenner statt des 1sten Theils der Gleichungen (D), (E), (F) und (G) den 2ten Theil dieser Gleichungen. So erhält man einen Bruch von folgendem Zähler und Nenner:

$$\text{Zähler: } \mp(p^3-q^3A)\cdot\left\{\begin{array}{l}\left[\mp p^3{}^0\mp p^0q^3A\mp mq^3\mp mp^3\mp mpq^3A\right]\sqrt[3]{A^2}\\ +\left[\mp p^0{}^2p\mp q^3\mp p^3\mp 2mpq^0A\mp m^2q^3A\right]\sqrt[3]{A}\\ +p^0{}^2q^2A+q^4-2mp^2q^0A-p^3q^0{}^2A-p^0{}^2pq^3A\\ +2mp^0q^3-2mp^0p^2q^0A-2mpq^4+2mq^0{}^2A^2\\ -2m^2p^3q^3A\end{array}\right\}.$$

$$\text{Nenner: } \left\{\begin{array}{l}\mp m^3p^6\mp 3m^2p^4q^0\mp 3mp^2q^0{}^2\mp 3m^2p^3q\mp 6mp^2q^0q\mp 3mq^0{}^2q^2\\ \mp 3m^3p^2q^2\mp 6mpq^0q^2\mp m^3q^3\end{array}\right\}\sqrt[3]{A^2}$$
$$\left\{\begin{array}{l}\mp 3mp^4q\mp 6mp^2q^0q\mp 3mq^0{}^2q\mp 3m^2p^2q^2\mp 3m^2q^3\\ \mp 3mp^0{}^2pq^2\mp 6mp^0q^3\mp 3m^2p^0{}^2q\end{array}\right\}\sqrt[3]{A}$$
$$\mp m^3q^6\mp 3m^2p^0q^4\mp 3mp^0{}^2q^3\mp p^0{}^3q^3.$$

Dieser Bruch reducirt sich auf:

$$x^{(n+1)} =$$

$$\frac{(p^3-q^3A)^2\left\{\begin{array}{c}(mq+q^0)\sqrt[3]{A^2}+(mp+p^0)\sqrt[3]{A}\\ \mp(m^2p^3+2mp^0p^2+p^{0\,2}p-m^2q^3A-2mq^0q^2A-q^{0\,2}qA)\end{array}\right\}}{(p^3-q^3A)^2\cdot\left\{\begin{array}{c}\pm m^3p^3\pm 3m^2p^0p^2\pm 3mp^{0\,2}p\pm p^{0\,3}\\ \mp m^3q^3A\mp 3m^2q^0q^2A\mp mq^{0\,2}qA\mp q^{0\,3}A\end{array}\right\}}$$

$$=\frac{(mq+q^0)\sqrt[3]{A^2}+(mp+p^0)\sqrt[3]{A}\mp[p(mp+p^0)^2-q(mq+q^0)^2A]}{\pm[(mp+p^0)^3-(mq+q^0)^3A]}$$

$$=\frac{q^I\sqrt[3]{A^2}+p^I\sqrt[3]{A}\mp(pp^{I2}-qq^{I2}A)}{\pm(p^{I3}-q^{I3}A)}.$$

Und dieses war zu beweisen.

§. 6.

Aus der Berechnung in §. 3. und §. 5. geht unmittel hervor, dass D und J immer ganze Zahlen sind. D ist a auch immer positiv. Denn:

1. Ist $\frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch ungerader Ordnung, so $D=-(p^3-q^3A)$. Alsdann ist aber (da der erste Näherungsbr $\frac{a}{1}$ zu klein ist) $\frac{p}{q}<\sqrt[3]{A}$; folglich $\frac{p^3}{q^3}<A$, und $p^3<q^3A$; also positiv.

2. Ist hingegen $\frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch gerader Ordnung, ist $D=+(p^3-q^3A)$. Dann ist auch $\frac{p}{q}>\sqrt[3]{A}$; folglich $\frac{p^3}{q^3}>$ und $p^3>q^3A$; also D wieder positiv.

Anders verhält es sich mit J.

1. Ist $\frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch ungerader Ordnung, so $\frac{p}{q^0}>\frac{p}{q}$; also $p^0>\frac{pq^0}{q}$, und $\frac{p^0}{p}>\frac{q^0}{q}$. Dieses, multiplizirt $p^3<q^3A$ (siehe oben), gibt $p^0p^2\gtrless q^0q^2A$.

2. Ist $\frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch gerader Ordnung, so ist $\frac{p^0}{q^0}<$ also $p^0<\frac{pq^0}{q}$, und $\frac{p^0}{p}<\frac{q^0}{q}$. Dieses, multiplizirt mit $p^3>q^3$ gibt wieder $p^0p^2\gtrless q^0q^2A$.

Da nun $J=\pm(p^0p^2-q^0q^2A)$, so kann J in beiden Fällen sitiv, oder $=0$, oder negativ sein [4]).

§. 7.

Der die Grösse $\sqrt[3]{A}$ ausdrückende Kettenbruch ist nie periodischer. Denn da $p^I>p$, $p^{II}>p^I$, u. s. w., und $q^I>$ $q^{II}>q^I$, u. s. w.; so kann nicht derselbe vollständige Quoti zweimal vorkommen. Auch können nicht 2 vollständige Quotien einander gleich sein. Denn wenn etwa

---

4) In allen Zahlenbeispielen, die ich bisher auflöste, fand ich im zweiten vollständigen Quotienten $J=0$, und dieses auch nur da wenn A von der Form $(n-1)n^2$. Es gelang mir indessen noch nic diesen Satz als allgemein gültig zu erweisen.

$$\frac{\sqrt[3]{A^2}+p\sqrt[3]{A}\pm(p^\circ p^2-q^\circ q^2 A)}{\mp(p^3-q^3 A)} = \frac{q_I\sqrt[3]{A^2}+p_I\sqrt[3]{A}\pm(p_I^\circ p_I^2-q_I^\circ q_I^2 A)}{\mp(p_I^3-q_I^3 A)}$$

sein sollte, so müsste letzterer Bruch sich so verkleinern lassen, dass er die Form des ersteren erhielte. Da aber (s. Egen. §. 271.) p_I und q_I keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, so sind auch q_I und p_I^3, und, da $q_I^3 A$ ein Vielfaches von q_I, auch q_I und $p_I^3-q_I^3 A$ incommensurabel. Obige 2 Brüche sind demnach nicht auf einerlei Form zu bringen, können also auch nicht einander gleich sein.

Aus diesem Allen folgt, dass nicht eine gewisse Reihe von Kettenbruchsnennern periodisch wiederkehren kann.

§. 8.

Das in §. 1. dargestellte Verfahren wird jetzt bedeutend abgekürzt werden können, wenn man gleichzeitig die Näherungsbrüche entwickelt. Etwa auf folgende Weise:

		Nenner.	Zähler.	
$x = \sqrt[3]{4} = 1 + \frac{1}{x^I}$		0	1	
$x^I = \frac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1}{3}$	$= 1 + \frac{1}{x^{II}}$	1	1	$J = +(1.1^2-0.1^2.4) = 1$ $D = -(1^3-1^3.4) = 3$
$x^{II} = \frac{\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{4}}{4}$	$= 1 + \frac{1}{x^{III}}$	1	2	$J = -(1.2^2-1.1^2.4) = 0$ $D = +(2^3-1^3.4) = 4$
$x^{III} = \frac{2\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{4}+2}{5}$	$= 2 + \frac{1}{x^{IV}}$	2	3	$J = +(2.3^2-1.2^2.4) = 2$ $D = -(3^3-2^3.4) = 5$
$x^{IV} = \frac{5\sqrt[3]{16}+8\sqrt[3]{4}+8}{12}$	$= 2 + \frac{1}{x^V}$	5	8	$J = -(3.8^2-2.5^2.4) = 8$ $D = +(8^3-5^3.4) = 12$
$x^V = \frac{12\sqrt[3]{16}+19\sqrt[3]{4}+8}{53}$	$= 1 + \frac{1}{x^{VI}}$	12	19	$J = +(8.19^2-5.12^2.4) = 8$ $D = -(19^3-12^3.4) = 53$
$x^{VI} = \frac{17\sqrt[3]{16}+27\sqrt[3]{4}+21}{31}$	$= 3 + \frac{1}{x^{VII}}$	17	27	$J = -(19.27^2-12.17^2.4) = 21$ $D = +(27^3-17^3.4) = 31$
$x^{VII} = \frac{63\sqrt[3]{16}+100\sqrt[3]{4}+108}{188}$	$= 2 + \frac{1}{x^{VIII}}$	63	100	$J = +(27.100^2-17.63^2.4) = 108$ $D = -(100^3-63^3.4) = 188$
u. s. w.		143	227	$J = -(100.227^2-63.143^2.4) = 248$ $D = +(227^3-143^3.4) = 255$

Die grösste Schwierigkeit bei dieser Berechnung ist, die in $Q\sqrt[3]{A^2}$ und in $P\sqrt[3]{A}$ enthaltenen grössten ganzen Zahlen zu finden.

Es ist aber, wenn $\frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch ungerader Ordnung $\sqrt[3]{A} - \frac{p}{q} < \frac{1}{qq'}$ (Egen. §. 272.); folglich

$$\sqrt[3]{A^2}-\frac{p\sqrt[3]{A}}{q}<\frac{\sqrt[3]{A}}{qq^I}, \text{ und } q\sqrt[3]{A^2}-p\sqrt[3]{A}<\frac{\sqrt[3]{A}}{q^I}.$$

Ebenso wird bewiesen, dass

$$p^I\sqrt[3]{A}-q^I\sqrt[3]{A^2}<\frac{\sqrt[3]{A}}{q^{II}},\quad q^{II}\sqrt[3]{A^2}-p^{II}\sqrt[3]{A}<\frac{\sqrt[3]{A}}{q^{III}}, \text{ u. s. w.}$$

Da nun $q^{II}>q^I$, $q^{III}>q^{II}$, u. s. w.; so ist

$$\frac{\sqrt[3]{A}}{q^{II}}<\frac{\sqrt[3]{A}}{q^I},\quad \frac{\sqrt[3]{A}}{q^{III}}<\frac{\sqrt[3]{A}}{q^{II}}, \text{ u. s. w.;}$$

folglich werden die Unterschiede zwischen $Q\sqrt[3]{A^2}$ und $P\sqrt[3]{A}$, abgesehen von den Zeichen, immer kleiner. Daher werden die in diesen beiden Grössen enthaltenen grössten ganzen Zahlen gar bald einander gleich sein (in obiger Berechnung z. B. schon bei x^{II}); wesshalb man dann von da an jedesmal nur eine derselben zu suchen und dieselbe doppelt zu nehmen hat.

§. 9.

Man kann die irrationale Grösse $\sqrt[3]{A}$ noch auf eine andere Weise in einen Kettenbruch verwandeln. Setzt man nämlich $x=\sqrt[3]{A}$; so ist $x^3=A$, und $x^3-A=0$. Vervollständigt man diese Gleichung durch die Glieder $\pm 0.x^2$ und $\pm 0.x$; so kann dieselbe diese 4 Formen erhalten:

$$x^3+0.x^2+0.x-A=0,\quad x^3+0.x^2-0.x-A=0,$$
$$x^3-0.x^2+0.x-A=0,\quad x^3-0.x^2-0.x-A=0.$$

Die 1ste, 2te und 4te dieser Gleichungen enthalten jede 2 Folgen und eine Abwechselung der Zeichen; die 3te aber 3 Abwechselungen. Dieser Widerspruch deutet auf imaginäre Wurzeln. Demnach hat die Gleichung $x^3-A=0$ (Egen. Thl. II. §. 404. Folg. 2 und 4.) nur eine reelle, und zwar eine positive Wurzel. Sucht man diese (welche im vorliegenden Falle irrational ist) näherungsweise nach der Methode von Lagrange (Egen. §. 458. ff.); so wird dadurch die Grösse $\sqrt[3]{A}$ in einen Kettenbruch verwandelt.

Angenommen, die Gleichung:

$$\text{(I)}\quad Ex^3+Fx^2+Gx+H=0$$

habe nur eine reelle, und zwar irrationale Wurzel, und diese sei enthalten zwischen r und $r+1$. Setzt man dann $x=r+\frac{1}{x^I}$ (wo $x^I>1$ sein wird), und ordnet den Werth der Gleichung (I) nach den Potenzen von x^I; so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$\text{(II)}\quad E^Ix^{I3}+F^Ix^{I2}+G^Ix^I+H^I=0.$$

Durch wirkliche Berechnung findet man:

$$E^I = Er^3 + Fr^2 + Gr + H,$$
$$F^I = 3Er^2 + 2Fr + G,$$
$$G^I = 3Er + F,$$
$$H^I = E.$$

Der Coefficient E^I drückt den Werth der Gleichung (I), r für x gesetzt, aus. Da nun $r < x$, so wird E^I stets negativ sein. Soll also in der abgeleiteten Gleichung (II) das erste Glied positiv werden, so muss man alle Zeichen derselben in die entgegengesetzten umändern.

§. 10.

Nach dieser Methode soll nun $\sqrt[3]{4}$ in einen Kettenbruch verwandelt werden. Man hat also die Gleichung:

$$x^3 - 4 = 0.$$

Hier ist $E=1$, $F=0$, $G=0$, $H=-4$, und, da x zwischen 1 und 2 liegt, $r=1$. Demnach ist (§. 9.) $E^I=-3$, $F^I=3$, $G^I=3$, $H^I=1$. Die abgeleitete Gleichung wird also sein, nachdem man die Zeichen verändert:

$$3x^{I3} - 3x^{I2} - 3x^I - 1 = 0.$$

Durch Tatonniren findet man leicht, dass x^I zwischen 1 und 2 enthalten ist. Sieht man nun diese Gleichung wieder als die erste an und setzt also $E=3$, $F=-3$, $G=-3$, $H=-1$ und $r=1$, so erhält man auf dieselbe Weise die zweite abgeleitete Gleichung

$$4x^{II3} - 6x^{II} - 3 = 0.$$

So fortfahrend gelangt man nach und nach zu folgenden Resultaten

$x^3 - 4 = 0$	$x = 1 + \frac{1}{x^I}$
$3x^{I3} - 3x^{I2} - 3x^I - 1 = 0$	$x^I = 1 + \frac{1}{x^{II}}$
$4x^{II3} - 6x^{II} - 3 = 0$	$x^{II} = 1 + \frac{1}{x^{III}}$
$5x^{III3} - 6x^{III2} - 12x^{III} - 4 = 0$	$x^{III} = 2 + \frac{1}{x^{IV}}$
$12x^{IV3} - 24x^{IV2} - 24x^{IV} - 5 = 0$	$x^{IV} = 2 + \frac{1}{x^V}$
$53x^{V3} - 24x^{V2} - 48x^V - 12 = 0$	$x^V = 1 + \frac{1}{x^{VI}}$

$$31x^{VI3}-63x^{VI2}-135x^{VI}-53=0 \qquad x^{VI}=3+\frac{1}{x^{VII}}$$

$$188x^{VII3}-324x^{VII2}-216x^{VII}-31=0 \qquad x^{VII}=2+\frac{1}{x^{VIII}}$$

u. s. w.

Es ist also

$$\sqrt[3]{4}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\text{ u. s. w.}}}}}}}}$$

Dasselbe Resultat wurde schon in §. 8. auf andere Weise gefunden.

§. 11.

Es sei allgemein $x=\sqrt[3]{A}$, also $x^3-A=0$. Ferner sei x zwischen a und $a+1$ enthalten. Dann ist $E=1$, $F=0$, $G=0$, $H=-A$, und $r=a$; folglich (§. 9.) $E^I=a^3-A$, $F^I=3a^2$, $G^I=3a$, $H^I=1$. Demnach ist die erste abgeleitete Gleichung, nachdem die Zeichen geändert worden:

$$(A-a^3)\,x^{I3}-3a^2\,x^{I2}-3ax^I-1=0.$$

Angenommen, x^I sei enthalten zwischen a^I und a^I+1. Man betrachte ferner die Gleichung in x^I wieder als die erste, und setze also $E=A-a^3$, $F=-3a^2$, $G=-3a$, $H=-1$, und $r=a^I$. Dann erhält man ebenso die zweite abgeleitete Gleichung:

$$[1+3aa^I+3a^2a^{I2}-(A-a^3)\,a^{I3}]\,x^{II3}-[3(A-a^3)\,a^{I2}-6a^2a^I-3a]\,x^{II2}$$
$$-[3(A-a^3)\,a^I-3a^2]\,x^{II}-(A-a^3)=0.$$

Diese reducirt sich auf folgende:

$$[(aa^I+1)^3-a^{I3}A]\,x^{II3}-3\,[a^{I2}A-a(aa^I+1)^2]\,x^{II2}$$
$$-3[a^I(A-a^3)-a^2]\,x^{II}-(A-a^3)=0.$$

Diese Gleichung kann man abermals als die erste ansehen, indem man annimmt, dass x^{II} zwischen a^{II} und $a^{II}+1$ liege,

u. s. w. Dadurch wird die Grösse $\sqrt[3]{A}$ sich verwandeln in d
Kettenbruch:

$$a+\cfrac{1}{a^I+\cfrac{1}{a^{II}+\text{ u. s. w.}}}$$

§. 12.

Vergleicht man die in §. 10. gefundenen abgeleiteten G
chungen der Reihe nach mit den vollständigen Quotienten in §.
so wie die abgeleiteten Gleichungen in §. 11. mit den vollständi
Quotienten in §. 3.; so findet man (die in §. 4. und §. 9. an
nommene Bezeichnungsweise beibehalten) Folgendes:

$$E=D,\ F=-3J,\ G=-3(m^0D^0-J^0),\ H=-D^0.$$

Die allgemeine Gültigkeit dieser Sätze für die 2 ersten v
ständigen Quotienten und die 2 ersten abgeleiteten Gleichun
geht aus §. 3. und §. 11. unmittelbar hervor. Soll nun bewie
werden, dass sie für alle Quotienten und Gleichungen allgem
gültig sind, so ist nur noch darzuthun, dass, wenn sie für irg
einen vollständigen Quotienten und die mit demselben corres
dirende Gleichung gelten, dies auch bei dem nächstfolgen
Quotienten und der nächstfolgenden Gleichung der Fall sei.
andern Worten: Sind

$$\frac{q\sqrt[3]{A^2}+p\sqrt[3]{A}+J}{D} \text{ und } \frac{q^I\sqrt[3]{A^2}+p^I\sqrt[3]{A}+J^I}{D^I}$$

zwei zunächst auf einander folgende vollständige Quotienten,
m und m^I die in denselben enthaltenen grössten ganzen Zah
sind ferner

$$Ex^3+Fx^2+Gx+H=0 \text{ und } E^Ix^{I3}+F^Ix^{I2}+G^Ix^I+H^I=$$

die diesen Quotienten entsprechenden abgeleiteten Gleichun
ist endlich

$$E=D,\ F=-3J,\ G=-3(m^0D^0-J^0),\ H=-D^0;$$

so muss bewiesen werden, dass auch

$$E^I=D^I,\ F^I=-3J^I,\ G^I=-3(mD-J),\ H^I=-D$$

sei.

Nach §. 5. ist:

$$D=\mp(p^3-q^3A), \text{ und } D^I=\pm(p^{I3}-q^{I3}A);$$
$$-3J=\mp3(p^0p^2-q^0q^2A), \text{ und } -3J^I=\pm3(pp^{I2}-qq^{I2}A);$$

$-3(m^0D^0-J^0)=\mp 3m^0(p^{03}-q^{03}A)\mp 3(p^{00}p^{02}-q^{00}q^{02}A)$, und
$-3(mD-J)=\pm 3m(p^3-q^3A)\pm 3(p^0p^2-q^0q^2A)$;
$-D^0=\mp(p^{03}-q^{03}A)$, und $-D=\pm(p^3-q^3A)$.

Nach unserer obigen Annahme ist also auch:

$E=\mp(p^3-q^3A)$, $F=\mp 3(p^0p^2-q^0q^2A)$,
$G=\mp 3m^0(p^{03}-q^{03}A)\mp 3(p^{00}p^{02}-q^{00}q^{02}A)$, $H=\mp(p^{03}-q^{03}A)$.

Hieraus folgt nun nach §. 9. (da die Grösse r daselbst im vorliegenden Falle $=m$ ist):

$$\left.\begin{aligned} I.\ E^I &= \pm m^3(p^3-q^3A)\pm 3m^2(p^0p^2-q^0q^2A)\pm 3m^0m(p^{03}-q^{03}A)\\ &\quad \pm 3m(p^{00}p^{02}-q^{00}q^{02}A)\pm(p^{03}-q^{03}A)\ ^{5})\\ &= \pm(m^3p^3+3m^2p^0p^2+3m^0mp^{03}+3mp^{00}p^{02}+p^{03})\\ &\quad \mp(m^3q^3+3m^2q^0q^2+3m^0mq^{03}+3mq^{00}q^{02}+q^{03})A \end{aligned}\right\} ..(\alpha).$$

Diese letztere Gleichung lässt sich reduciren. Denn es ist:

$m^0p^0+p^{00}=p$, und $m^0q^0+q^{00}=q$
(mit $3mp^{02}$ multiplizirt) (mit $3mq^{02}$ multiplizirt)
$3m^0mp^{03}+3mp^{00}p^{02}=3mp^{02}p$ $3m^0mq^{03}+3mq^{00}q^{02}=3mq^{02}q$.

Hiernach verwandelt sich die Gleichung (α) in folgende.

$$\begin{aligned} E^I &= \pm(m^3p^3+3m^2p^0p^2+3mp^{02}p+p^{03})\\ &\quad \mp(m^3q^3+3m^2q^0q^2+3mq^{02}q+q^{03})A,\\ E^I &= \pm(mp+p^0)^3\mp(mq+q^0)^3A,\\ E^I &= \pm p^{I3}\mp q^{I3}A,\\ E^I &= \pm(p^{I3}-q^{I3}A),\\ E^I &= D^I. \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} II.\ F^I &= \pm 3m^2(p^3-q^3A)\pm 6m(p^0p^2-q^0q^2A)\\ &\quad \pm 3m^0(p^{03}-q^{03}A)\pm 3(p^{00}p^{02}-q^{00}q^{02}A)\\ &= \pm 3(m^2p^3+2mp^0p^2+m^0p^{03}+p^{00}p^{02})\\ &\quad \mp 3(m^2q^3+2mq^0q^2+m^0q^{03}+q^{00}q^{02})A \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (\beta)$$

Es ist wieder:

$m\,p^0+p^{00}=p$, und $m^0q^0+q^{00}=q$
(mit p^{02} multiplizirt) (mit q^{02} multiplizirt)
$m^0p^{03}+p^{00}p^{02}=p^{02}p$, $m^0q^{03}+q^{00}q^{02}=q^{02}q$.

---

5) Man vergesse hier nicht, dass, um das 1ste Glied der neu abgeleiteten Gleichung positiv zu machen, alle Zeichen in die entgegengesetzten verwandelt werden müssen!

Hiedurch reducirt sich die Gleichung (β) auf folgende:

$$F^I = \pm 3(m^2p^3+2mp^0p^2+p^{0\,2}p) \mp 3(m^2q^3+2mq^0q^2+q^{0\,2}q)A,$$
$$F^I = \pm 3p(mp+p^0)^2 \mp 3q(mq+q^0)^2A,$$
$$F^I = \pm 3(pp^{I2}-qq^{I2}A),$$
$$F^I = -3J^I.$$

III. $$G^I = \pm 3m(p^3-q^3A) \pm 3(p^0p^2-q^0q^2A),$$
$$G^I = -3(mD-J).$$

IV. $$H^I = \pm (p^3-q^3A),$$
$$H^I = -D.$$

VII.

Ueber gewisse bei einer besondern Klasse astronomischer Aufgaben häufig in Anwendung kommende Gleichungen.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Zuerst will ich die bekannten Grundformeln der sphärisch Astronomie bloss mit Hülfe der Principien der analytischen G metrie entwickeln, und werde mich dabei, so wie überhaupt diesem Aufsatze, der folgenden Bezeichnungen bedienen:

Polhöhe . . . . . φ
Höhe eines Gestirns . . . . . h
Zenithdistanz . . . . . z
Azimuth . . . . . ω

Stundenwinkel . . . . . σ

Declination . . . . . δ

Polardistanz . . . . . p

Rectascension . . . . . α

Alle diese Elemente werden auf die aus der Astronomie allgemein bekannte Weise genommen. Nur rücksichtlich des Azimuths mag bemerkt werden, dass dasselbe im Folgenden immer von Süden durch Westen hindurch, d. i. im Sinne der täglichen Bewegung der Sphäre, von 0 bis 360° gezählt werden soll.

Um nun die zwischen den genannten Elementen Statt findenden Relationen in völliger Allgemeinheit zu entwickeln, nehmen wir den Mittelpunkt der Sphäre als den Anfang zweier rechtwinkligen Coordinatensysteme der xyz und $x'y'z'$ an. Die Ebene der xy soll die Ebene des Horizonts, und die positiven Theile der Axen der x und y sollen vom Mittelpunkte der Sphäre an respective nach Süden und nach Westen, der positive Theil der Axe der z aber soll von dem Mittelpunkte der Sphäre an nach dem Zenith gerichtet sein. Die Ebene der $x'y'$ soll die Ebene des Aequators sein, der positive Theil der Axe der x' sei die Durchschnittslinie der Ebene des Aequators mit der Ebene der südlichen Hälfte des Meridians *), der positive Theil der Axe der y' soll vom Mittelpunkte der Sphäre nach Westen, der positive Theil der Axe der z' vom Mittelpunkte der Sphäre nach dem Nordpole gerichtet sein. Dies vorausgesetzt, ist offenbar, wenn die Coordinaten x, y, z und x', y', z' sich auf denselben Stern in demselben Zeitmomente beziehen, und der Halbmesser der Sphäre immer der Längeneinheit gleich gesetzt wird, in völliger Allgemeinheit:

$$1) \quad \begin{cases} x = \cos\omega \cos h, \\ y = \sin\omega \cos h, \\ z = \sin h \end{cases}$$

und

$$2) \quad \begin{cases} x' = \cos\sigma \cos\delta, \\ y' = \sin\sigma \cos\delta, \\ z' = \sin\delta. \end{cases}$$

Nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten hat man aber offenbar die folgenden Gleichungen:

$$x = x' \cos(90° - \varphi) - z' \sin(90° - \varphi),$$
$$y = y',$$
$$z = x' \sin(90° - \varphi) + z' \cos(90° - \varphi)$$

*) Der Meridian wird durch die Weltaxe in zwei Hälften getheilt, von denen die, in welcher Süden liegt, die südliche, die, in welcher Norden liegt, die nördliche Hälfte des Meridians genannt wird.

oder

$$3)\quad \begin{cases} x = x' \sin\varphi - z' \cos\varphi, \\ y = y', \\ z = x' \cos\varphi + z' \sin\varphi; \end{cases}$$

aus denen sehr leicht auf dem Wege gewöhnlicher algebraischer Elimination mit Hülfe einer bekannten goniometrischen Gleichung umgekehrt

$$4)\quad \begin{cases} x' = x \sin\varphi + z \cos\varphi, \\ y' = y, \\ z' = -x \cos\varphi + z \sin\varphi \end{cases}$$

erhalten wird.

Führt man nun in diese beiden Systeme von Gleichungen zwischen den Coordinaten x, y, z und x', y', z' die aus dem Obigen bekannten Ausdrücke dieser Coordinaten ein, so ergeben sich sogleich die beiden folgenden wichtigen Systeme von Gleichungen:

$$5)\quad \begin{cases} \cos\omega \cos h = \cos\sigma \cos\delta \sin\varphi - \sin\delta \cos\varphi, \\ \sin\omega \cos h = \sin\sigma \cos\delta, \\ \sin h = \cos\sigma \cos\delta \cos\varphi + \sin\delta \sin\varphi \end{cases}$$

und

$$6)\quad \begin{cases} \cos\sigma \cos\delta = \cos\omega \cos h \sin\varphi + \sin h \cos\varphi, \\ \sin\sigma \cos\delta = \sin\omega \cos h, \\ \sin\delta = -\cos\omega \cos h \cos\varphi + \sin h \sin\varphi. \end{cases}$$

Dividirt man die erste Gleichung des ersten Systems durch die zweite Gleichung dieses Systems, so erhält man

$$\cot\omega = \frac{\cos\sigma \sin\varphi - \operatorname{tang}\delta \cos\varphi}{\sin\sigma},$$

und hieraus

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{\cos\sigma \sin\varphi - \sin\sigma \cot\omega}{\cos\varphi}.$$

Dividirt man auf ähnliche Art die erste Gleichung des zweiten Systems durch die zweite Gleichung dieses Systems, so erhält man

$$\cot\sigma = \frac{\cos\omega \sin\varphi + \operatorname{tang} h \cos\varphi}{\sin\omega},$$

und hieraus

$$\operatorname{tang} h = \frac{\cot\sigma \sin\omega - \cos\omega \sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Also hat man noch die beiden folgenden Systeme von Gleichungen:

$$7)\quad \begin{cases} \cot\omega = \dfrac{\cos\sigma\sin\varphi - \operatorname{tang}\delta\cos\varphi}{\sin\sigma}, \\ \operatorname{tang} h = \dfrac{\cot\sigma\sin\omega - \cos\omega\sin\varphi}{\cos\varphi} \end{cases}$$

und

$$8)\quad \begin{cases} \cot\sigma = \dfrac{\cos\omega\sin\varphi + \operatorname{tang} h\cos\varphi}{\sin\omega}, \\ \operatorname{tang}\delta = \dfrac{\cos\sigma\sin\varphi - \sin\sigma\cot\omega}{\cos\varphi}. \end{cases}$$

Führt man in die vorhergehenden vier Systeme statt der Höhe und Declination die Zenithdistanz und Polardistanz ein, so werden dieselben:

$$5^*)\quad \begin{cases} \cos\omega\sin z = \cos\sigma\sin p\sin\varphi - \cos p\cos\varphi, \\ \sin\omega\sin z = \sin\sigma\sin p, \\ \cos z = \cos\sigma\sin p\cos\varphi + \cos p\sin\varphi; \end{cases}$$

$$6^*)\quad \begin{cases} \cos\sigma\sin p = \cos\omega\sin z\sin\varphi + \cos z\cos\varphi, \\ \sin\sigma\sin p = \sin\omega\sin z, \\ \cos p = -\cos\omega\sin z\cos\varphi + \cos z\sin\varphi; \end{cases}$$

$$7^*)\quad \begin{cases} \cot\omega = \dfrac{\cos\sigma\sin\varphi - \cot p\cos\varphi}{\sin\sigma}, \\ \cot z = \dfrac{\cot\sigma\sin\omega - \cos\omega\sin\varphi}{\cos\varphi}; \end{cases}$$

$$8^*)\quad \begin{cases} \cot\sigma = \dfrac{\cos\omega\sin\varphi + \cot z\cos\varphi}{\sin\omega}, \\ \cot p = \dfrac{\cos\sigma\sin\varphi - \sin\sigma\cot\omega}{\cos\varphi}. \end{cases}$$

Diese Entwickelung der Grundformeln der sphärischen Astronomie scheint mir viel einfacher und der Sache angemessener, als die gewöhnliche Entwickelung derselben mit Hülfe der sphärischen Trigonometrie.

§. 2.

Es giebt nun eine gewisse, vorzüglich zuerst von Gauss hervorgehobene Klasse interessanter astronomischer Aufgaben, bei denen vorausgesetzt wird, dass drei Sterne unter solchen Umständen beobachtet worden sind, dass gewisse gleichnamige Elemente

derselben einander gleich sind, indem man diese Sterne z. B. in gleichen Höhen, oder in gleichen Azimuthen, oder bei gleichen Stundenwinkeln, u. s. w. beobachtet. Eine vollständige Behandlung aller möglichen Aufgaben dieser Art ist nicht ohne Interesse, würde jedoch im Archive einen zu grossen Raum für sich in Anspruch nehmen, wenn sie mit der erforderlichen Ausführlichkeit gegeben werden sollte. Diesen Aufgaben liegen aber, wenn man sie unter allgemeine Gesichtspunkte fasst, hauptsächlich gewisse Relationen zum Grunde, welche ich, weil dieselben auch an sich interessant sind, im folgenden Paragraphen im Zusammenhange entwickeln, und von denselben vielleicht späterhin weitere Anwendungen machen werde.

§. 3.

I. Zuerst wollen wir, die Polhöhe wie früher auch jetzt immer durch φ bezeichnend, annehmen, dass den Declinationen δ, δ', δ'' und den Azimuthen ω, ω', ω''; oder den Declinationen δ, δ', δ'' und den Stundenwinkeln σ, σ', σ''; oder den Azimuthen ω, ω', ω'' und den Stundenwinkeln σ, σ', σ'' dreier Sterne die gleichen Höhen h, h, h dieser Sterne entsprechen.

Dann haben wir zuvörderst nach 6) die drei Gleichungen:

$$\sin\delta = \sin h \sin\varphi - \cos\omega \cos h \cos\varphi,$$
$$\sin\delta' = \sin h \sin\varphi - \cos\omega' \cos h \cos\varphi,$$
$$\sin\delta'' = \sin h \sin\varphi - \cos\omega'' \cos h \cos\varphi.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\cos\omega' - \cos\omega'', \quad \cos\omega'' - \cos\omega, \quad \cos\omega - \cos\omega',$$

und addirt sie dann zu einander; so erhält man, weil

$$(\cos\omega' - \cos\omega'') + (\cos\omega'' - \cos\omega) + (\cos\omega - \cos\omega') = 0,$$
$$\cos\omega(\cos\omega' - \cos\omega'') + \cos\omega'(\cos\omega'' - \cos\omega) + \cos\omega''(\cos\omega - \cos\omega') = 0$$

ist, die folgende, h und φ gar nicht mehr enthaltende Relation zwischen den Declinationen δ, δ', δ'' und den Azimuthen ω, ω', ω'':

$$9) \quad \left.\begin{array}{l} \sin\delta\ (\cos\omega' - \cos\omega'') \\ + \sin\delta'\ (\cos\omega'' - \cos\omega) \\ + \sin\delta''\ (\cos\omega - \cos\omega') \end{array}\right\} = 0,$$

oder

$$10) \quad \left.\begin{array}{l} \cos\omega\ (\sin\delta' - \sin\delta'') \\ + \cos\omega'\ (\sin\delta'' - \sin\delta) \\ + \cos\omega''\ (\sin\delta - \sin\delta') \end{array}\right\} = 0,$$

oder

11) $$\left.\begin{array}{l} \sin\delta \sin\frac{1}{2}(\omega' + \omega'') \sin\frac{1}{2}(\omega' - \omega'') \\ + \sin\delta' \sin\frac{1}{2}(\omega'' + \omega) \sin\frac{1}{2}(\omega'' - \omega) \\ + \sin\delta'' \sin\frac{1}{2}(\omega + \omega') \sin\frac{1}{2}(\omega - \omega') \end{array}\right\} = 0,$$

der

12) $$\left.\begin{array}{l} \cos\omega \cos\frac{1}{2}(\delta' + \delta'') \sin\frac{1}{2}(\delta' - \delta'') \\ + \cos\omega' \cos\frac{1}{2}(\delta'' + \delta) \sin\frac{1}{2}(\delta'' - \delta) \\ + \cos\omega'' \cos\frac{1}{2}(\delta + \delta') \sin\frac{1}{2}(\delta - \delta') \end{array}\right\} = 0.$$

Ferner hat man nach 5) die drei Gleichungen:

$$\sin h = \sin\delta \sin\varphi + \cos\sigma \cos\delta \cos\varphi,$$
$$\sin h = \sin\delta' \sin\varphi + \cos\sigma' \cos\delta' \cos\varphi,$$
$$\sin h = \sin\delta'' \sin\varphi + \cos\sigma'' \cos\delta'' \cos\varphi.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin\delta' - \sin\delta'', \ \sin\delta'' - \sin\delta, \ \sin\delta - \sin\delta',$$

d addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung:

13) $$\left.\begin{array}{l} \cos\sigma \cos\delta \ (\sin\delta' - \sin\delta'') \\ + \cos\sigma' \cos\delta' \ (\sin\delta'' - \sin\delta) \\ + \cos\sigma'' \cos\delta'' \ (\sin\delta - \sin\delta') \end{array}\right\} = 0,$$

er

14) $$\left.\begin{array}{l} \cos\sigma \cos\delta \cos\frac{1}{2}(\delta' + \delta'') \sin\frac{1}{2}(\delta' - \delta'') \\ + \cos\sigma' \cos\delta' \cos\frac{1}{2}(\delta'' + \delta) \sin\frac{1}{2}(\delta'' - \delta) \\ + \cos\sigma'' \cos\delta'' \cos\frac{1}{2}(\delta + \delta') \sin\frac{1}{2}(\delta - \delta') \end{array}\right\} = 0.$$

Endlich hat man nach 7) die drei folgenden Gleichungen:

$$\cos\varphi \operatorname{tang} h = \cot\sigma \sin\omega - \cos\omega \sin\varphi,$$
$$\cos\varphi \operatorname{tang} h = \cot\sigma' \sin\omega' - \cos\omega' \sin\varphi,$$
$$\cos\varphi \operatorname{tang} h = \cot\sigma'' \sin\omega'' - \cos\omega'' \sin\varphi.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\cos\omega' - \cos\omega'', \ \cos\omega'' - \cos\omega, \ \cos\omega - \cos\omega',$$

d addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung:

15) $$\left.\begin{array}{l} \cot\sigma \sin\omega \ (\cos\omega' - \cos\omega'') \\ + \cot\sigma' \sin\omega' \ (\cos\omega'' - \cos\omega) \\ + \cot\sigma'' \sin\omega'' \ (\cos\omega - \cos\omega') \end{array}\right\} = 0$$

r

16) $$\left.\begin{array}{l}\cot\sigma\,\sin\omega\,\sin\frac{1}{2}(\omega'+\omega'')\,\sin\frac{1}{2}(\omega'-\omega'')\\ +\cot\sigma'\,\sin\omega'\,\sin\frac{1}{2}(\omega''+\omega)\,\sin\frac{1}{2}(\omega''-\omega)\\ +\cot\sigma''\,\sin\omega''\sin\frac{1}{2}(\omega+\omega')\,\sin\frac{1}{2}(\omega-\omega')\end{array}\right\}=0.$$

II. Ferner wollen wir annehmen, dass den Declinationen δ, δ', δ'' und den Höhen h, h', h''; oder den Declinationen δ, δ', δ'' und den Azimuthen ω, ω', ω''; oder den Höhen h, h', h'' und den Azimuthen ω, ω', ω'' dreier Sterner die gleichen Stundenwinkel σ, σ, σ entsprechen.

Dann haben wir zuvörderst nach 5) die drei folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\sin h &= \sin\delta\,\sin\varphi+\cos\sigma\cos\delta\,\cos\varphi,\\ \sin h' &= \sin\delta'\,\sin\varphi+\cos\sigma\cos\delta'\cos\varphi,\\ \sin h'' &= \sin\delta''\sin\varphi+\cos\sigma\cos\delta''\cos\varphi.\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin(\delta'-\delta''),\ \sin(\delta''-\delta),\ \sin(\delta-\delta')$$

und addirt sie dann zu einander; so erhält man, weil, wie sich leicht zeigen lässt,

$$\begin{aligned}&\sin\delta\,\sin(\delta'-\delta'')+\sin\delta'\,\sin(\delta''-\delta)+\sin\delta''\,\sin(\delta-\delta')=0,\\ &\cos\delta\,\sin(\delta'-\delta'')+\cos\delta'\,\sin(\delta''-\delta)+\cos\delta''\,\sin(\delta-\delta')=0\end{aligned}$$

ist, die Gleichung

17) $$\sin h\,\sin(\delta'-\delta'')+\sin h'\,\sin(\delta''-\delta)+\sin h''\,\sin(\delta-\delta')=0.$$

Ferner hat man nach 8) die drei folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\cos\varphi\,\mathrm{tang}\,\delta &= \cos\sigma\,\sin\varphi-\sin\sigma\,\cot\omega,\\ \cos\varphi\,\mathrm{tang}\,\delta' &= \cos\sigma\,\sin\varphi-\sin\sigma\,\cot\omega',\\ \cos\varphi\,\mathrm{tang}\,\delta'' &= \cos\sigma\,\sin\varphi-\sin\sigma\,\cot\omega''.\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\mathrm{tang}\,\delta'-\mathrm{tang}\,\delta'',\ \mathrm{tang}\,\delta''-\mathrm{tang}\,\delta,\ \mathrm{tang}\,\delta-\mathrm{tang}\,\delta'$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung:

18) $$\left.\begin{array}{l}\cot\omega\,(\mathrm{tang}\,\delta'-\mathrm{tang}\,\delta'')\\ +\cot\omega'\,(\mathrm{tang}\,\delta''-\mathrm{tang}\,\delta)\\ +\cot\omega''(\mathrm{tang}\,\delta-\mathrm{tang}\,\delta')\end{array}\right\}=0$$

oder

19) $$\left.\begin{array}{l}\mathrm{tang}\,\delta\,(\cot\omega'-\cot\omega'')\\ +\mathrm{tang}\,\delta'\,(\cot\omega''-\cot\omega)\\ +\mathrm{tang}\,\delta''\,(\cot\omega-\cot\omega')\end{array}\right\}=0,$$

oder

$$20)\quad \left.\begin{aligned} &\cot\omega\ \frac{\sin(\delta'-\delta'')}{\cos\delta'\cos\delta''}\\ &+\cot\omega'\ \frac{\sin(\delta''-\delta)}{\cos\delta''\cos\delta}\\ &+\cot\omega''\frac{\sin(\delta-\delta')}{\cos\delta\cos\delta'}\end{aligned}\right\}=0,$$

oder

$$21)\quad \left.\begin{aligned} &\cot\omega\cos\delta\sin(\delta'-\delta'')\\ &+\cot\omega'\cos\delta'\sin(\delta''-\delta)\\ &+\cot\omega''\cos\delta''\sin(\delta-\delta')\end{aligned}\right\}=0,$$

oder

$$22)\quad \left.\begin{aligned} &\tang\delta\ \frac{\sin(\omega'-\omega'')}{\sin\omega'\sin\omega''}\\ &+\tang\delta'\ \frac{\sin(\omega''-\omega)}{\sin\omega''\sin\omega}\\ &+\tang\delta''\frac{\sin(\omega-\omega')}{\sin\omega\sin\omega'}\end{aligned}\right\}=0,$$

oder

$$23)\quad \left.\begin{aligned} &\tang\delta\sin\omega\sin(\omega'-\omega'')\\ &+\tang\delta'\sin\omega'\sin(\omega''-\omega)\\ &+\tang\delta''\sin\omega''\sin(\omega-\omega')\end{aligned}\right\}=0.$$

Endlich ist nach 7)

$$\begin{aligned}\cos\varphi\tang h &= \cot\sigma\sin\omega\ -\cos\omega\sin\varphi,\\ \cos\varphi\tang h' &= \cot\sigma\sin\omega'-\cos\omega'\sin\varphi,\\ \cos\varphi\tang h'' &= \cot\sigma\sin\omega''-\cos\omega''\sin\varphi.\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin(\omega'-\omega''),\ \sin(\omega''-\omega),\ \sin(\omega-\omega')$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die folgende Gleichung:

$$24)\quad \left.\begin{aligned} &\tang h\ \sin(\omega'-\omega'')\\ &+\tang h'\ \sin(\omega''-\omega)\\ &+\tang h''\sin(\omega-\omega')\end{aligned}\right\}=0.$$

III. Den Declinationen δ, δ', δ'' und den Höhen h, h', h''; oder den Declinationen δ, δ', δ'' und den Stundenwinkeln σ, σ', σ'';

oder den Höhen h, h', h'' und den Stundenwinkeln σ, σ', σ'' dreier Sterne mögen jetzt die gleichen Azimuthe ω, ω, ω entsprechen.

Dann ist zuvörderst nach 6):

$$\begin{aligned}\sin\delta &= \sin h \sin\varphi - \cos\omega\cos h \cos\varphi,\\ \sin\delta' &= \sin h' \sin\varphi - \cos\omega\cos h' \cos\varphi,\\ \sin\delta'' &= \sin h'' \sin\varphi - \cos\omega\cos h'' \cos\varphi.\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin(h'-h''),\ \sin(h''-h),\ \sin(h-h')$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung:

25) $$\sin\delta\sin(h'-h'') + \sin\delta'\sin(h''-h) + \sin\delta''\sin(h-h') = 0.$$

Ferner ist nach 8):

$$\begin{aligned}\cos\varphi\,\mathrm{tang}\,\delta &= \cos\sigma\sin\varphi - \sin\sigma\cot\omega,\\ \cos\varphi\,\mathrm{tang}\,\delta' &= \cos\sigma'\sin\varphi - \sin\sigma'\cot\omega,\\ \cos\varphi\,\mathrm{tang}\,\delta'' &= \cos\sigma''\sin\varphi - \sin\sigma''\cot\omega.\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin(\sigma'-\sigma''),\ \sin(\sigma''-\sigma),\ \sin(\sigma-\sigma')$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung.

26) $$\left.\begin{aligned}&\mathrm{tang}\,\delta\ \sin(\sigma'-\sigma'')\\ +&\mathrm{tang}\,\delta'\sin(\sigma''-\sigma)\\ +&\mathrm{tang}\,\delta''\sin(\sigma-\sigma')\end{aligned}\right\} = 0.$$

Endlich ist nach 7):

$$\begin{aligned}\cos\varphi\,\mathrm{tang}\,h &= \cot\sigma\sin\omega - \cos\omega\sin\varphi,\\ \cos\varphi\,\mathrm{tang}\,h' &= \cot\sigma'\sin\omega - \cos\omega\sin\varphi,\\ \cos\varphi\,\mathrm{tang}\,h'' &= \cot\sigma''\sin\omega - \cos\omega\sin\varphi.\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen nach der Reihe mit

$$\cot\sigma'-\cot\sigma'',\ \cot\sigma''-\cot\sigma,\ \cot\sigma-\cot\sigma',$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung

27) $$\left.\begin{aligned}&\mathrm{tang}\,h\ (\cot\sigma'-\cot\sigma'')\\ +&\mathrm{tang}\,h'\ (\cot\sigma''-\cot\sigma)\\ +&\mathrm{tang}\,h''\ (\cot\sigma-\cot\sigma')\end{aligned}\right\} = 0,$$

oder

28) $$\left.\begin{array}{l}\cot\sigma\ (\operatorname{tang}h'-\operatorname{tang}h'')\\ +\cot\sigma'\ (\operatorname{tang}h''-\operatorname{tang}h)\\ +\cot\sigma''\ (\operatorname{tang}h-\operatorname{tang}h')\end{array}\right\}=0,$$

oder

29) $$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tang}h\ \dfrac{\sin(\sigma'-\sigma'')}{\sin\sigma'\ \sin\sigma''}\\ +\operatorname{tang}h'\ \dfrac{\sin(\sigma''-\sigma)}{\sin\sigma''\ \sin\sigma}\\ +\operatorname{tang}h''\dfrac{\sin(\sigma-\sigma')}{\sin\sigma\ \sin\sigma'}\end{array}\right\}=0$$

oder

30) $$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tang}h\ \sin\sigma\ \sin(\sigma'-\sigma'')\\ +\operatorname{tang}h'\ \sin\sigma'\ \sin(\sigma''-\sigma)\\ +\operatorname{tang}h''\sin\sigma'\sin(\sigma-\sigma')\end{array}\right\}=0,$$

oder

31) $$\left.\begin{array}{l}\cot\sigma\ \dfrac{\sin(h'-h'')}{\cos h'\ \cos h''}\\ +\cot\sigma'\ \dfrac{\sin(h''-h)}{\cos h''\ \cos h}\\ +\cot\sigma''\ \dfrac{\sin(h-h')}{\cos h\ \cos h'}\end{array}\right\}=0$$

oder

32) $$\left.\begin{array}{l}\cot\sigma\ \cos h\ \sin(h'-h'')\\ +\cot\sigma'\ \cos h'\ \sin(h''-h)\\ +\cot\sigma''\cos h''\sin(h-h')\end{array}\right\}=0.$$

IV. Endlich wollen wir nun auch annehmen, dass den Höhen h, h', h'' und den Azimuthen ω, ω', ω''; oder den Höhen h, h', h'' und den Stundenwinkeln σ, σ', σ''; oder den Azimuthen ω, ω', ω'' und den Stundenwinkeln σ, σ', σ'' dreier Sterne (oder eines Sterns) die gleichen Declinationen δ, δ, δ entsprechen.

Dann ist zuvörderst nach 6):

$$\sin\delta=\sin h\ \sin\varphi-\cos\omega\ \cos h\ \cos\varphi,$$
$$\sin\delta=\sin h'\ \sin\varphi-\cos\omega'\ \cos h'\ \cos\varphi,$$
$$\sin\delta=\sin h''\sin\varphi-\cos\omega''\cos h''\cos\varphi.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin h'-\sin h'',\ \sin h''-\sin h,\ \sin h-\sin h'$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung:

$$33)\quad \left.\begin{array}{l} \cos\omega\,\cos h\,(\sin h' - \sin h'') \\ +\cos\omega'\,\cos h'\,(\sin h'' - \sin h) \\ +\cos\omega''\cos h''(\sin h - \sin h') \end{array}\right\} = 0$$

oder

$$34)\quad \left.\begin{array}{l} \cos\omega\,\cos h\,\cos\frac{1}{2}(h'+h'')\sin\frac{1}{2}(h'-h'') \\ +\cos\omega'\cos h'\cos\frac{1}{2}(h''+h)\sin\frac{1}{2}(h''-h) \\ +\cos\omega''\cos h''\cos\frac{1}{2}(h+h')\sin\frac{1}{2}(h-h') \end{array}\right\} = 0.$$

Nach 5) ist ferner

$$\begin{aligned} \sin h &= \sin\delta\sin\varphi + \cos\sigma\,\cos\delta\cos\varphi, \\ \sin h' &= \sin\delta\sin\varphi + \cos\sigma'\cos\delta\cos\varphi, \\ \sin h'' &= \sin\delta\sin\varphi + \cos\sigma''\cos\delta\cos\varphi. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\cos\sigma' - \cos\sigma'',\ \cos\sigma'' - \cos\sigma,\ \cos\sigma - \cos\sigma'$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung

$$35)\quad \left.\begin{array}{l} \sin h\,(\cos\sigma' - \cos\sigma'') \\ +\sin h'\,(\cos\sigma'' - \cos\sigma) \\ +\sin h''(\cos\sigma - \cos\sigma') \end{array}\right\} = 0$$

oder

$$36)\quad \left.\begin{array}{l} \cos\sigma\,(\sin h' - \sin h'') \\ +\cos\sigma'\,(\sin h'' - \sin h) \\ +\cos\sigma''(\sin h - \sin h') \end{array}\right\} = 0$$

oder

$$37)\quad \left.\begin{array}{l} \sin h\,\sin\frac{1}{2}(\sigma'+\sigma'')\sin\frac{1}{2}(\sigma'-\sigma'') \\ +\sin h'\sin\frac{1}{2}(\sigma''+\sigma)\sin\frac{1}{2}(\sigma''-\sigma) \\ +\sin h''\sin\frac{1}{2}(\sigma+\sigma')\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma') \end{array}\right\} = 0,$$

oder

$$38)\quad \left.\begin{array}{l} \cos\sigma\,\cos\frac{1}{2}(h'+h'')\sin\frac{1}{2}(h'-h'') \\ +\cos\sigma'\cos\frac{1}{2}(h''+h)\sin\frac{1}{2}(h''-h) \\ +\cos\sigma''\cos\frac{1}{2}(h+h')\sin\frac{1}{2}(h-h') \end{array}\right\} = 0.$$

Nach 8) ist endlich:

$$\begin{aligned} \cos\varphi\,\mathrm{tang}\,\delta &= \cos\sigma\,\sin\varphi - \sin\sigma\cot\omega, \\ \cos\varphi\,\mathrm{tang}\,\delta &= \cos\sigma'\sin\varphi - \sin\sigma'\cot\omega', \\ \cos\varphi\,\mathrm{tang}\,\delta &= \cos\sigma''\sin\varphi - \sin\sigma''\cot\omega''. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\cos\sigma' - \cos\sigma'', \quad \cos\sigma'' - \cos\sigma, \quad \cos\sigma - \cos\sigma'$$

d addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung

$$39) \quad \left.\begin{aligned} &\cot\omega \sin\sigma (\cos\sigma' - \cos\sigma'') \\ &+ \cot\omega' \sin\sigma' (\cos\sigma'' - \cos\sigma) \\ &+ \cot\omega'' \sin\sigma'' (\cos\sigma - \cos\sigma') \end{aligned}\right\} = 0$$

oder

$$40) \quad \left.\begin{aligned} &\cot\omega \sin\sigma \sin\tfrac{1}{2}(\sigma'+\sigma'') \sin\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma'') \\ &+ \cot\omega' \sin\sigma' \sin\tfrac{1}{2}(\sigma''+\sigma) \sin\tfrac{1}{2}(\sigma''-\sigma) \\ &+ \cot\omega'' \sin\sigma'' \sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma') \sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma') \end{aligned}\right\} = 0.$$

Dies sind die Relationen, deren kurze Entwickelung der Zweck des vorliegenden Aufsatzes war.

VIII.

Ueber eine astronomische Aufgabe.

Von

dem Herausgeber.

Dass man aus den in demselben Azimuth etwa mit einem Theodoliten gemessenen Höhen zweier Sterne, deren Positionen auf der Sphäre, d. h. deren Rectascensionen und Declinationen, bekannt sind, die Polhöhe und die Zeit bestimmen kann, ist hinreichend bekannt. Bezeichnen wir nämlich die Polhöhe durch φ, die in den Azimuthen ω, ω', welche von Süden an nach Westen hin von 0 bis 360° gezählt werden sollen, gemessenen Höhen zweier Sterne, deren Declinationen δ, δ' sind, durch h, h'; so haben wir bekanntlich nach den Fundamentalgleichungen der sphärischen Astronomie die beiden folgenden allgemein gültigen Gleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} \sin\delta = \sin h \sin\varphi - \cos\omega \cos h \cos\varphi, \\ \sin\delta' = \sin h' \sin\varphi - \cos\omega' \cos h' \cos\varphi. \end{cases}$$

Setzen wir nun $\omega' = \omega + (\omega' - \omega)$, so wird

$$\begin{aligned} \sin\delta' &= \sin h' \sin\varphi - \cos(\omega' - \omega) \cos\omega \cos h' \cos\varphi \\ &\quad + \sin(\omega' - \omega) \sin\omega \cos h' \cos\varphi \\ &= \sin h' \sin\varphi - \cos\omega \cos h' \cos\varphi \\ &\quad + 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega' - \omega)^2 \cos\omega \cos h' \cos\varphi \\ &\quad + 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega' - \omega) \cos\tfrac{1}{2}(\omega' - \omega) \sin\omega \cos h' \cos\varphi \\ &= \sin h' \sin\varphi - \cos\omega \cos h' \cos\varphi \\ &\quad + 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega' - \omega) \sin\tfrac{1}{2}(\omega' + \omega) \cos h' \cos\varphi, \end{aligned}$$

und folglich, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned} &\sin\delta \cos h' - \sin\delta' \cos h \\ &= \sin(h - h') \sin\varphi - 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega' - \omega) \sin\tfrac{1}{2}(\omega' + \omega) \cos h \cos h' \cos\varphi, \end{aligned}$$

also

$$2)\quad \sin\varphi = \frac{\sin\delta \cos h' - \sin\delta' \cos h}{\sin(h - h')} - \frac{2\sin\tfrac{1}{2}(\omega - \omega')\sin\tfrac{1}{2}(\omega + \omega') \cos h \cos h'}{\sin(h - h')} \cos\varphi.$$

Sind nun die beiden Sterne in demselben Azimuth beobachtet worden, so ist $\omega = \omega'$, also $\omega - \omega' = 0$, und folglich

$$3)\quad \sin\varphi = \frac{\sin\delta \cos h' - \sin\delta' \cos h}{\sin(h - h')}.$$

Ist nicht genau $\omega - \omega' = 0$, so ist nach 2)

$$-\frac{2\sin\tfrac{1}{2}(\omega - \omega')\sin\tfrac{1}{2}(\omega + \omega') \cos h \cos h'}{\sin(h - h')} \cos\varphi$$

der Fehler, mit welchem $\sin\varphi$ behaftet ist, wenn man genau $\omega - \omega' = 0$ setzt, woraus man sich leicht Regeln abstrahiren wird, wie die Beobachtungen am vortheilhaftesten anzustellen sind, indem man z. B. sogleich übersieht, dass der Fehler sehr gross werden kann, wenn nahe $\sin(h - h') = 0$ ist, was man also zu vermeiden haben wird.

Wie man, wenn man die Polhöhe gefunden hat, dann leicht noch das Azimuth, die Stundenwinkel der Sterne, und aus diesen mittelst der bekannten Rectascensionen der Sterne die Zeit bestimmen kann, ist aus den Elementen der Astronomie hinreichend bekannt, und bedarf hier keiner weiteren Erläuterung.

Nicht so bekannt wie das Vorhergehende dürfte es sein, dass man, wenn man mit den Messungen der Höhen zweier bekannten

Sterne in demselben Azimuth noch die Messung der Höhe eines dritten bekannten Sterns in einem von dem vorhergehenden Azimuth um 180° verschiedenen Azimuth verbindet, was bekanntlich bei der Anwendung des Theodoliten nur eine Drehung des Fernrohrs um den unverrückt stehen gebliebenen Höhenkreis erfordert, ausser der Polhöhe auch noch den Collimationsfehler des Instruments bestimmen, oder vielmehr die Polhöhe unabhängig von dem Collimationsfehler des Instrumentes erhalten kann, was mir in praktischer Rücksicht nicht ganz unwichtig und uninteressant zu sein scheint.

Bezeichnen wir nämlich die Declination und die gemessene Höhe des dritten Sterns respective durch δ'' und h'', so haben wir die drei folgenden Gleichungen:

$$4)\quad \begin{cases} \sin\delta &= \sin h \sin\varphi - \cos\omega\cos h\cos\varphi, \\ \sin\delta' &= \sin h' \sin\varphi - \cos\omega\cos h'\cos\varphi, \\ \sin\delta'' &= \sin h'' \sin\varphi + \cos\omega\cos h''\cos\varphi. \end{cases}$$

Multipliciren wir nun diese drei Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin(h'+h''),\ \sin(h+h''),\ \sin(h-h'),$$

und ziehen dann die zweite und dritte von der ersten ab, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &\sin\delta\sin(h'+h'') - \sin\delta'\sin(h+h'') - \sin\delta''\sin(h-h') \\ &= \{\sin h\sin(h'+h'') - \sin h'\sin(h+h'') - \sin h''\sin(h-h')\}\sin\varphi \\ &- \{\cos h\sin(h'+h'') - \cos h'\sin(h+h'') + \cos h''\sin(h-h')\}\cos\omega\cos\varphi. \end{aligned}$$

Es ist aber, wie man durch leichte Entwickelung findet:

$$5)\quad \begin{cases} \sin h\sin(h'+h'') - \sin h'\sin(h+h'') - \sin h''\sin(h-h') = 0, \\ \cos h\sin(h'+h'') - \cos h'\sin(h+h'') + \cos h''\sin(h-h') = 0; \end{cases}$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$6)\quad \sin\delta\sin(h'+h'') - \sin\delta'\sin(h+h'') - \sin\delta''\sin(h-h') = 0.$$

Hierbei sind die gemessenen Höhen h, h', h'' sämmtlich als fehlerfrei vorausgesetzt worden. Ist aber das Instrument mit einem Collimationsfehler oder Indexfehler i behaftet, und sind also $h+i$, $h'+i$, $h''+i$ die wahren Höhen *), so hat man natürlich statt der Gleichung 6) die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} &\sin\delta\ \sin\{(h'+i)+(h''+i)\} \\ -&\sin\delta'\sin\{(h+i)+(h''+i)\} \\ -&\sin\delta''\sin\{(h+i)-(h'+i)\} \end{aligned}\right\} = 0,$$

*) Wobei vorausgesetzt wird, dass die gemessenen Höhen wegen der Refraction gehörig corrigirt sind.

d. i.

$$7)\qquad \left.\begin{array}{l}\sin\delta\ \sin(h'+h''+2i)\\ -\sin\delta'\ \sin(h+h''+2i)\\ -\sin\delta''\sin(h-h')\end{array}\right\}=0.$$

Aus dieser Gleichung erhält man leicht:

$$\left.\begin{array}{l}\{\sin\delta\ \sin(h'+h'')-\sin\delta'\ \sin(h+h'')\}\cos 2i\\ +\{\sin\delta\cos(h'+h'')-\sin\delta'\cos(h+h'')\}\sin 2i\end{array}\right\}=\sin\delta''\sin h-h'),$$

und folglich, wenn man die Hülfsgrössen μ, Θ mittelst der Gleichungen

$$8)\qquad \left\{\begin{array}{l}\sin\delta\ \sin(h'+h'')-\sin\delta'\ \sin(h+h'')=\mu\sin\Theta,\\ \sin\delta\cos(h'+h'')-\sin\delta'\cos(h+h'')=\mu\cos\Theta\end{array}\right.$$

berechnet, was keine Schwierigkeit hat:

$$9)\qquad \mu\sin(\Theta+2i)=\sin\delta''\sin(h-h'),$$

also

$$10)\qquad \sin(\Theta+2i)=\frac{\sin\delta''\sin(h-h')}{\mu}.$$

Hat man mittelst dieser Gleichung den Collimationsfehler bestimmt, so kann man wegen desselben die gemessenen Höhen sämmtlich corrigiren, und muss dann natürlich, wenn man mittelst der Formel 3) die Polhöhe bestimmt, in diese Formel die wegen des Collimationsfehlers gehörig corrigirten gemessenen Höhen einführen.

Endlich verdient noch bemerkt zu werden, dass, wenn man in demselben Azimuth die Höhen dreier bekannter Sterne gemessen hat, und die Refraction den Tangenten der scheinbaren Zenithdistanzen proportional zu setzen berechtigt ist, die Refraction bestimmen kann, ohne den Collimationsfehler des Instrumentes gerade mit völliger Genauigkeit kennen zu müssen. Unter der gemachten Voraussetzung hat man nämlich die drei folgenden Gleichungen:

$$11)\qquad \left\{\begin{array}{l}\sin\delta=\sin h\ \sin\varphi-\cos\omega\cos h\ \cos\varphi,\\ \sin\delta'=\sin h'\ \sin\varphi-\cos\omega\cos h'\cos\varphi,\\ \sin\delta''=\sin h''\sin\varphi-\cos\omega\cos h''\cos\varphi.\end{array}\right.$$

Multiplicirt man nun diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin(h'-h''),\ \sin(h''-h),\ \sin(h-h');$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man, weil, wie man durch leichte Rechnung findet:

12) $$\begin{cases} \sin h \sin(h'-h'') + \sin h' \sin(h''-h) + \sin h'' \sin(h-h') = 0, \\ \cos h \sin(h'-h'') + \cos h' \sin(h''-h) + \cos h'' \sin(h-h') = 0 \end{cases}$$

ist, die Gleichung:

13) $$\sin\delta \sin(h'-h'') + \sin\delta' \sin(h''-h) + \sin\delta'' \sin(h-h') = 0.$$

Hierbei sind die Höhen als fehlerfrei vorausgesetzt worden. Setzen wir aber die Refraction den Tangenten der scheinbaren Zenithdistanzen proportional, so sind, wenn ϱ eine constante Grösse bezeichnet, die wegen der Refraction corrigirten Höhen:

$$h - \varrho \cot h,\ h' - \varrho \cot h',\ h'' - \varrho \cot h'';$$

und die Gleichung 13) nimmt also eigentlich folgende Gestalt an:

14) $$\left.\begin{aligned} &\sin\delta \sin\{h'-h''-\varrho(\cot h'-\cot h'')\} \\ &+ \sin\delta' \sin\{h''-h-\varrho(\cot h''-\cot h)\} \\ &+ \sin\delta'' \sin\{h-h'-\varrho(\cot h-\cot h')\} \end{aligned}\right\} = 0$$

oder

15) $$\left.\begin{aligned} &\sin\delta \sin\left\{h'-h''+\varrho\frac{\sin(h'-h'')}{\sin h' \sin h''}\right\} \\ &+ \sin\delta' \sin\left\{h''-h+\varrho\frac{\sin(h''-h)}{\sin h'' \sin h}\right\} \\ &+ \sin\delta'' \sin\left\{h-h'+\varrho\frac{\sin(h-h')}{\sin h \sin h'}\right\} \end{aligned}\right\} = 0.$$

Da die Differenzen $h-h'$, $h'-h''$, $h''-h$ von dem Collimationsfehler unabhängig sind und ϱ immer eine sehr kleine Grösse ist, so wird die Richtigkeit der vorhergehenden Gleichung nicht wesentlich gestört werden, wenn wegen des nicht mit völliger Genauigkeit bekannten Collimationsfehlers eine nur unvollkommene Correction der gemessenen Höhen möglich gewesen ist.

Da die Grössen

$$\varrho\frac{\sin(h'-h'')}{\sin h' \sin h''},\ \varrho\frac{\sin(h''-h)}{\sin h'' \sin h},\ \varrho\frac{\sin(h-h')}{\sin h \sin h'}$$

meistens der Null sehr nahe kommen werden, so giebt die Gleichung 15) nach gehöriger Entwickelung die folgende näherungsweise richtige Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} &\sin\delta \sin(h'-h'') + \sin\delta' \sin(h''-h) + \sin\delta'' \sin(h-h') \\ &+ \tfrac{1}{4}\varrho\left\{\frac{\sin\delta \sin 2(h'-h'')}{\sin h' \sin h''} + \frac{\sin\delta' \sin 2(h''-h)}{\sin h'' \sin h} + \frac{\sin\delta'' \sin 2(h-h')}{\sin h \sin h'}\right\} \end{aligned}\right\} = 0,$$

also

$$16)\ \tfrac{1}{2}\varrho = -\frac{\sin\delta\sin(h'-h'') + \sin\delta'\sin(h''-h) + \sin\delta''\sin(h-h')}{\dfrac{\sin\delta\sin 2(h'-h'')}{\sin h'\sin h''} + \dfrac{\sin\delta'\sin 2(h''-h)}{\sin h''\sin h} + \dfrac{\sin\delta''\sin 2(h-h')}{\sin h\sin h'}}.$$

Hat man mittelst dieser Formel einen ersten Näherungswerth von ϱ gefunden, so wird man mit Hülfe der Gleichung 15) diese Grösse mittelst der bekannten Näherungsmethoden auch leicht genauer finden können.

Fasset man jetzt alles Vorhergehende zusammen, so wird sich überhaupt folgende Methode zur Bestimmung der Polhöhe *) ergeben.

In demselben Azimuth messe man die Höhen dreier Sterne, deren Positionen auf der Sphäre bekannt sind, und in einem von dem vorhergehenden Azimuth um 180° verschiedenen Azimuth die Höhe eines vierten Sterns, dessen Position auf der Sphäre ebenfalls bekannt ist, wobei man sich am besten eines Theodoliten oder auch eines mit einem zweckmässig eingerichteten Stativ versehenen Sextanten bedient. Ist nun durch eine der verschiedenen hinreichend bekannten Methoden der Collimationsfehler des Instrumentes annähernd bestimmt worden, so corrigire man wegen desselben die gemessenen Höhen der drei ersten Sterne, und bestimme hierauf die Refraction mittelst der Formeln 16) und 15). Dann corrigire man die gemessenen Höhen des ersten, zweiten und vierten Sterns wegen der Refraction, indem man immer (was freilich auch nur näherungsweise richtig ist) die Refractionen den Tangenten der scheinbaren Zenithdistanzen proportional setzt, und bestimme mittelst der Gleichungen 8) und 10) den Collimationsfehler. Nun corrigire man endlich die schon wegen der Refraction corrigirten gemessenen Höhen des ersten und zweiten Sterns noch wegen des jetzt genau ermittelten Collimationsfehlers, und bestimme die Polhöhe mittelst der Gleichung 3). Dass man sich übrigens bei diesem hier nur im Allgemeinen skizzirten Verfahren auch der sogenannten Methode der successiven Näherungen bedienen und dasselbe dadurch zu grösserer Genauigkeit erheben kann, versteht sich von selbst.

---

*) Und dann ferner auch der Zeit, was nicht weiter erläutert zu werden braucht.

IX.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Aus der Gleichung

$$abc = x\{a\sqrt{4x^2-a^2} + b\sqrt{4x^2-b^2} + c\sqrt{4x^2-c^2}\}$$

durch Rechnung den Ausdruck

$$x = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}},$$

wo $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ist, herzuleiten.

Ein Dreieck durch eine gerade Linie so in zwei Theile zu theilen, dass die beiden Theile in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen, und die ihre Schwerpunkte verbindende gerade Linie auf der Theilungslinie senkrecht steht.

Die vier gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte der drei Höhen der vier Dreiecke, welche von den Seiten und den beiden Diagonalen eines in einen Kreis beschriebenen beliebigen Vierecks gebildet werden, liegen jederzeit auf dem Umfange eines dem Kreise, in welchen das Viereck beschrieben ist, gleichen Kreises.

Wenn A und B die Flächenräume zweier um und in einen Kreis beschriebenen regulären Polygone von gleicher Seitenzahl sind, so ist die Differenz $A-B$ der Fläche eines regulären Polygons von derselben Seitenzahl gleich, welches entweder um oder in einen Kreis beschrieben ist, dessen Halbmesser im ersten Falle der halben Seite des Polygons B, im zweiten Falle der halben Seite des Polygons A gleich ist.

Den Inhalt des Körpers zu bestimmen, welcher entst
wenn ein reguläres Polygon — ein reguläres Dreieck, Vier
Fünfeck, Sechseck, u. s. w. — sich um eine seiner Seiten
umdreht.

Bezeichnen wir die Seite des regulären Vielecks durch a,
körperlichen Inhalt des durch Umdrehung desselben um eine se
Seiten entstandenen Körpers durch V; so ist

für das reguläre Dreieck: $V = \frac{1}{4}\pi a^3$;
für das reguläre Viereck: $V = \pi a^3$;
für das reguläre Fünfeck: $V = \frac{1}{4}\pi a^3(5+2\sqrt{5})$;
für das reguläre Sechseck: $V = \frac{3}{2}\pi a^3$;
für das reguläre Achteck: $V = 2\pi a^3(3+2\sqrt{2})$;
für das reguläre Zehneck: $V = \frac{5}{2}\pi a^3(5+2\sqrt{5})$;
für das reguläre Zwölfeck: $V = 3\pi a^3(7+4\sqrt{3})$.

Man kann diese körperlichen Räume auch sowohl durch
Halbmesser des um, als auch durch den Halbmesser des in
reguläre Vieleck beschriebenen Kreises ausdrücken. Bezeich
z. B. r den Halbmesser des umschriebenen Kreises, so ist

für das reguläre Dreieck: $V = \frac{3}{4}\pi r^3\sqrt{3}$;
für das reguläre Viereck: $V = 2\pi r^3\sqrt{2}$;
für das reguläre Fünfeck: $V = \frac{5}{4}\pi r^3\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
für das reguläre Sechseck: $V = \frac{3}{2}\pi r^3$;
für das reguläre Achteck: $V = 2\pi r^3\sqrt{4+2\sqrt{2}}$;
für das reguläre Zehneck: $V = \frac{5}{2}\pi r^3\sqrt{5}$;
für das reguläre Zwölfeck: $V = \frac{3}{2}\pi r^3(\sqrt{2}+\sqrt{6})$.

Unter allen Prismen von derselben Grundfläche und Höhe
das gerade Prisma die grösste Oberfläche.

Wenn man aus einem Punkte O in der Verlängerung ei
Durchmessers AB eines Kreises eine denselben in den bei
Punkten M und M' schneidende gerade Linie, und nach
Punkten M und M' die Halbmesser CM und CM' des Krei
zieht, so soll man beweisen, dass das Product

$$\text{tang}\,\frac{MCO}{2} \cdot \text{tang}\,\frac{M'CO}{2}$$

eine constante Grösse ist, welche Lage man auch der von
Punkte O aus gezogenen Secante des Kreises geben mag.

Wenn man auf eine feste gerade Linie in der Ebene einer Parabel von den Endpunkten M, M' einer durch den Brennpunkt F gehenden Chorde derselben die Perpendikel MN, $M'N'$ fällt, so ist, was man auch der durch den Brennpunkt F gehenden Chorde MM' für eine Lage geben mag, die Summe

$$\frac{MN}{MF} + \frac{M'N'}{M'F}$$

eine constante Grösse.

In jeder Parabel steht die Summe der Entfernungen der Endpunkte einer jeden durch den Brennpunkt gehenden Sehne von dem Brennpunkte zu dem Producte dieser Entfernungen in einem constanten Verhältnisse.

Den geometrischen Ort des Scheitels eines rechten Winkels zu bestimmen, dessen Schenkel auf einem gegebenen Kegelschnitte senkrecht stehen.

Wenn zwei Kreise, der eine mit constantem, der andere mit veränderlichem Halbmesser, sich von Aussen berühren, und an diese beiden Kreise eine gemeinschaftliche Berührende gezogen wird, so liegen die sämmtlichen Berührungspunkte mit dem Kreise, dessen Halbmesser als veränderlich angenommen wird, in einer Cissoide.

X.

Miscellen.

Auszug aus einem Schreiben des Herrn Schulraths J. H. T. Müller, Directors des Realgymnasiums zu Wiesbaden, an den Herausgeber.

Da Sie jetzt durch zwei Abhandlungen, welche ich mit vielem Interesse gelesen, die Aufmerksamkeit auf die kubischen Gleichungen wieder hingelenkt haben, so erlaube ich mir die Behandlungsweise in Erinnerung zu bringen, deren sich Kramp in seiner Arithmétique universelle (von der ich vor Jahren eine Uebersetzung

gefertigt, die aber nicht erschienen ist) bedient hat und die darum der Vergessenheit entrissen zu werden verdiente, weil sie auf die Wegschaffung des zweiten Gliedes verzichtet und eine tiefe Einsicht in den ganzen Gang der Untersuchung gewährt. Derselbe geht von der einfachsten Gleichung $x^3-1=0$ aus und bezeichnet sehr passend die verdoppelten beiden imaginären Wurzeln derselben $-1+i\sqrt{3}$ und $-1-i\sqrt{3}$ mit $2J$ und $2J''$. Daran schliesst sich unmittelbar die Gleichung $x^3-C=0$, die für $C=h^3$ die Wurzeln h, hJ', hJ'' giebt. Hierauf behandelt Kramp den Fall $x^3-3Ax^2+3A^2x-C=0$, worin die drei ersten Glieder Bestandtheile eines vollständigen Kubus sind, so dass man für $C-A^3=h^3$ die drei Wurzeln $A+h$, $A+hJ'$, $A+hJ''$ erhält. Nach Erörterung einiger anderer Fälle geht derselbe zur Aufsuchung der Bedingungen über, welchen die Coefficienten der vollständigen allgemeinen Gleichung

$$x^3-Ax^2+Bx-C=0$$

zu genügen haben, damit 1) eine der Wurzeln das arithmetische Mittel zwischen den beiden übrigen, 2) die zweite Wurzel gleich der dritten, 3) nur eine Wurzel reell und 4) keine Wurzel weder einer andern gleich noch auch imaginär sei.

1. Für α, β, γ als Wurzeln der Gleichung und $2\beta=\alpha+\gamma$ erhält man $3\beta=\alpha+\beta+\gamma=A$, also $\beta=\frac{1}{3}A$ als zweite Wurzel. Da hiernach

$$x^3-Ax^2+Bx-C=(x-\beta)(x^2-2\beta x-2\beta^2+B)+(-2\beta^3+B\beta-C)$$

ist, so giebt der zweite Factor des ersten Gliedes die beiden übrigen Wurzeln $3x=A\pm\sqrt{3}.\sqrt{(A^2-3B)}$ und der Divisionsrest $-2\beta^3+B\beta-C$, welcher unter der obigen Voraussetzung verschwinden muss, die Bedingungsgleichung für diese Annahme, nämlich

$$2A^3-9AB+27C=0.$$

2. Sind α, β, β die drei Wurzeln, se muss $\alpha+2\beta=A$, $2\alpha\beta+\beta^2=B$, $\alpha\beta^2=C$ sein. Durch Eliminirung von α aus der 1sten und 2ten Gleichung erhält man, wenn der schon in 1. vorkommende Ausdruck

$$A^2-3B=r^2$$

gesetzt wird, $3\beta=A\pm r$ und $3\alpha=A\mp 2r$. Durch Multiplication des Quadrats der ersten dieser beiden Gleichungen mit der zweiten erhält man

$$2A^3-9AB+27C=\mp 2r^3,$$

und wenn beiderseits quadrirt wird, die Bedingungsgleichung für zwei gleiche gleichstimmige Wurzeln, nämlich

$$(2A^3-9AB+27C)^2=4(A^2-3B)^3.$$

3. Sind zwei Wurzeln zugeordnete complexe Ausdrücke, also die drei Wurzeln α, $\lambda+i\mu$, $\lambda-i\mu$; so ist $\alpha+2\lambda=A$, $2\alpha\lambda+\lambda^2+\mu^2=B$, $\alpha(\lambda^2+\mu^2)=C$, woraus man

$$A^2-3B=(\alpha-\lambda)^2-3\mu^2, \text{ also } A^2-3B>(\alpha-\lambda)^2$$

und

$$2A^3-9AB+27C=2(\alpha-\lambda)^3+18(\alpha-\lambda)\mu^2,$$

also

$$(2A^3-9AB+27C)^2-4(A^2-3B)^3=|6(\alpha-\lambda)^2\mu\sqrt{3}+6\mu^3\sqrt{3}|^2>0$$
$$=R^2$$

erhält. Hieraus findet man

$$2A^3-9AB+27C+R=2(\alpha-\lambda+\mu\sqrt{3})^3=2p^3,$$
$$2A^3-9AB+27C-R=2(\alpha-\lambda-\mu\sqrt{3})^3=2q^3.$$

so dass p und q bekannt sind.

Werden die beiden Gleichungen

$$\alpha-\lambda+\mu\sqrt{3}=p,$$
$$\alpha-\lambda-\mu\sqrt{3}=q$$

durch Addition und Subtraction verbunden und zieht man die frühere Gleichung $\alpha+2\lambda=A$ hinzu, so ergiebt sich $3\alpha=A+p+q$, $6\lambda=2A-p-q$, $6\mu=(p-q)\sqrt{3}$. Es sind demnach

$$A+p+q,$$
$$A+pJ'+qJ'',$$
$$A+pJ''+qJ'$$

die dritten Theile der drei Wurzeln der Gleichung $x^3-Ax^2+Bx-C=0$, wenn die oben angegebene Bedingung statt findet.

4. Zur Betrachtung endlich des Falles dreier ungleicher reeller Wurzeln bahnt sich Kramp den Weg durch die Vergleichung des Productes der Unterschiede zwischen den drei kreisförmig geordneten Wurzeln x', x'', x''' des in 3. untersuchten Falles. Es ist nämlich

$$(x'-x'')(x''-x''')(x'''-x')=R.3i\sqrt{3},$$

woraus er folgert, dass R imaginär, also R^2 negativ sein muss, wenn die drei Wurzeln reell und ungleich sind, d. h. dass in diesem Falle stets

$$(3A^3-9AB+27C)^2<4(A^2-3B)^3$$

ist. Demnach wird jetzt

$$2A^3-9AB+27C+iR=2p^3,$$
$$2A^3-9AB+27C-iR=2q^3.$$

Setzt man, was erwiesenermassen erlaubt ist, $p=z+iy$, $q=z-iy$, so ergiebt sich, dass die Bestimmung der Werthe von z und y wiederum auf die Auflösung einer kubischen Gleichung von derselben Beschaffenheit führt, als die gegebene Gleichung war, und langt so zuletzt bei dem Casus irreducibilis an.

Bemerkung zu der Aufgabe des Herrn A. Ritman.

(Thl. VI. S. 330. des Archivs.)

Von dem Herrn Dr. T. Wittstein zu Hannover.

Es ist das Achsendreieck eines (schiefen) Kegels gegeben, und in einer Seitenlinie desselben ein Punkt. Man soll durch diesen Punkt Ebenen normal zur Ebene des Achsendreiecks legen, und den geometrischen Ort der Brennpunkte aller dadurch entstehenden Kegelschnitte angeben.

Der gegebene Punkt sei der Pol eines Polarcoordinaten-Systems, und r der Radius vector der gesuchten Curve, so hat man bekanntlich

$$r = a \pm \sqrt{a^2-b^2},$$

wenn a und b die beiden Halbachsen irgend eines Kegelschnitts — die erstere in der Ebene des Achsendreiecks, die zweite rechtwinklig darauf — bezeichnen und die Ellipse als Grundform der Schnitte angesehen wird. Hier sind a und b veränderliche Grössen, deren Ausdruck durch den veränderlichen Winkel des Systems und die gegebenen Constanten wir jedoch nicht hersetzen wollen.

Nun giebt es bekanntlich im schiefen Kegel zwei Schnitte durch den gegebenen Punkt, welche Kreise sind; in beiden wird also $b=a$, folglich auch $r=a$, und mithin vereinigen sich in jedem dieser Schnitte die beiden Arme des gesuchten geometrischen Orts in Einen Punkt. Zwischen beiden Schnitten aber wird, wovon man sich leicht durch Ausführung der Rechnung überzeugt, $b>a$, folglich r imaginär; es findet mithin hier keine Curve in der Ebene des Achsendreiecks statt, und damit pflegt man gewöhnlich eine derartige Betrachtung abzuschliessen.

Indessen können wir auch selbst in diesem Falle der Gleichung

$$r = a \pm \sqrt{a^2-b^2},$$

welche alsdann die Form annimmt

$$r = a \pm i\sqrt{b^2-a^2},$$

eine geometrische Bedeutung abgewinnen. Denken wir uns nämlich die Schnittebene als Ebene der complexen Zahlen, und in ihr die Achse der reellen Zahlen zusammenfallend mit der Achse

$2a$ und die Achse der imaginären Zahlen rechtwinklig darauf, so werden wir den complexen Radius vector construiren, indem wir von der Mitte der Achse $2a$ aus uns rechtwinklig von der Ebene des Achsendreiecks erheben, und zwar sowohl nach der einen als nach der andern Seite hin, um eine Entfernung $=\sqrt{b^2-a^2}$. Und in der That, wenn b die grosse und a die kleine Halbachse einer Ellipse bezeichnet, so liegt der Brennpunkt auf der Halbachse b um einen Abstand $=\sqrt{b^2-a^2}$ vom Mittelpunkte; folglich gelangen wir durch jene Construction wirklich zu den ausserhalb der Ebene des Achsendreiecks liegenden Brennpunkten. Es enthält mithin die Gleichung

$$r = a \pm \sqrt{a^2-b^2}$$

vollständig den geometrischen Ort aller Brennpunkte, welche in den gegebenen Schnittebenen enthalten sind; selbst diejenigen eingeschlossen, welche ausserhalb der Ebene des Achsendreiecks fallen.

Wir haben diese kurze Notiz vorzüglich desshalb nicht unterdrücken wollen, weil hier, wie es uns scheint, durch eine schlagende Thatsache die Coincidenz unserer geometrischen Interpretation der complexen Zahlen mit der Natur der geometrischen Grössenbeziehungen selbst dargethan wird.

Berichtigung.

Von dem Herrn Dr. Dippe, Oberlehrer am Gymnasium Fridericianum zu Schwerin.

In dem Archive Thl. VI. S. 333. wird die unbeschränkte Gültigkeit des Satzes: „Wenn die Sinus der Winkel eines ebenen Dreiecks eine arithmetische Progression bilden, so bilden auch jederzeit die Cotangenten der halben Winkel dieses Dreiecks eine arithmetische Progression," in Zweifel gezogen, indem dieselbe an die Bedingung geknüpft wird, dass $\cot\frac{1}{2}\alpha \cdot \cot\frac{1}{2}\gamma = 3$ sei.

Der Zweifel ist leicht als unbegründet aufzuzeigen. Denn aus $\sin\alpha + \sin\gamma = 2\sin\beta$ folgt

$$1) \qquad 2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} = 4\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2},$$

mithin

$$2) \qquad \cos\frac{\alpha-\gamma}{2} = 2\cos\frac{\alpha+\gamma}{2},$$

und hieraus

3) $$3 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\gamma}{2},$$

folglich auch

4) $$3 = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}.$$

Da dies eine nothwendige Folge der Voraussetzung so kann es keine Beschränkung der Behauptung involviren.

Es ergiebt sich die Richtigkeit derselben auch sehr ei aus 2), wonach man hatte

$$\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} = 2\cos\frac{\alpha+\gamma}{2},$$

d. i.

$$\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} - \cos\frac{\alpha+\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha+\gamma}{2},$$

oder

$$2 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{\beta}{2}.$$

Dividirt man nämlich die Gleichung

$$\sin\frac{\alpha+\gamma}{2} = \cos\frac{\beta}{2}$$

durch die eben erhaltene, so folgt

$$\frac{\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}{2 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\gamma}{2}} = \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2},$$

und wenn man die Zähler entwickelt und den Division ausfüh

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = 2\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2},$$

was behauptet wurde.

XI.

Ueber die Theorie der Proportionen.

Von dem

Herrn Doctor Lehmann zu Berlin.

§. 1. Lehrsatz.

Wenn von 4 Grössen die 1ste mit der 2ten, und die 3te mit der 4ten gleichartig ist, und ein Vielfaches eines aliquoten Theils der 1sten Grösse ist gleich der 2ten, und das Ebensovielfache des ebensovielsten Theils der 3ten Grösse gleich der 4ten, so ist jedes andere Vielfache jedes andern aliquoten Theils der 1sten Grösse $\gtrless$ (d. h. grösser oder ebenso gross oder kleiner) als die 2te Grösse, je nachdem das Ebensovielfache des ebensovielsten Theils der 3ten Grösse $\gtrless$ ist als die 4te Grösse.

Beweis. Es sei von den 4 Grössen a, b, c, d, unter denen a mit b gleichartig, und c mit d gleichartig ist, $b=\frac{n}{m}a$ (wo m und n beliebige ganze Zahlen bedeuten), und $d=\frac{n}{m}c$; dagegen sei b auch $=\frac{q}{p}a$ (wo q und p wiederum beliebige ganze Zahlen sind), so ist $\frac{n}{m}a=\frac{q}{p}a$, also (beiderseits das $m\times p$fache genommen) $npa=mqa$, also (weil np und mq zwei gleiche ganze Zahlen sind) auch $npc=mqc$, also (wenn man beiderseits den $m\times p$ten Theil nimmt) $\frac{n}{m}c=\frac{q}{p}c$, d. i. $d=\frac{q}{p}c$.

Es sei aber nun $b=\frac{n}{m}a$, und $d=\frac{n}{m}c$; dagegen sei $b>\frac{q}{p}a$ und $<\frac{q+1}{p}a$, so ist $\frac{n}{m}a>\frac{q}{p}a$ und $<\frac{q+1}{p}a$, also $npa>qma$ und $<(q+1)ma$, also (weil np, qm und $(q+1)m$ ganze Zahlen sind) auch $npc>qmc$ und $<(q+1)mc$, also $\frac{n}{m}c>\frac{q}{p}c$ und $<\frac{q+1}{p}c$, d. i. $d>\frac{q}{p}c$ und $<\frac{q+1}{p}c$. Ist aber

$$b > \frac{q}{p} a \text{ und } < \frac{q+1}{p} a, \qquad d > \frac{q}{p} c \text{ und } < \frac{q+1}{p} c;$$

o ist um so mehr

$$b > \frac{q-1}{p} a, \; b < \frac{q+2}{p} a; \qquad d > \frac{q-1}{p} c, \; d < \frac{q+2}{p} c;$$
$$b > \frac{q-2}{p} a, \; b < \frac{q+3}{p} a; \qquad d > \frac{q-2}{p} c, \; d < \frac{q+3}{p} c;$$

u. s. w. u. s. w. u. s. w. u. s. w.

§. 2. Lehrsatz.

Zu 3 Grössen, wovon die 1ste der 2ten gleichartig, ist allemal eine, aber auch nur Eine, vierte, der 3ten gleichartige Grösse möglich, von der Art, dass jedes Vielfache jedes aliquoten Theils der 1sten Grösse $\geq$ ist als die 2te, je nachdem das Ebensovielfache des ebensovielsten Theils der 3ten Grösse $\geq$ ist als die 4te Grösse.

Beweis. Die 3 ersten Grössen seien a, b, c. Nun haben entweder a und b einen aliquoten Theil, der in beide aufgeht (ein gemeinschaftliches Maass), oder nicht.

Haben a und b ein gemeinschaftliches Maass, ist nämlich $b = \frac{n}{m} a$, so hat die 4te Grösse $d = \frac{n}{m} c$ nach dem vorigen Paragraphen die verlangte Eigenschaft.

Haben aber a und b, falls das möglich ist, kein gemeinschaftliches Maass, so nehme man einen beliebigen aliquoten, den $m$ten, Theil der Grösse a von b so oft weg, als es angeht; es sei demnach $b > \frac{n}{m} a$ und $< \frac{n+1}{m} a$. Man nehme zwischen $\frac{n}{m} a$ und $\frac{n+1}{m} a$, d. i. zwischen $\frac{2n}{2m} a$ und $\frac{2n+2}{2m} a$, die Mitte, $\frac{2n+1}{2m} a$, so liegt b entweder zwischen $\frac{2n}{2m} a$ und $\frac{2n+1}{2m} a$, oder zwischen $\frac{2n+1}{2m} a$ und $\frac{2n+2}{2m} a$; im 1sten Fall schreibe man p statt $2n$, im 2ten Fall aber p statt $2n+1$, so kann man in jedem Fall sagen, b liegt zwischen $\frac{p}{2m} a$ und $\frac{p+1}{2m} a$. Fährt man so fort, die aliquoten Theile von a zu halbiren, so sei

$$b > \frac{n}{m} a \text{ und } < \frac{n+1}{m} a,$$
$$b > \frac{p}{2m} a \text{ und } < \frac{p+1}{2m} a,$$
$$b > \frac{q}{4m} a \text{ und } < \frac{q+1}{4m} a,$$

u. s. w.;

auf diese Art wird die Entfernung der beiden Grenzen von einander, zwischen denen b eingeschlossen ist, mit jedem folgenden Schritte auf die Hälfte reducirt. Diesen Grenzen

$$\frac{n}{m}a,\ \frac{n+1}{m}a;$$
$$\frac{p}{2m}a,\ \frac{p+1}{2m}a;$$
$$\frac{q}{4m}a,\ \frac{q+1}{4m}a;$$
u. s. w.

entsprechen, wenn man von der Grösse c die ebensovielsten Theile ebensovielmal nimmt, die Grössen

$$\frac{n}{m}c,\ \frac{n+1}{m}c;$$
$$\frac{p}{2m}c,\ \frac{p+1}{2m}c;$$
$$\frac{q}{4m}c,\ \frac{q+1}{4m}c;$$
u. s. w.

Da nun auch hier der Unterschied mit jedem folgenden Schritte auf die Hälfte reducirt wird, so kann er kleiner werden als jede gegebene mit c gleichartige Grösse; folglich giebt es Eine, aber auch nur Eine Grösse d, welche $> \frac{q}{4m}c$ und $< \frac{q+1}{4m}c$ ist, und welcher sich die Grössen $\frac{n}{m}c$, $\frac{p}{2m}c$, $\frac{q}{4m}c$, u. s. w. in ihrem allmäligen Wachsen, und die Grössen $\frac{n+1}{m}c$, $\frac{p+1}{2m}c$, $\frac{q+1}{4m}c$, u. s. w. in ihrem allmäligen Abnehmen immer mehr nähern, ohne sie jemals genau zu erreichen.

Wir beweisen nun erstlich, dass c und d kein gemeinschaftliches Maass haben. Hätten c und d ein gemeinschaftliches Maass, so sei $d = \frac{\nu}{\mu}c$. Dann wäre

$\frac{\nu}{\mu}c > \frac{n}{m}c$ und $< \frac{n+1}{m}c$		also auch $\frac{\nu}{\mu}a > \frac{n}{m}a$ und $< \frac{n+1}{m}a$	
$\frac{\nu}{\mu}c > \frac{p}{2m}c$ und $< \frac{p+1}{2m}c$		$\frac{\nu}{\mu}a > \frac{p}{2m}a$ und $< \frac{p+1}{2m}a$	
$\frac{\nu}{\mu}c > \frac{q}{4m}c$ und $< \frac{q+1}{4m}c$		$\frac{\nu}{\mu}a > \frac{q}{4m}a$ und $< \frac{q+1}{4m}a$	
u. s. w.		u. s. w.	

Da aber der Unterschied zwischen $\frac{n}{m}a$ und $\frac{n+1}{m}a$ doppelt so gross ist als der Unterschied zwischen $\frac{p}{2m}a$ und $\frac{p+1}{2m}a$, dieser

aber wieder doppelt so gross als der Unterschied zwischen $\frac{q}{4m}$ und $\frac{q+1}{4m}a$, u. s. w., so wird der Unterschied $<$ als jede gegebene mit a gleichartige Grösse; der Grenzwerth ist also $\frac{\nu}{\mu}a$. Von her aber sahen wir, dass dieser Grenzwerth $=b$. Folglich wäre $b=\frac{\nu}{\mu}a$, und folglich hätten a und b ein gemeinschaftliches Maass gegen die Voraussetzung. Folglich ist die Annahme falsch, und c und d haben kein gemeinschaftliches Maass.

Man nehme nun einen beliebigen aliquoten, den μten. Theile der Grösse a von b so oft weg, als es angeht; es sei demnach $b>\frac{\nu}{\mu}a$ und $<\frac{\nu+1}{\mu}a$, so beweisen wir, dass d nicht $<\frac{\nu}{\mu}c$ und nicht $>\frac{\nu+1}{\mu}c$ sein könne.

Es sei, wo möglich, $d<\frac{\nu}{\mu}c$, so wäre

$\frac{\nu}{\mu}c>d$ und, wie wir gesehen haben, $d>\frac{n}{m}c$;

$\frac{\nu}{\mu}c>d$, „ „ „ „ „ $d>\frac{p}{2m}c$;

$\frac{\nu}{\mu}c>d$, „ „ „ „ „ $d>\frac{q}{4m}c$;

u. s. w.

also um so mehr $\frac{\nu}{\mu}c>\frac{n}{m}c$; also auch $\frac{\nu}{\mu}a>\frac{n}{m}a$;

„ „ „ „ $\frac{\nu}{\mu}c>\frac{p}{2m}c$; $\frac{\nu}{\mu}a>\frac{p}{2m}a$;

„ „ „ „ $\frac{\nu}{\mu}c>\frac{q}{4m}c$; $\frac{\nu}{\mu}a>\frac{q}{4m}a$;

u. s w.

Da nun die Grössen $\frac{n}{m}a$, $\frac{p}{2m}a$, $\frac{q}{4m}a$, u. s. w. in ihrem allmäligen Wachsen sich, wie wir gesehen haben, immer mehr der Grösse b nähern, so dass das noch Fehlende kleiner wird als jede gegebene mit a und b gleichartige Grösse, so kann $\frac{\nu}{\mu}a$ nicht $<b$ sein, da doch vorausgesetzt war, dass wirklich $b>\frac{\nu}{\mu}a$, d. i. $\frac{\nu}{\mu}a<b$ sei. Da dies sich widerspricht, so ist die Annahme falsch, und d kann nicht $<\frac{\nu}{\mu}c$ sein.

Es sei aber nun, wo möglich, $d>\frac{\nu+1}{\mu}c$, so wäre

$\frac{\nu+1}{\mu} c < d$, und, wie wir gesehen haben, $d < \frac{n+1}{m} c$;

$\frac{\nu+1}{\mu} c < d$, „ „ „ „ „ $d < \frac{p+1}{2m} c$;

$\frac{\nu+1}{\mu} c < d$, „ „ „ „ „ $d < \frac{q+1}{4m} c$;

u. s. w.

also um so mehr $\frac{\nu+1}{\mu} c < \frac{n+1}{m} c$, also auch $\frac{\nu+1}{\mu} a < \frac{n+1}{m} a$;

„ „ „ „ $\frac{\nu+1}{\mu} c < \frac{p+1}{2m} c$, $\frac{\nu+1}{\mu} a < \frac{p+1}{2m} a$;

„ „ „ „ $\frac{\nu+1}{\mu} c < \frac{q+1}{4m} c$, $\frac{\nu+1}{\mu} a < \frac{q+1}{4m} a$;

u. s. w.

Da nun die Grössen $\frac{n+1}{m} a$, $\frac{p+1}{2m} a$, $\frac{q+1}{4m} a$, u. s. w. in ihrem allmäligen Abnehmen sich, wie wir gesehen haben, immer mehr der Grösse b nähern, so dass der Ueberschuss kleiner wird als jede gegebene mit a und b gleichartige Grösse, so kann $\frac{\nu+1}{\mu} a$ nicht $> b$ sein, da doch vorausgesetzt war, dass wirklich $b < \frac{\nu+1}{\mu} a$, d. i. $\frac{\nu+1}{\mu} a > b$ sei. Da dies sich widerspricht, so ist wiederum die Annahme falsch, und d kann nicht $> \frac{\nu+1}{\mu} c$ sein.

Da also d nicht $= \frac{\nu}{\mu} c$ und nicht $< \frac{\nu}{\mu} c$, desgleichen d nicht $= \frac{\nu+1}{\mu} c$ und nicht $> \frac{\nu+1}{\mu} c$, so kann d nur $> \frac{\nu}{\mu} c$ und $< \frac{\nu+1}{\mu} c$ sein. Die Grösse d hat folglich die verlangte Eigenschaft.

Es mögen nun a und b ein gemeinschaftliches Maass haben oder nicht, so beweisen wir, dass nicht zwei verschiedene vierte Grössen, d und e, von denen $e > d$ ist, die verlangte Eigenschaft haben können.

Man nehme an, dieses sei möglich; dann nehme man einen aliquoten Theil der Grösse c, welcher $< e - d$ ist, den $m$ten, so oft von e weg, als es angeht, so wird wenigstens Ein Vielfaches des Theils $\frac{1}{m} c$ zwischen d und e liegen; es sei demnach $\frac{n}{m} c > d$ und $< e$, so müsste, weil sowohl d als e die verlangte Eigenschaft hat, $\frac{n}{m} a > b$ und $< b$ sein. Da dies sich widerspricht, so ist die Annahme falsch, und es giebt zu a, b und c nur Eine vierte Grösse von der verlangten Eigenschaft.

$\frac{n}{m}a > b$ und $< c$, so ist nach dem Begriff der Proportion auch $\frac{n}{m}c > d$ und $< f$, folglich um so mehr $f > d$.

2) Wenn die 1sten und 2ten Glieder in beiden Proportionen gleich sind. Es sei $a:b = c:d$, und $a:b = e:f$, und $e > c$, so beweisen wir, dass auch $f > d$ sei. Es mögen erstlich a und b ein gemeinschaftliches Maass haben; es sei $b = \frac{n}{m}a$, so ist nach dem Begriff der Proportion auch $d = \frac{n}{m}c$, und $f = \frac{n}{m}e$. Da nun $e > c$, so ist auch $\frac{n}{m}e > \frac{n}{m}c$, d. i. $f > d$. Wenn aber a und b kein gemeinschaftliches Maass haben, so sei

$b > \frac{n}{m}a$ und $< \frac{n+1}{m}a$	$d > \frac{n}{m}c$ und $< \frac{n+1}{m}c$	$f > \frac{n}{m}e$ und $< \frac{n+1}{m}e$
$b > \frac{p}{2m}a$ und $< \frac{p+1}{2m}a$	$d > \frac{p}{2m}c$ und $< \frac{p+1}{2m}c$	$f > \frac{p}{2m}e$ und $< \frac{p+1}{2m}e$
$b > \frac{q}{4m}a$ und $< \frac{q+1}{4m}a$	$d > \frac{q}{4m}c$ und $< \frac{q+1}{4m}c$	$f > \frac{q}{4m}e$ und $< \frac{q+1}{4m}e$
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.

so ist, weil $e > c$, und die Unterschiede durch fortgesetzte Halbirung kleiner werden als jede gegebene Grösse derselben Art, f wenigstens nicht kleiner als d. Es kann aber auch f nicht $= d$ sein, weil sonst (nach dem vorigen Paragraphen) $e = c$ wäre, gegen die Voraussetzung. Folglich ist auch in diesem Fall $f > d$.

3) Es sei $a:b = c:d$, und $a:e = f:g$, und $e > b$, und $f > c$, so ist (nach Nro. 1) und Nro. 2)) um so mehr $g > d$.

4) Wenn die mittleren Glieder in beiden Proportionen gleich sind. Es sei $a:b = c:d$, und $e:b = c:f$, und $e > a$, so beweisen wir, dass $f < d$. Erstlich kann f nicht $= d$ sein, weil sonst auch $e = a$ wäre, gegen die Voraussetzung. Ferner kann f nicht $> d$ sein, weil sonst aus den Proportionen $c:d = a:b$ und $c:f = e:b$ nach Nro. 3) folgen würde $b > b$, welches ungereimt ist. Folglich ist $f < d$.

5) Wenn die 2ten und 4ten Glieder gleich sind. Es sei $a:b = c:d$. und $e:b = f:d$, und $e > a$, so beweisen wir, dass auch $f > c$. Aus $a:b = c:d$ folgt durch Umkehrung $b:a = d:c$, aus $e:b = f:d$ aber $b:e = d:f$, aus $b:a = d:c$ und $b:e = d:f$ aber nach Nro. 1) $f > c$.

6) Wenn die 3ten und 4ten Glieder gleich sind. Es sei $a:b = c:d$, und $e:f = c:d$, und $e > a$, so beweisen wir, dass auch $f > b$ sei. Aus $a:b = c:d$ folgt $c:d = a:b$, aus $e:f = c:d$ aber $c:d = e:f$, aus $c:d = a:b$ und $c:d = e:f$ aber nach Nro. 2) $f > b$.

7) Wenn die äusseren Glieder gleich sind. Es sei $a:b = c:d$, und $a:e = f:d$, und $e > b$, so beweisen wir, dass $f < c$ sei. Aus

von 2 Verhältnissen, welche eine Proportion bilden, dass sie einander gleich seien. Jedes Verhältniss besteht aus einem vorangehenden und einem nachfolgenden Gliede, und in jeder Proportion heissen die Glieder Eines Verhältnisses, oder auch das vorangehende Glied des einen und das vorangehende Glied des andern Verhältnisses, oder auch das nachfolgende Glied des einen und das nachfolgende Glied des andern Verhältnisses, gleichnamige (homologe) Glieder, die beiden mittleren Glieder aber oder die beiden äusseren ungleichnamige Glieder. Ein Verhältniss heisst dagegen grösser als ein anderes, wenn das 1ste Glied des 1sten Verhältnisses sich zum 2ten Glied des 1sten Verhältnisses verhält wie eine Grösse, welche $>$ ist als das 1ste Glied des 2ten Verhältnisses, zum 2ten Glied des 2ten Verhältnisses, und man schreibt in diesem Fall (wenn $a:b$ und $c:d$ die beiden Verhältnisse sind) $a:b>c:d$. Und ein Verhältniss heisst kleiner als ein anderes, wenn das 1ste Glied des 1sten Verhältnisses sich zum 2ten Glied des 1sten Verhältnisses verhält wie eine Grösse, welche $<$ ist als das 1ste Glied des 2ten Verhältnisses, zum 2ten Glied des 2ten Verhältnisses, und man schreibt in diesem Fall $a:b<c:d$.

§. 7. Zusatz.

Wenn in zwei Proportionen 3 Glieder der einen den 3 entsprechenden der andern einzeln genommen gleich sind, so sind auch die noch übrigen Glieder (mögen dies nun der Ordnung nach die 1sten oder die 2ten oder die 3ten oder die 4ten sein) einander gleich, d. i.

$$\frac{a:b=c:d \quad e:b=c:d}{a=e} \qquad \frac{a:b=c:d \quad a:e=c:d}{b=e} \qquad \frac{a:b=c:d \quad a:b=e:d}{c=e} \qquad \frac{a:b=c:d \quad a:b=c:e}{d=e.}$$

§. 8. Lehrsatz.

Wenn in zwei Proportionen 2 Glieder der einen den beiden entsprechenden der andern einzeln genommen gleich sind, so sind die noch übrigen Glieder der einen Proportion entweder den entsprechenden der andern einzeln genommen gleich, oder, wenn es gleichnamige Glieder sind, in der einen Proportion grösser als in der andern, und, wenn es ungleichnamige Glieder sind, das eine der beiden übrigen Glieder in der einen Proportion grösser als in der andern, und das noch übrige Glied in der ersten Proportion kleiner als in der andern.

Beweis. 1) Wenn die 1sten und 3ten Glieder in beiden Proportionen gleich sind. Es sei $a:b=c:d$, und $a:e=c:f$, und $e>b$, so beweisen wir, dass auch $f>d$ sei. Man nehme einen aliquoten Theil der Grösse a, welcher $<e-b$ ist, den $m$ten, von e so oft weg, als es angeht, so wird wenigstens Ein Vielfaches des Theils $\frac{1}{m}a$ zwischen b und e fallen; es sei demnach

§. 12. Lehrsatz.

Wenn eine Grösse doppelt so gross ist als eine andere, so hat die mittlere Proportionale zwischen beiden mit keiner von beiden ein gemeinschaftliches Maass.

Beweis. Es sei $a:b=b:2a$. Gesetzt, a und b hätten ein gemeinschaftliches Maass, und es sei $b=\frac{n}{m}a$, so wäre auch $2a=\frac{n}{m}b=\frac{nn}{mm}a$, also $2mma=nna$, also $2mm=nn$. Es wird hierbei vorausgesetzt, dass m und n nicht zugleich gerade Zahlen sind; wäre dieses, so könnte man $\frac{n}{m}$ in $\frac{\frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}m}$ verwandeln, und mit diesem Aufheben des Bruches so lange fortfahren, bis wenigstens Eine von beiden Zahlen ungerade geworden ist. Es können aber auch m und n nicht zugleich ungerade Zahlen sein; sonst wäre $2mm$ eine gerade Zahl, und nn ungerade, also $2mm$ nicht $=nn$. Es kann auch nicht m gerade und n ungerade sein; sonst wäre wiederum $2mm$ gerade, und nn ungerade. Es kann endlich auch nicht m ungerade und n gerade sein; sonst wäre mm ungerade, und $\frac{1}{2}nn$ gerade, also mm nicht $=\frac{1}{2}nn$, und $2mm$ nicht $=nn$. Folglich ist die Annahme falsch, und a und b haben kein gemeinschaftliches Maass.

Gesetzt, b und $2a$ hätten ein gemeinschaftliches Maass, so müssten nach dem Begriff der Proportion auch a und b ein gemeinschaftliches Maass haben. Da dies nicht ist, so haben auch b und $2a$ kein gemeinschaftliches Maass.

§. 13. Erklärung.

Zwei gleichartige Grössen, welche ein gemeinschaftliches Maass haben, heissen commensurabel, zwei gleichartige Grössen aber, welche kein gemeinschaftliches Maass haben, incommensurabel. Zwei commensurable Grössen stehen zu einander in einem rationalen, zwei incommensurable Grössen aber in einem irrationalen Verhältniss.

§. 14. Lehrsatz.

Wenn 2 gleichnamige Glieder einer Proportion gleichvielmal vervielfältigt, oder statt dessen gleichvielste aliquote Theile genommen werden, so bleibt die Proportion richtig. Wenn dagegen von ungleichnamigen Gliedern das eine vervielfältigt, statt des andern aber der ebensovielste Theil genommen wird, so bleibt die Proportion richtig.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, so beweisen wir erstlich, dass, wenn m eine beliebige ganze Zahl bedeutet, $ma:b=mc:d$. Aus $a:b=c:d$ folgt nach dem Begriff der Proportion, dass $nma\gtrless pb$, je nachdem $nmc\gtrless pd$, und hieraus wieder, gleichfalls nach dem

Begriff der Proportion, $ma:b=mc:d$. Aus $a:b=c:d$ folgt ferner $ma \gtrless npb$, je nachdem $mc \gtrless npd$, und hieraus $a:pb=c:pd$. Aus $a:b=c:d$ folgt ferner $mna \gtrless mpb$, je nachdem $mnc \gtrless mpd$, d. i. je nachdem $nc \gtrless pd$, und hieraus $ma:mb=c:d$. Aus $a:b=c:d$ folgt ferner $c:d=a:b$, hieraus aber $mc:md=a:b$, d. i. $a:b=mc:md$.

Es sei $a:b=c:d$, und $\frac{a}{m}:b=e:d$, so folgt aus der letzteren Proportion

$$\frac{\begin{array}{l} a:b=me:d \\ a:b=\ c\ :d \end{array}}{me=c} \text{ (nach §. 7.)},$$

also $e=\frac{c}{m}$; also kann man statt $\frac{a}{m}:b=e:d$ schreiben $\frac{a}{m}:b=\frac{c}{m}:d$. Aus $a:b=c:d$ folgt ferner $b:a=d:c$, also $\frac{b}{m}:a=\frac{d}{m}:c$, also $a:\frac{b}{m}=c:\frac{d}{m}$. Aus $a:b=c:d$ folgt ferner, wenn man $\frac{a}{m}:e=c:d$ macht (woraus sich $a:me=c:d$ ergiebt) $me=b$, also $e=\frac{b}{m}$; also kann man statt $\frac{a}{m}:e=c:d$ schreiben $\frac{a}{m}:\frac{b}{m}=c:d$. Aus $a:b=c:d$ folgt ferner $c:d=a:b$, also $\frac{c}{m}:\frac{d}{m}=a:b$, d. i. $a:b=\frac{c}{m}:\frac{d}{m}$.

Es sei $a:b=c:d$, und $ma:b=c:e$, so folgt aus der letzteren Proportion nach dem Bisherigen $a:\frac{b}{m}=c:e$. Aus $a:b=c:d$ folgt aber auch

$$\frac{a:\frac{b}{m}=c:\frac{d}{m}}{e=\frac{d}{m}}.$$

Also kann man statt $ma:b=c:e$ schreiben $ma:b=c:\frac{d}{m}$. Aus $a:b=c:d$ folgt ferner $c:d=a:b$, und hieraus $mc:d=a:\frac{b}{m}$, d. i. $a:\frac{b}{m}=mc:d$. Aus $a:b=c:d$ folgt auch $\frac{a}{m}:b=\frac{c}{m}:d$, d. i. $\frac{a}{m}:b=c:dm$. Aus $a:b=c:d$ folgt endlich $a:b=\frac{c}{m}:\frac{d}{m}$, und hieraus $a:mb=\frac{c}{m}:d$.

§. 15. Zusatz.

Also kann man in jeder Proportion auch gleichnamige Glieder mit einerlei Bruch multipliciren, oder von ungleichnamigen Gliedern

das eine mit einem Bruch, und das andere mit dem umgekehrten Werthe dieses Bruches; man kann also statt $a:b=c:d$ schreiben

$$\frac{m}{n}a:b=\frac{m}{n}c:d,\quad a:\frac{m}{n}b=c:\frac{m}{n}d,\quad \frac{m}{n}a:\frac{m}{n}b=c:d,\quad a:b=\frac{m}{n}c:\frac{m}{n}d,$$

$$\frac{m}{n}a:b=c:\frac{n}{m}d,\quad a:\frac{m}{n}b=\frac{n}{m}c:d.$$

§. 16. Lehrsatz.

Wenn zwei Verhältnisse einem dritten gleich sind, so sind sie (simpliciter ex aequo) auch einander gleich.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, und $a:b=e:f$. Ist nun $\frac{n}{m}c\gtrless d$, so ist auch $\frac{n}{m}a\gtrless b$; ist aber $\frac{n}{m}a\gtrless b$, so ist $\frac{n}{m}e\gtrless f$. Folglich ist $\frac{n}{m}c\gtrless d$, je nachdem $\frac{n}{m}e\gtrless f$. Folglich verhält sich $c:d=e:f$.

§. 17. Zusatz.

Wenn ein Verhältniss einem andern gleich, aber $>$ ist als ein drittes, so ist auch das 2te Verhältniss $>$ als das 3te. Und ist ein Verhältniss einem andern gleich, aber $<$ als ein drittes, so ist auch das 2te Verhältniss $<$ als das dritte. Wenn ein Verhältniss $>$ ist als ein anderes, und dieses $>$ als ein 3tes, so ist um so mehr das 1ste Verhältniss $>$ als das 3te. Und wenn ein Verhältniss $<$ ist als ein anderes, und dieses $<$ als ein 3tes, so ist um so mehr das 1ste Verhältniss $<$ als das 3te.

§. 18. Lehrsatz.

Wenn in 2 Proportionen das 2te Glied der 1sten und das 1ste Glied der 2ten einander gleich sind, das 4te Glied der 1sten aber dem 3ten der 2ten, oder wenn das 1ste Glied der 1sten dem 2ten Glied der 2ten gleich ist und das 3te Glied der 1sten dem 4ten Glied der 2ten, so bilden (ordinatim ex aequo) auch die 4 übrigen Glieder nach der Ordnung eine richtige Proportion.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, und $b:e=d:f$, so verhält sich nach §. 14., welche ganze Zahlen man auch unter m und n verstehen mag, $ma:b=mc:d$, und $b:ne=d:nf$. Ist nun $ma=ne$, so hat man $b:ma=d:nf$, also

$$\begin{array}{l} ma:b=nf:d \\ ma:b=mc:d \\ \hline mc=nf \quad (\S.\ 7.) \end{array}$$

Ist aber $ma > ne$, so nehme man einen aliquoten Theil der Grösse b, welcher $<$ ist als $ma - ne$, den $p$ten Theil, von ma so oft weg, als es angeht, so giebt es wenigstens Ein Vielfaches des Theils $\frac{1}{p}b$, welches zwischen ma und ne liegt; es sei demnach $\frac{q}{p}b < ma$ und $> ne$. Aus $ma : b = mc : d$ und $b : ne = d : nf$ folgt nach §. 15. $ma : \frac{q}{p}b = mc : \frac{q}{p}d$, und $\frac{q}{p}b : ne = \frac{q}{p}d : nf$. Da nun $ma > \frac{q}{p}b$, und $\frac{q}{p}b > ne$, so ist auch $mc > \frac{q}{p}d$, und $\frac{q}{p}d > nf$, also um so mehr $mc > nf$. Ist endlich $ma < ne$, so wird auf ähnliche Art bewiesen, dass $mc < nf$. Da also $ma \gtrless ne$, je nachdem $mc \gtrless nf$, welche ganze Zahlen man auch statt m und n setzen mag, so verhält sich $a : e = c : f$. Es sei nun $a : b = c : d$ und $e : a = f : c$, so ist $b : a = d : c$ und $a : e = c : f$, also $b : e = d : f$.

§. 19. Lehrsatz.

Wenn in zwei Proportionen die ersten Glieder einander und die 3ten Glieder einander gleich sind, oder auch die 2ten Glieder einander und die 4ten Glieder einander, so bilden (was man auch ordinatim ex aequo nennt) die übrigen Glieder nach der Ordnung eine richtige Proportion.

Beweis. Es sei $a : b = c : d$, und $a : e = c : f$, so ist auch

$$\frac{e : a = f : c}{e : b = f : d} \quad (\text{§. 18.})$$

Es sei dagegen $a : b = c : d$, und $e : b = f : d$, so ist auch

$$\frac{b : e = d : f}{a : e = c : f} \quad (\text{§. 18.})$$

§. 20. Lehrsatz.

Wenn in zwei Proportionen das 2te Glied der 1sten gleich ist dem 1sten der 2ten, und das 3te der 1sten = dem 4ten der 2ten, oder wenn das 1ste Glied der 1sten gleich ist dem 2ten der 2ten und das 4te der 1sten = dem 3ten der 2ten, so bilden (perturbatim ex aequo) auch die 4 übrigen Glieder nach der Ordnung eine richtige Proportion.

Beweis. Es sei $a : b = c : d$, und $b : e = f : c$, so ist nach §. 14. auch $ma : b = c : \frac{d}{m}$ und $b : ne = \frac{f}{n} : c$. Ist nun $ma = ne$, so hat man $b : ma = \frac{f}{n} : c$, also

$$ma : b = c : \frac{f}{n}$$
$$ma : b = e : \frac{d}{m}$$
$$\frac{d}{m} = \frac{f}{n} \quad (\S.\ 7.)$$

also (wenn man beiderseits das $m \times n$fache nimmt) $nd = mf$. Ist aber $ma > ne$, so nehme man einen aliquoten Theil der Grösse b, welcher $< ma - ne$, den $p$ten, von ma so oft weg, als es angeht, und es sei $\frac{q}{p} b > ne$ und $< ma$. Aus $ma : b = c : \frac{d}{m}$ und $b : ne = \frac{f}{n} : c$ folgt nach §. 15. $ma : \frac{q}{p} b = \frac{p}{q} c : \frac{d}{m}$ und $\frac{q}{p} b : ne = \frac{f}{n} : \frac{p}{q} c$. Da nun $ma > \frac{q}{p} b$, und $\frac{q}{p} b > ne$, so ist auch $\frac{p}{q} c > \frac{d}{m}$, und $\frac{f}{n} > \frac{p}{q} c$, also um so mehr $\frac{f}{n} > \frac{d}{m}$, also $mf > nd$. Ist dagegen $ma < ne$, so wird auf ähnliche Art bewiesen, dass $mf < nd$. Da also $ma \gtrless ne$, je nachdem $mf \gtrless nd$, so verhält sich $a : e = f : d$.

Es sei nun $a : b = c : d$, und $e : a = d : f$, so ist $b : a = d : c$, und $a : e = f : d$, also $b : e = f : c$.

§. 21. Lehrsatz.

Wenn in zwei Proportionen die 1sten Glieder einander gleich sind und die 4ten einander, oder auch die 2ten Glieder einander gleich und die 3ten einander, so bilden (perturbatim ex aequo) die übrigen Glieder eine Proportion so, dass die übrigen Glieder der einen Proportion die äusseren Glieder, und die übrigen Glieder der andern Proportion die mittleren Glieder werden.

Beweis. Es sei $a : b = c : d$, und $a : e = f : d$, so ist auch

$$e : a = d : f$$
$$e : b = c : f \quad (\S.\ 20.),$$

und daher auch $b : e = f : c$.

Es sei dagegen $a : b = c : d$, und $e : b = c : f$, so ist auch

$$b : e = f : c$$
$$a : e = f : d \quad (\S.\ 20.)$$

und daher auch $e : a = d : f$.

§. 22. Erklärung.

Wenn man $a : b = c : d$, und $b : e = f : g$ macht, so heisst das Verhältniss $a : e$ **aus den Verhältnissen** $c : d$ **und** $f : g$ **zusammengesetzt**, und wird durch $a : e = (c : d) + (f : g)$ bezeichnet. Auf diese Art kann man so viel Verhältnisse, als man will, zusammensetzen; es sei $a : b = c : d$, $b : e = f : g$, $c : h = i : k$, und

$h:l=m:n$, so heisst das Verhältniss $a:l$ aus den Verhältnissen $c:d$, $f:g$, $i:k$ und $m:n$ zusammengesetzt, und wird durch $a:l = (c:d)+(f:g)+(i:k)+(m:n)$ bezeichnet. Sind die zusammenzusetzenden Verhältnisse einander gleich, so heisst das zusammengesetzte ein **vielfaches** Verhältniss (das **doppelte**, **dreifache** u. s. w.) und man sagt, wenn $a:b=b:c=c:d=d:e$, dass $a:e$ das Vierfache des Verhältnisses $a:b$ sei, und bezeichnet es durch $a:e=4(a:b)$.

§. 23. Lehrsatz.

Wenn eine Grösse nach zwei einfachen Verhältnissen verändert wird, so kommt einerlei Grösse heraus, in welcher Ordnung man auch die beiden Verhältnisse zusammensetzen mag, d. h. wenn man $a:b=c:d$, $b:e=f:g$, $a:h=f:g$ und $h:i=c:d$ macht, so ist $e=i$.

Beweis. Aus $a:b=c:d$ und $h:i=c:d$ folgt

simpl. ex aequo $a:b=h:i$, aus $b:e=f:h$ und $a:h=f:g$ aber $b:e=a:h$

perturb. ex aequo $a:e=a:i$; folglich ist $e=i$.

§. 24. Lehrsatz.

Wenn zwei einfache Verhältnisse einem 3ten, aus 2 Verhältnissen zusammengesetzten, Verhältniss gleich sind, so sind sie einander gleich.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, $b:e=f:g$, $h:i=c:d$, und $i:k=f:g$, so beweisen wir, dass $a:e=h:k$.

Aus $a:b=c:d$ und $h:i=c:d$ folgt simpl. ex aeq. $a:b=h:i$,
aus $b:e=f:g$ und $i:k=f:g$ aber $b:e=i:k$
ordinatim ex aeq. $a:e=h:k$.

§. 25. Lehrsatz.

Wenn eine Proportion aus 4 gleichartigen Gliedern besteht, so kann man die äusseren Glieder mit einander oder die mittleren Glieder mit einander verwechseln, und die Proportion bleibt richtig.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, und a, b, c, d seien gleichartige Grössen, so ist $a:c=(a:b)+(b:c)$, und $b:d=(b:c)+(c:d)$, also (§. 24.) $a:c=b:d$.

§. 26. Zusatz.

Jede Proportion zwischen 4 gleichartigen Grössen kann dahin, ohne ein Glied zu ändern, in 8 Ordnungen

$$a:b=c:d,\ a:c=b:d,\ b:a=d:c,\ b:d=a:c,\ c:d=a:b,$$
$$c:a=d:b,\ d:c=b:a,\ d:b=c:a$$

geschrieben werden. Man sieht hieraus, dass jede Ordnung zulässig ist, wofern nur die gleichnamigen Glieder gleichnamig bleiben, auch dass jede Ordnung zulässig ist, wofern nur die ungleichnamigen Glieder ungleichnamig bleiben.

§. 27. Lehrsatz.

Wenn eine Grösse nach mehreren einfachen Verhältnissen verändert wird, so kommt einerlei Grösse heraus, nach welcher Ordnung man auch die Verhältnisse zusammensetzen mag.

Beweis. Nach §. 23. ist es einerlei, ob man die Grösse a nach den Verhältnissen $b:c$ und $d:e$ oder nach den Verhältnissen $d:e$ und $b:c$ verändert; folglich ist es auch einerlei, ob man a nach den Verhältnissen $b:c$, $d:e$ und $f:g$ oder nach den Verhältnissen $d:e$, $b:c$ und $f:g$ verändert. Folglich kann man die Ordnung $b:c$, $d:e$, $f:g$ in die Ordnung $d:e$, $b:c$, $f:g$ verwandeln. Macht man nun $a:h=b:c$, so ist es nach §. 23. einerlei, ob man h nach den Verhältnissen $d:e$ und $f:g$ oder nach den Verhältnissen $f:g$ und $d:e$ verändert; also ist es einerlei, ob man a nach den Verhältnissen $b:c$, $d:e$, $f:g$ oder nach den Verhältnissen $b:c$, $f:g$, $d:e$ verwandelt. Auf diese Art kann man nach und nach jedes der 3 Verhältnisse $b:c$, $d:e$, $f:g$ in die letzte Stelle bringen, und, während es die letzte Stelle behält, die Ordnung der beiden ersten Stellen beliebig vertauschen. Folglich kann man die 3 Verhältnisse $b:c$, $d:e$, $f:g$ überhaupt in beliebige Ordnung bringen.

Ist a nach 4 Verhältnissen $b:c$, $d:e$, $f:g$, $h:i$ zu verwandeln, so kann man, während das Verhältniss $h:i$ die letzte Stelle behält, die 3 ersten Verhältnisse in beliebige Ordnung stellen; dadurch kommt nach und nach jedes der 3 ersten Verhältnisse in die 3te Stelle, und kann dann nach §. 23. durch Verwechselung der beiden letzten Stellen in die letze Stelle kommen. Während nun jedes der 4 Verhältnisse in der letzten Stelle bleibt, kann man die 3 übrigen Verhältnisse in beliebige Ordnung setzen; also kann man überhaupt alle 4 Verhältnisse in beliebige Ordnung setzen.

Auf ähnliche Art macht man den Schluss von 4 Verhältnissen auf 5 u. s. w.

§. 28. Lehrsatz.

Wenn 2 einfache Verhältnisse einem 3ten, aus mehreren Verhältnissen zusammengesetzten Verhältnisse gleich sind, so sind sie einander gleich.

Beweis. Es sei

$$\begin{array}{l|l} a:b = c:d & p:q = c:d \\ b\ e = f:g & q:r = f:g \\ e:h = i:k & r:s = i:k \\ h:l = m:n & s:t = m:n \end{array}$$

wo statt 4 Paar auch jede andere Anzahl Paare von Verhältnissen gesetzt werden kann), so beweisen wir, dass $a:l=p:t$.

Aus $a:b=c:d$ und $p:q=c:d$ folgt simpl. ex aeq. $a:b=p:q$

„ $b:e=f:g$ „ $q:r=f:g$ „ „ „ „ $\underline{b:e=q:r}$

ordin. ex aeq. $a:e=p:r$

„ $e:h=i:k$ „ $r:s=i:k$ „ simpl. ex aeq. $\underline{e:h=r:s}$

ordin. ex aeq. $a:h=p:s$

u. s. w., endlich $a:l=p:t$.

§. 29. Lehrsatz.

Wenn 2 Verhältnisse einem dritten gleich sind (gleichviel welche Verhältnisse einfach, und welche zusammengesetzt sind), so sind sie einander gleich.

Beweis. Man setze statt jedes zusammengesetzten Verhältnisses ein ihm gleichbedeutendes einfaches, wovon man das erste Glied beliebig und von beliebiger Art annehmen kann, so folgt das zu Beweisende unmittelbar aus §. 16.

§. 30. Lehrsatz.

Wenn mehrere Verhältnisse gleichartiger Grössen einander gleich sind, so hat die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder das nämliche Verhältniss.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, und a, b, c, d gleichartig, so ist $ma \gtrless nb$, je nachdem $mc \gtrless nd$, also auch $ma \gtrless nb$, je nachdem $ma+mc \gtrless nb+nd$, d. i. je nachdem $m(a+c) \gtrless n(b+d)$, also $a:b=a+c:b+d$.

Es sei $a:b=c:d=e:f$, und a, b, c, d, e, f gleichartig, so ist

$$\frac{a:b = \quad a+c:b+d}{a:b = a+c+e:b+d+f}.$$

Auf ähnliche Art macht man den Schluss von 3 Verhältnissen auf 4 u. s. w.

§. 31. Lehrsatz.

Wenn 2 Verhältnisse gleichartiger Grössen einander gleich sind, doch so, dass die Vorderglieder der beiden Verhältnisse einander ungleich, und die Hinterglieder einander ungleich sind, so hat die Differenz der Vorderglieder zur Differenz der Hinterglieder das nämliche Verhältniss.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, und $a>c$, so ist auch $b>d$. Man mache

$$\frac{a:b=a-c:e,\ \text{so ist}}{\text{simpl. ex aeq.}\ a-c:e=c:d=a-c+c:d+e\ (\text{§. 30.}),\ \text{d. i.}}$$
$$a-c:e=a:d+e$$
$$\frac{a-c:e=a:b}{d+e=b\ (\text{§. 7.}),\ \text{also}\ e=b-d.}$$

Folglich kann man statt $a:b=a-c:e$ schreiben $a:b=a-c:b-d$.

§. 32. Zusatz.

Wenn mehrere Verhältnisse gleichartiger Grössen einander gleich sind, und man subtrahirt und addirt die Vorderglieder promiscue, und subtrahirt und addirt die Hinterglieder in derselben Ordnung, so erhält man 2 Grössen, welche in dem nämlichen Verhältniss stehen, z. B. wenn $a:b=c:d=e:f=g:h=i:k$, und es ist $a+c>e$, und $a+c-e+g>i$, so ist auch $b+d>f$, $b+d-f+h>k$, und $a:b=a+c-e+g-i:b+d-f+h-k$. Bei diesen Subtractionen und Additionen kann man (nach §. 14. und §. 15.) Glieder, die zu einerlei Verhältniss gehören, auch mit einerlei Zahl multipliciren oder dividiren oder mit einerlei Bruch multipliciren; z. B. wenn $a:b=c:d=e:f=g:h=i:k$, und es ist $\frac{3}{4}a+5c>e$, und $\frac{3}{4}a+5e-e+\frac{1}{7}g>i$, so ist auch $\frac{3}{4}b+5d>f$, $\frac{3}{4}b+5d-f+\frac{1}{7}h>k$, und $a:b=\frac{3}{4}a+5c-e+\frac{1}{7}g-i:\frac{3}{4}b+5d-f+\frac{1}{7}h-k$.

§. 33. Lehrsatz.

In jeder Proportion verhält sich (summando) das 1ste Glied zur Summe der beiden ersten wie das 3te zur Summe des 3ten und 4ten, auch die Summe der beiden ersten Glieder zum 2ten wie die Summe des 3ten und 4ten zum 4ten.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, so ist $ma<m(a+b)$, und $mc<m(c+d)$. Ist $m<n$, so ist um so mehr $ma<n(a+b)$, und $mc<n(c+d)$. Ist endlich $m>n$, so ist

$(m-n)a \gtrless nb$, je nachdem $(m-n)c \gtrless nd$
$na = na$ $nc = nc$
$ma \gtrless n(a+b)$, je nachdem $mc \gtrless n(c+d)$.

olglich ist überhaupt, welche ganze Zahlen man auch unter m nd n verstehen mag, $ma \gtrless n(a+b)$, je nachdem $mc \gtrless n(c+d)$. olglich verhält sich $a : a+b = c : c+d$. Da aber $b : a = d : c$, so ist ach $b : b+a = d : d+c$, d. i. $a+b : b = c+d : d$.

§. 34. Lehrsatz.

In jeder Proportion verhält sich (differentiando) das Iste Glied ur Differenz der beiden ersten wie das 3te Glied zur Differenz es 3ten und 4ten, und die Differenz der beiden ersten Glieder um 2ten wie die Differenz des 3ten und 4ten zum 4ten.

Beweis. Es sei $a : b = c : d$, und $a > b$, so ist auch $c > d$. Man mache

$a : a-b = c : e$, so ist
ord. ex aeq. $a-b : b = e : d$, also (summando) $a-b : a = e : d+e$
$a-b : a = e : c$
$d+e = c$ (§. 7.)

lso $e = c-d$. Statt $a : a-b = c : e$ kann man also schreiben

$a : a-b = c : c-d$
$a : \ b \ = c : d$
ord. ex aeq. $a-b : b = c-d : d$.

Es sei dagegen $a : b = c : d$, und $a < b$, so ist $b : a = d : c$, und $> a$, folglich $b : b-a = d : d-c$, und $b-a : a = d-c : c$, d. i. $-a : b = d-c : d$, und $a : b-a = c : d-c$.

§. 35. Lehrsatz.

In jeder Proportion verhält sich (summando et differentiando) ie Summe der beiden ersten Glieder zu ihrer Differenz wie die umme der beiden letzten Glieder zu ihrer Differenz.

Beweis. Es sei $a : b = c : d$, und $a > b$, so verhält sich

$a+b : b = c+d : d$
$a-b : b = c-d : d$
ord. ex aeq. $a+b : a-b = c+d : c-d$.

s sei aber $a : b = c : d$, und $a < b$, so verhält sich

$a+b : b = c+d : d$
$b-a : b = d-c : d$
ord. ex aeq. $a+b : b-a = c+d : d-c$.

§. 36. Lehrsatz.

Wenn mehrere Proportionen, welche aus lauter gleichen V
hältnissen bestehen, Glied für Glied zusammen addirt werden,
erhält man wieder eine richtige Proportion.

Beweis. Es sei

$$\left.\begin{array}{l} a:b=c:d=e:f \\ g:h=i:k=e:f \\ l:m=n:p=e:f \\ q:r=s:t=e:f \end{array}\right\} \quad \ldots (1)$$

(wo statt 4 Reihen auch jede beliebige Anzahl von Reihen un
einander gesetzt sein können), so beweisen wir, dass

$$a+g+l+q:b+h+m+r=c+i+n+s:d+k+p+t.$$

Aus $a:b=e:f$, $g:h=e:f$, $l:m=e:f$ und $q:r=e:f$ f
nach §. 30.

$$a+g+l+q:b+h+m+r=e:f,$$

aus $c:d=e:f$, $i:k=e:f$, $n:p=e:f$ und $s:t=e:f$ aber

$$\frac{c+i+n+s:d+k+p+t=e:f}{\text{simpl. ex aeq. } a+g+l+q:b+h+m+r=c+i+n+s:d+k+p}$$

§. 37. Zusatz.

Statt der im vorigen Paragraphen erwähnten Addition kann
auch promiscue addiren und subtrahiren, und dabei jedes G
mit einer ganzen Zahl multipliciren oder dividiren oder mit ei
Bruch multipliciren; z. B. aus den oben mit (1) bezeichneten
portionen kann man (wenn $\frac{3}{4}a+5g>\frac{1}{7}l$) schliessen:

$$\tfrac{3}{4}a+5g-\tfrac{1}{7}l+q:\tfrac{3}{4}b+5h-\tfrac{1}{7}m+r=22i+n+\tfrac{2}{5}s:22k+p+\tfrac{2}{5}t.$$

§. 38. Zusatz.

Bei der in §. 35. erwähnten Schlussart summando et diffe
tiando kann man auch gleichnamige Glieder mit einerlei Z
multipliciren oder dividiren oder mit einerlei Bruch multiplici
z. B. aus $a:b=c:d$ kann man, wenn $6a<\frac{5}{8}b$, schliessen:

$$\tfrac{1}{7}a+\tfrac{1}{3}b:\tfrac{5}{8}b-6a=\tfrac{1}{7}c+\tfrac{1}{3}d:\tfrac{5}{8}d-6c,$$

und, wenn $\frac{1}{3}b>\frac{1}{7}a$ ist,

$$\tfrac{1}{3}b-\tfrac{1}{7}a:\tfrac{5}{8}b-6a=\tfrac{1}{3}d-\tfrac{1}{7}c:\tfrac{5}{8}d-6c.$$

§. 39. Lehrsatz.

Wenn 4 gleichartige Grössen, welche nicht sämmtlich einander gleich sind, in Proportion stehen, so sind entweder 2 und 2 einander gleich, oder es sind nur 2 einander gleich und eine grösser und eine kleiner, oder alle 4 sind ungleich; im ersten Fall sind die gleichen Glieder gleichnamig, im zweiten Fall aber die gleichen Glieder ungleichnamig und das grösste und kleinste ebenfalls unter einander ungleichnamig, im dritten Fall endlich das grösste und kleinste Glied ungleichnamig; im zweiten und dritten Fall ist die Summe des grössten und kleinsten Gliedes $>$ als die Summe der beiden übrigen Glieder.

Beweis. 1) Es sei $a:b=c:d$, und $a=b$, so ist auch $c=d$, also die gleichen Glieder gleichnamig.

2) Es sei $a:b=c:d$, und $a>b$, aber $=c$, so ist auch $b=d$, also die gleichen Glieder gleichnamig.

3) Es sei $a:b=c:d$, und $a>b$, auch $a>c$, und $b=c$, so ist a das grösste, und d das kleinste Glied, also die gleichen Glieder ungleichnamig und das grösste und kleinste ebenfalls unter einander ungleichnamig. Es ist also $a:b=b:d$. Setzt man $a=b+e$, so wird $b+e:b=b:d$, und setzt man noch $b=d+f$, so wird $d+e+f:d+f=d+f:d$, also die Summe des grössten und kleinsten Gliedes $=2d+e+f$, die Summe der beiden übrigen Glieder aber $=2d+f+f$. Aus $d+e+f:d+f=d+f:d$ folgt nach §. 34. $e:d+f=f:d$. Da in dieser Proportion das Glied $d+f>d$ ist, so ist auch $e>f$, also $2d+e+f>2d+f+f$, d. i. die Summe des grössten und kleinsten Gliedes in der Proportion $a:b=c:d$ grösser als die Summe der beiden übrigen Glieder.

4) Es sei $a:b=c:d$, und $a>b$, auch $a>c$, auch $b>c$, so folgen die 4 Glieder a, b, c, d nach der Ordnung ihrer Grösse, vom grössten bis zum kleinsten, auf einander; wir wollen beweisen, dass $a+d>b+c$. Man setze $c=d+e$, $b=c+f$, $a=b+g$, so kann man statt $a:b=c:d$ schreiben $d+e+f+g:d+e+f=d+e:d$. Folglich ist $a+d=2d+e+f+g$, und $b+c=2d+e+f+e$. Aus $d+e+f+g:d+e+f=d+e:d$ folgt nach §. 34. $g:d+e+f=e:d$. Da in dieser Proportion das Glied $d+e+f>d$ ist, so ist auch $g>e$, also $2d+e+f+g>2d+e+f+e$, d. i. $a+d>b+c$.

5) Es sei $a:b=c:d$, und $a>b$, auch $a>c$, aber $b<c$, so ist (weil $a>b$) $c>d$, und (weil $a>c$) $b>d$; folglich ist a das grösste und d das kleinste Glied der Proportion. Durch Verwechselung der mittleren Glieder erhält man $a:c=b:d$, woraus nach Nro. 4) folgt, dass $a+d>b+c$.

6) Es sei $a:b=c:d$, und $a>b$, $a<c$, aber $a=d$, so ist c das grösste, und b das kleinste Glied der Proportion. Da nun $c:d=a:b$, so ist nach Nro. 3) $c+b>d+a$.

7) Es sei $a:b=c:d$, und $a>b$, $a<c$, $a>d$, so ist (weil $c>a$) $d>b$; also ist c das grösste, und b das kleinste Glied der Proportion. Da nun $c:d=a:b$, so ist nach Nro. 5) $c+b>d+a$.

8) Es sei $a:b=c:d$, und $a>b$, $a<c$, $a<d$, so ist (weil $a>b$) $c>d$; also ist c das grösste, und b das kleinste Glied. Da nun $c:d=a:b$, so ist nach 4) $c+b>d+a$.

9) Es sei $a:b=c:d$, und $a<b$, aber $=c$, so ist auch $b=d$, also die gleichen Glieder gleichnamig.

10) Es sei $a:b=c:d$, und $a<b$, aber $>c$, und $a=d$, so ist durch Verwechselung der mittleren Glieder $a:c=b:d$, und wir haben wieder den Fall Nro. 6).

11) Es sei $a:b=c:d$, und $a<b$, aber $>c$, auch $a>d$, so ist durch Verwechselung der mittleren Glieder $a:c=b:d$, und wir haben wieder den Fall Nro. 7).

12) Es sei $a:b=c:d$, und $a<b$, $a>c$, $a<d$, so ist wiederum $a:c=b:d$, und wir haben wieder den Fall Nro. 8).

13) Es sei $a:b=c:d$, und $a<b$, $a<c$, und $b=c$, so ist $d:c=b:a$, und wir haben wieder den Fall Nro. 3).

14) Es sei $a:b=c:d$, und $a<b$, $a<c$, $b>c$, so ist $d:b=c:a$, und wir haben wieder den Fall Nro. 4).

15) Es sei $a:b=c:d$, und $a<b$, $a<c$, $b<c$, so ist $d:c=b:a$, und wir haben wieder den Fall Nro. 4).

§. 40. Lehrsatz.

Zwischen jeden 2 gleichartigen Grössen kann man so viel mittlere stetige Proportionalgrössen finden, als man will, aber, wenn ihre Anzahl gegeben ist, immer nur dieselben Grössen.

Beweis. Es seien a und b zwei gleichartige Grössen, und $b>a$; es sollen 3 mittlere stetige Proportionalen gefunden werden. Man bilde die geometrische Reihe a, c, d, e, f, und lasse c von dem Werthe a an stetig über alle Grenzen hinaus wachsen, so ist (nach dem vorigen Paragraphen) stets $c-a<d-c$, $d-c<e-d$, und $e-d<f-e$, also $f-a>4(c-a)$. Da nun $a:c=c:d$, und c stetig wächst, so wächst auch d stetig; da $a:c=d:e$, und c und d stetig wachsen, so wächst auch e stetig; da $a:c=e:f$, und c und e stetig wachsen, so wächst auch f stetig. Da aber $c-a$ über alle Grenzen hinaus wächst, so wächst um so mehr $f-a$ (welche Differenz nach Obigem $>4(c-a)$ ist) über alle Grenzen hinaus; folglich wächst f über alle Gränzen hinaus. Es muss also einen, aber auch nur Einen Werth von c geben, für welchen $f=b$ ist, und diesem Werth von c entspricht nur Ein Werth von d und nur Ein Werth von e.

Es sei aber nun $b<a$, so lassen sich, weil $a>b$ ist, zwischen b und a so viele mittlere Proportionalen finden, als man will, aber, wenn ihre Anzahl gegeben ist, immer nur dieselben Grössen. Diese mittleren Proportionalen sind aber, in umgekehrter Ordnung, die mittleren Proportionalen zwischen a und b.

§. 41. Zusatz.

Zu jedem gegebenen Verhältniss ist allemal ein, aber auch nur Ein Verhältniss möglich, welches, eine gegebene Anzahl mal mit sich selbst zusammengesetzt, das gegebene Verhältniss giebt.

§. 42. Erklärung.

Ein solches Verhältniss heisst ein **getheiltes** Verhältniss (das **halbe** Verhältniss, das **gedrittheilte** Verhältniss, das **geviertheilte** Verhältniss, u. s. w.), und wird durch einen vorgesetzten Bruch bezeichnet; so ist $\frac{1}{4}(a:b)$ das Verhältniss von a zur ersten der 3 mittleren stetigen Proportionalen zwischen a und b.

§. 43. Lehrsatz.

Wenn 2 Verhältnisse einander gleich sind, so sind auch ihre gehalbtheilten, gedrittheilten Verhältnisse u. s. w. einander gleich.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, so beweisen wir, dass a sich z. B. zur ersten der 3 mittleren stetigen Proportionalen zwischen a und b verhält wie c zur ersten der 3 mittleren stetigen Proportionalen zwischen c und d. Es sei $a:e=\frac{1}{4}(a:b)$, und man mache $a:e=c:f$, so ist

$$\begin{array}{l} a:b = 4(a:e) = 4(c:f) \\ a:b = \qquad\quad c:d \end{array}$$

simpl. ex aeq. $4(c:f)=c:d$, also $c:f=\frac{1}{4}(c:d)$

$$\begin{array}{r} c:f=a:e=\frac{1}{4}(a:b) \\ \text{simpl. ex aeq. } \frac{1}{4}(a:b)=\frac{1}{4}(c:d). \end{array}$$

§. 44. Lehrsatz.

Anstatt ein Verhältniss zu theilen und dann zu vervielfältigen, kann man von dem Ebensovielfachen des gegebenen Verhältnisses das ebensovielste getheilte Verhältniss nehmen.

Beweis. Es seien a und b gleichartige Grössen, und m und n beliebige ganze Zahlen; wir wollen beweisen, dass $n(\frac{1}{m}(a:b)) = \frac{1}{m}(n(a:b))$. Das $m$fache des Verhältnisses $\frac{1}{m}(a:b)$ ist $a:b$, also das $m$fache des Verhältnisses $n(\frac{1}{m}(a:b)) = n(a:b)$, aber das $m$fache des Verhältnisses $\frac{1}{m}(n(a:b))$ ebenfalls $=n(a:b)$. Folglich ist (nach dem vorigen Paragraphen) $n(\frac{1}{m}(a:b)) = \frac{1}{m}(n(a:b))$.

§. 45. Erklärung.

Das Verhältniss $n(\frac{1}{m}(a:b))$ oder $\frac{1}{m}(n(a:b))$ heisst ein ge-

brochenes Verhältniss, und wird kürzer durch $\frac{n}{m}(a:b)$ ausgedrückt; $m:n$ heisst in diesem Fall das Brechungsverhältniss.

§. 46. Lehrsatz.

Wenn man zwischen einer Grösse und einem aliquoten Theil derselben eine oder mehrere mittlere stetige Proportionalen nimmt, so ist entweder jede mittlere Proportionale ein aliquoter Theil jeder grösseren mittleren Proportionale, oder das getheilte Verhältniss ist ein irrationales.

Beweis. Die gegebene Grösse sei in m gleiche Theile getheilt, und ein solcher Theil sei a, und man mache $\frac{1}{n}(a:ma) = a:b$. Ist alsdann a kein aliquoter Theil von b, so beweisen wir, dass das Verhältniss $a:b$ ein irrationales sei. Gesetzt, $a:b$ sei ein rationales Verhältniss, und es sei $b = \frac{q}{p}a$, so wäre $ma = \frac{q^n}{p^n}a$; also müsste p^n ein aliquoter Theil von q^n sein, welches aber, weil p kein aliquoter Theil von q ist, unmöglich ist. Folglich ist die Annahme falsch, und $a:b$ ein irrationales Verhältniss.

§. 47. Lehrsatz

Jedes Verhältniss einer kleineren Grösse zu einer grösseren kann als ein vielfaches oder getheiltes oder gebrochenes Verhältniss jedes anderen Verhältnisses einer kleineren Grösse zu einer grösseren angesehen werden, und das Brechungsverhältniss ist für jedes gegebene Paar von Verhältnissen nur Eines, wenngleich nicht allemal rational.

Beweis. Es sei $a < b$, und $c < d$, und man mache $c:d = a:e$. Man theile das Verhältniss $c:d$ beliebig; man mache $\frac{1}{m}(c:d) = a:f$. Dann ist entweder das Verhältniss $a:b$ ein Vielfaches von $a:f$, oder es giebt 2 Vielfache $n(a:f) = a:g$ und $(n+1)(a:f) = a:h$ von der Art, dass b zwischen g und h liegt. Im letzteren Falle mache man $\frac{1}{2m}(c:d) = a:i$, und fahre mit der continuirlichen Halbtheilung des Verhältnisses $a:f$ fort, so erhellt das zu Beweisende ganz auf ähnliche Art wie in §. 2., wenn man noch §. 39. zu Hülfe nimmt.

Denn macht man $c:d = b:k$, $\frac{1}{m}(b:k) = b:l$, $\frac{1}{2m}(b:k) = b:m$, $\frac{1}{4m}(b:k) = b:p$, u. s. w., so ist nach §. 39. $l - b < \frac{k-b}{m}$,

$-b < \frac{k-b}{2m}$, $p-b < \frac{k-b}{4m}$, u. s. w.; da man nun durch fortgetzte Halbirungen ($\frac{k-b}{m}$, $\frac{k-b}{2m}$, $\frac{k-b}{4m}$, u. s. w.) auf eine Grösse ommt, welche kleiner ist als jede gegebene Grösse derselben Art, kommt man um so mehr durch fortgesetzte Halbtheilung des erhältnisses ($l-b$, $n-b$, $p-b$, u. s. w.) auf einen Unterschied, elcher kleiner ist als jede gegebene Grösse derselben Art; folgch wird um so mehr der Unterschied $h-g$ durch fortgesetzte albtheilung des Verhältnisses kleiner als jede gegebene Grösse erselben Art.

§. 48. Zusatz.

Dasselbe findet statt, wenn man jedes Verhältniss einer rösseren Grösse zu einer kleineren mit jedem anderen Verhältiss einer grösseren Grösse zu einer kleineren vergleicht.

XII.

Ueber die Bestimmung einer Gränze, welche die Anzahl der bei der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers zweier Zahlen zu machenden Divisionen nicht übersteigen kann.

Von

dem Herausgeber.

In verschiedenen französischen Journalen, namentlich in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées von Liouville, in den Comptes rendus de l'Académie des

sciences, und in den Nouvelles Annales de Mathématiques von Terquem und Gerono, kommen seit einiger Zeit Untersuchungen über die Bestimmung einer Gränze vor, welche die Anzahl der bei der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers zweier Zahlen zu machenden Divisionen nicht übersteigen kann. Wenn ich auch diese Untersuchungen nach dem, was jetzt vorliegt, noch nicht für abgeschlossen halte, so will ich doch die mir besonders wichtig und interessant scheinenden Resultate derselben den Lesern des Archivs im Folgenden im Zusammenhange mittheilen, indem ich hoffe, dass dadurch vielleicht einer oder der andere veranlasst werden wird, diesem jedenfalls sehr interessanten Gegenstande noch weiter nachzuforschen.

§. 1.

Wenn wir zwei beliebige ganze Zahlen durch A_1, B_1 bezeichnen, so ist die Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Theilers derselben nach der schon von Euklides gelehrten Methode bekanntlich in dem folgenden Schema enthalten:

$$
\begin{array}{l}
B_1 \mid A_1 \mid Q_1 \\
\quad \underline{B_1 Q_1} \\
\quad B_2 \mid B_1 \mid Q_2 \\
\qquad \underline{B_2 Q_2} \\
\qquad B_3 \mid B_2 \mid Q_3 \\
\qquad\quad \underline{B_3 Q_3} \\
\qquad\quad B_4 \cdots \\
\qquad\qquad B_{n-1} \mid B_{n-2} \mid Q_{n-1} \\
\qquad\qquad\quad \underline{B_{n-1} Q_{n-1}} \\
\qquad\qquad\quad B_n \mid B_{n-1} \mid Q_n \\
\qquad\qquad\qquad \underline{B_n Q_n} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

wo die Grössen

$$B_1, B_2, B_3, B_4, \ldots B_{n-1}, B_n$$

eine fortwährend abnehmende Reihe bilden, und der letzte Divisor B_n, bei welchem die Division aufgeht, welcher Fall bekanntlich immer endlich einmal eintreten muss, der gesuchte grösste gemeinschaftliche Theiler der beiden gegebenen Zahlen A_1, B_1 ist.

Aus dieser Darstellung ergeben sich die folgenden Gleichungen

$$
\begin{aligned}
A_1 &= B_1 Q_1 + B_2, \\
B_1 &= B_2 Q_2 + B_3, \\
B_2 &= B_3 Q_3 + B_4, \\
&\text{u. s. w.} \\
B_{n-2} &= B_{n-1} Q_{n-1} + B_n, \\
B_{n-1} &= B_n Q_n;
\end{aligned}
$$

, wenn man mit D dividirt:

$$\frac{A_1}{D} = \frac{B_1}{D} Q_1 + \frac{B_2}{D},$$

$$\frac{B_1}{D} = \frac{B_2}{D} Q_2 + \frac{B_3}{D},$$

$$\frac{B_2}{D} = \frac{B_3}{D} Q_3 + \frac{B_4}{D},$$

u. s. w.

$$\frac{B_{n-2}}{D} = \frac{B_{n-1}}{D} Q_{n-1} + \frac{B_n}{D},$$

$$\frac{B_{n-1}}{D} = \frac{B_n}{D} Q_n.$$

Ist nun D ein Theiler von A_1 und B_1, so sind offenbar auch

$$\frac{B_2}{D}, \frac{B_3}{D}, \frac{B_4}{D}, \ldots \frac{B_{n-1}}{D}, \frac{B_n}{D}$$

mtlich ganze Zahlen, und die nicht verschwindenden Grössen

$$\frac{B_1}{D}, \frac{B_2}{D}, \frac{B_3}{D}, \frac{B_4}{D}, \ldots \frac{B_{n-1}}{D}, \frac{B_n}{D}$$

en eine fortwährend abnehmende Reihe. Auch ist klar, dass der grösste gemeinschaftliche Theiler von $\frac{A_1}{D}$ und $\frac{B_1}{D}$ ist. raus ergiebt sich, dass man, um den grössten gemeinschaften Theiler von A_1 und B_1 zu finden, und um den grössten einschaftlichen Theiler von $\frac{A_1}{D}$ und $\frac{B_1}{D}$ zu erhalten, ganz elbe Anzahl von Divisionen machen muss. Weil nun B_n ein iler von A_1 und B_1 ist, so kann man im Vorhergehenden $= B_n$ setzen, und man wird also, um den grössten gemeinaftlichen Theiler von A_1 und B_1, und um den grössten genschaftlichen Theiler von $\frac{A_1}{B_n}$ und $\frac{B_1}{B_n}$ zu finden, immer ganz elbe Anzahl von Divisionen zu machen haben. Deshalb wollen im Folgenden annehmen, dass A_1 und B_1 relative Primzahlen , oder wir wollen, was offenbar dasselbe ist, $B_n = 1$ setzen, aus sich nach der Natur des angewandten Verfahrens ganz von st ergiebt, dass die Grössen

$$B_1, B_2, B_3, B_4, \ldots B_{n-1}$$

mlich grösser als die Einheit sind, und also der kleinste Werth, chen eine jede derselben erhalten kann, 2 ist.

§. 2.

Wenn nun B_{k-1}, B_k, B_{k+1} drei beliebige einander benachbarte Glieder der Reihe

$$B_1, B_2, B_3, B_4, \ldots B_{n-1}, B_n$$

sind; so haben wir nach dem Vorhergehenden die Gleichung

$$B_{k-1} = B_k Q_k + B_{k+1},$$

aus welcher sich ergiebt, dass immer

$$B_{k-1} \gtreqless B_k + B_{k+1}$$

ist. Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist aber

$$B_n = 1, \quad B_{n-1} \gtreqless 2.$$

Also ist offenbar kein Glied der Reihe

$$B_n, B_{n-1}, B_{n-2}, B_{n-3}, B_{n-4}, B_{n-5}, \ldots.$$

kleiner als das gleichstellige Glied der Reihe

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots.$$

welche so gebildet ist, dass vom dritten Gliede an jedes Glied die Summe der beiden unmittelbar vorhergehenden ist. Bezeichnen wir folglich die Glieder dieser Reihe durch

$$\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3, \mathfrak{K}_4, \mathfrak{K}_5, \mathfrak{K}_6, \mathfrak{K}_7, \ldots.$$

und setzen also

$$\begin{aligned}
\mathfrak{K}_1 &= 1, \\
\mathfrak{K}_2 &= 2, \\
\mathfrak{K}_3 &= \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2, \\
\mathfrak{K}_4 &= \mathfrak{K}_2 + \mathfrak{K}_3, \\
\mathfrak{K}_5 &= \mathfrak{K}_3 + \mathfrak{K}_4, \\
\mathfrak{K}_6 &= \mathfrak{K}_4 + \mathfrak{K}_5, \\
\mathfrak{K}_7 &= \mathfrak{K}_5 + \mathfrak{K}_6,
\end{aligned}$$

u. s. w.

so ist kein Glied der Reihe

$$B_n, B_{n-1}, B_{n-2}, B_{n-3}, B_{n-4}, B_{n-5}, \ldots.$$

kleiner als das gleichstellige Glied der Reihe

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4, \mathfrak{A}_5, \mathfrak{A}_6, \mathfrak{A}_7, \ldots.$$

welche wir im Folgenden die Reihe (I) nennen wollen. Also ist, wenn man wie im Vorhergehenden, um den grössten gemeinschaftlichen Theiler von A_1 und B_1 zu finden, n Divisionen zu machen genöthigt war, immer

$$B_1 \geqq \mathfrak{A}_n,$$

woraus sich ergiebt, dass, wenn überhaupt $\mathfrak{A}_\mu$ das erste, B_1 übersteigende Glied der Reihe (I) ist, die Anzahl der Divisionen, welche die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von A_1 und B_1 erfordert, nicht grösser als $\mu-1$ ist, weil, wenn die Anzahl dieser Divisionen μ wäre, nach dem Obigen

$$B_1 \geqq \mathfrak{A}_\mu,$$

folglich $\mathfrak{A}_\mu$ nicht das erste, B_1 übersteigende Glied der Reihe (I) sein würde, wie doch angenommen wurde. Wenn man also eine Grösse finden will, welche die Anzahl der durch die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers der Zahlen A_1 und B_1 nöthig gemachten Divisionen nicht übersteigen kann, so verfahre man auf folgende Art:

In der Reihe (I) suche man das erste Glied auf, welches grösser als B_1 ist; dann kann die Anzahl der durch die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von A_1 und B_1 nöthig gemachten Divisionen nicht grösser als die Anzahl der diesem Gliede vorhergehenden Glieder der Reihe (I) sein.

Wenn auch im Vorhergehenden angenommen worden ist, dass A_1 und B_1 relative Primzahlen sein sollen, so kann man diese von Lionnet in den Nouvelles Annales de Mathématiques. Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, redigé par Terquem et Gerono. Décembre 1845. p. 622. gegebene Regel doch offenbar auch anwenden, wenn die in Rede stehende Voraussetzung nicht erfüllt ist; nur wird man dann nicht die niedrigste Gränze finden, welche die Anzahl der durch die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von A_1 und B_1 nöthig gemachten Divisionen nicht übersteigen kann; eine niedrigere Gränze wird sich immer ergeben, wenn man die Regel auf die Quotienten anwendet, welche man erhält, wenn man A_1 und B_1 durch einen ihrer gemeinschaftlichen Theiler dividirt, und die niedrigste Gränze bekommt man durch die Anwendung der Regel auf die Quotienten, welche man erhält, wenn A_1 und B_1 durch ihren grössten gemeinschaftlichen Theiler dividirt werden, was wir durch das folgende Beispiel erläutern wollen.

Die Reihe (I) ist

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,
610, 987, 1597, 2584, 4181, ...

Ist nun $A_1=2904$, $B_1=1122$, so ist das erste B_1 übersteigende Glied dieser Reihe 1597, und die Gränze, welche die Anzahl der durch die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von 2904 und 1122 nöthig gemachten Divisionen nicht übersteigen kann, ist folglich 15. Dividiren wir aber 2904 und 1122 durch 11, so können wir $A_1=264$, $B_1=102$ setzen, und das erste B_1 übersteigende Glied der Reihe (I) ist folglich 144, die Gränze, welche die Anzahl der durch die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von 1904 und 1122 nöthig gemachten Divisionen nicht übersteigen kann, also 10. Der grösste gemeinschaftliche Theiler von 2904 und 1122 ist 66, so dass wir also $A_1=44$, $B_1=17$ setzen können, wo dann das erste B_1 übersteigende Glied der Reihe (I) 21, also die Gränze, welche die Anzahl der durch die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von 2904 und 1122 nöthig gemachten Divisionen nicht übersteigen kann, 6 ist. Die Richtigkeit hiervon zeigt die folgende Rechnung:

$$
\begin{array}{rl}
1122 \mid 2904 \mid 2 & \\
\underline{2244} & \\
660 \mid 1122 \mid 1 & \\
\underline{660} & \\
462 \mid 660 \mid 1 & \\
\underline{462} & \\
198 \mid 462 \mid 2 & \\
\underline{396} & \\
66 \mid 198 \mid 3 & \\
\underline{198} & \\
0 &
\end{array}
$$

§. 3.

Eine andere Regel hat der scharfsinnige Lamé in den Comptes rendus de l'Académie des sciences. 28. Octobre 1844. gegeben, zu welcher man auf folgende Weise gelangen kann.

Nach dem Vorhergehenden ist

$$
\begin{aligned}
B_n &= 1, \\
B_{n-1} &\geqq 2, \\
B_{n-2} &\geqq 3, \\
B_{n-3} &\geqq 5, \\
B_{n-4} &\geqq 8
\end{aligned}
$$

und

$$B_{n-5} \gtreqless 13, \quad B_{n-6} \gtreqless 21;$$

$$\begin{aligned} B_{n-5} &> 1 \,.\, 10, \\ B_{n-6} &> 2 \,.\, 10, \\ B_{n-7} &> 3 \,.\, 10, \\ B_{n-8} &> 5 \,.\, 10, \\ B_{n-9} &> 8 \,.\, 10 \end{aligned}$$

$$B_{n-10} > 13 \,.\, 10, \quad B_{n-11} > 21 \,.\, 10;$$

$$\begin{aligned} B_{n-10} &> 1 \,.\, 10^2, \\ B_{n-11} &> 2 \,.\, 10^2, \\ B_{n-12} &> 3 \,.\, 10^2, \\ B_{n-13} &> 5 \,.\, 10^2, \\ B_{n-14} &> 8 \,.\, 10^2 \end{aligned}$$

$$B_{n-15} > 13 \,.\, 10^2, \quad B_{n-16} > 21 \,.\, 10^2$$

$$\begin{aligned} B_{n-15} &> 1 \,.\, 10^3, \\ B_{n-16} &> 2 \,.\, 10^3, \\ B_{n-17} &> 3 \,.\, 10^3, \\ B_{n-18} &> 5 \,.\, 10^3, \\ B_{n-19} &> 8 \,.\, 10^3 \end{aligned}$$

$$B_{n-20} > 13 \,.\, 10^3, \quad B_{n-21} > 21 \,.\, 10^3;$$

$$\begin{aligned} B_{n-20} &> 1 \,.\, 10^4, \\ B_{n-21} &> 2 \,.\, 10^4, \\ B_{n-22} &> 3 \,.\, 10^4, \\ B_{n-23} &> 5 \,.\, 10^4, \\ B_{n-24} &> 8 \,.\, 10^4 \end{aligned}$$

$$B_{n-25} > 13 \cdot 10^4, \quad B_{n-26} > 21 \cdot 10^4.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar.

Es ist also unter der Voraussetzung, dass $n > 5k$ ist, immer

$$B_{n-5k} \gtrless 10^k.$$

Wenn nun, indem N die Anzahl der Ziffern von B_1 bezeichnet, $n > 5N$ wäre, so wäre nach dem Vorhergehenden

$$B_{n-5N} \gtrless 10^N;$$

und die Anzahl der Ziffern von B_{n-5N} wäre also mindestens $N+1$. Folglich wäre, da

$$B_1 \gtrless B_{n-5N}$$

ist, auch die Anzahl der Ziffern von B_1 mindestens $N+1$, und demnach nicht bloss N, wie doch vorausgesetzt wurde. Daher kann nicht $n > 5N$ sein, und es ist folglich immer $n \lesseqgtr 5N$, welches uns zu dem folgenden zuerst von Lamé gefundenen Satze führt:

Die Anzahl der zu der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von A_1 und B_1 erforderlichen Divisionen kann nie die fünffache Anzahl der Ziffern der Zahl B_1 übersteigen.

Auch für diese Regel gilt die schon oben gemachte Bemerkung, dass es bei deren Anwendung nicht unbedingt nöthig ist, dass A_1 und B_1 relative Primzahlen sind. Natürlich wird man aber die niedrigste Gränze erhalten, wenn dies der Fall ist. Für die Zahlen 2904 und 1122 liefert uns die Regel von Lamé die Zahl 20 als Gränze, welche höher ist als die Gränze 15, welche uns oben die Regel von Lionnet lieferte. Für die Zahlen 264 und 102 liefert uns die Regel von Lamé die Gränze 15; aus der Regel von Lionnet ergab sich 10 als Gränze. Für die Zahlen 44 und 17 liefert uns die Regel von Lamé die Gränze 10; aus der Regel von Lionnet ergab sich 6 als Gränze. Hieraus erhellet, dass die Regel von Lionnet der Regel von Lamé vorzuziehen ist, wenn auch der von letzterem gefundene Satz allerdings an sich ein besonderes Interesse darbietet.

§. 4.

Es seien jetzt wieder B_{k-1}, B_k, B_{k+1} drei einander benachbarte Glieder der Reihe

$$B_1, B_2, B_3, B_4, \ldots B_{n-1}, B_n.$$

Wenn $B_k \lessgtr \frac{1}{2} B_{k-1}$ ist, so ist, weil bekanntlich immer B_{k+1} B_k ist, $B_{k+1} < \frac{1}{2} B_{k-1}$. Wäre aber zugleich $B_k > \frac{1}{2} B_{k-1}$ und $B_{k+1} \lessgtr \frac{1}{2} B_{k-1}$, so wäre offenbar

$$B_k Q_k + B_{k+1} > B_{k-1},$$

as ungereimt ist, weil bekanntlich

$$B_{k-1} = B_k Q_k + B_{k+1}$$

t. Wenn also $B_k > \frac{1}{2} B_{k-1}$ ist, so ist $B_{k+1} < \frac{1}{2} B_{k-1}$, und es t folglich immer

$$B_{k+1} < \frac{1}{2} B_{k-1}.$$

Hiernach ist also

$$B_3 < \frac{1}{2} B,$$

$$B_4 < \frac{1}{2} B_2,$$

$$B_5 < \frac{1}{2} B_3,$$

$$B_6 < \frac{1}{2} B_4,$$

$$B_7 < \frac{1}{2} B_5,$$

u. s. w.

Ist nun $B_2 \lessgtr \frac{1}{2} B_1$, so ist:

$$B_3 < \frac{1}{2} B_1,$$

$$B_4 < \frac{1}{2^2} B_1,$$

$$B_5 < \frac{1}{2^2} B_1,$$

$$B_6 < \frac{1}{2^3} B_1,$$

$$B_7 < \frac{1}{2^3} B_1,$$

$$B_8 < \frac{1}{2^4} B_1,$$

$$B_9 < \frac{1}{2^4} B_1,$$

u. s. w.

Ist aber $B_2 > \frac{1}{2} B_1$, so ist, weil bekanntlich doch $B_2 < B_1$ ist:

$$B_3 < \frac{1}{2} B_1,$$

$$B_4 < \frac{1}{2} B_1,$$

$$B_5 < \frac{1}{2^2} B_1,$$

$$B_6 < \frac{1}{2^2} B_1,$$

$$B_7 < \frac{1}{2^3} B_1,$$

$$B_8 < \frac{1}{2^3} B_1,$$

u. s. w.

Wenn also $B_2 \lessgtr \frac{1}{2} B_1$ ist, so ist, jenachdem n eine oder eine ungerade Zahl ist,

$$B_n < \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} B_1 \text{ oder } B_n < \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}} B_1,$$

und folglich, weil bekanntlich $B_n = 1$ ist:

$$B_1 > 2^{\frac{n}{2}} \text{ oder } B_1 > 2^{\frac{n-1}{2}}.$$

Ist nun 2^μ die grösste in B_1 enthaltene Potenz von 2, so jenachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist,

$$2^\mu \lessgtr 2^{\frac{n}{2}} \text{ oder } 2^\mu \lessgtr 2^{\frac{n-1}{2}},$$

also

$$\frac{n}{2} \lessgtr \mu \text{ oder } \frac{n-1}{2} \lessgtr \mu,$$

d folglich

$$n \lessgtr 2\mu \text{ oder } n \lessgtr 2\mu + 1.$$

Wenn aber $B_2 > \frac{1}{2} B_1$ ist, so ist, jenachdem n eine gerade
der eine ungerade Zahl ist,

$$B_n < \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} B_1 \text{ oder } B_n < \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}} B_1,$$

nd folglich, weil bekanntlich $B_n = 1$ ist:

$$B_1 > 2^{\frac{n-2}{2}} \text{ oder } B_1 > 2^{\frac{n-1}{2}}.$$

st nun wieder 2^μ die grösste in B_1 enthaltene Potenz von 2,
o ist, jenachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist,

$$2^\mu \gtrless 2^{\frac{n-2}{2}} \text{ oder } 2^\mu \gtrless 2^{\frac{n-1}{2}},$$

lso

$$\frac{n-2}{2} \lessgtr \mu \text{ oder } \frac{n-1}{2} \lessgtr \mu,$$

nd folglich

$$n \lessgtr 2\mu + 2 \text{ oder } n \lessgtr 2\mu + 1.$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar der folgende Satz:

Wenn 2^μ die grösste in B_1 enthaltene Potenz von
ist, so kann, jenachdem $B_2 \lessgtr \frac{1}{2} B_1$ oder $B_2 > \frac{1}{2} B_1$ ist,
ie Anzahl der Divisionen, welche die Aufsuchung des
rössten gemeinschaftlichen Theilers von A_1 und B_1
rfordert, respective nicht grösser als $2\mu+1$ und nicht
rösser als $2\mu+2$ sein.

Lionnet giebt a. a. O. p. 620. als Gränze, welche die An-
ahl der Divisionen nicht übersteigen kann, allgemein $2\mu+1$
n. Ich glaube aber, dass nur der Ausdruck des Satzes, wie ich
enselben so eben gegeben habe, richtig ist. Wenigstens sehe
h jetzt nicht, wie man durch ganz sichere Schlüsse zu der von
ionnet angegebenen, nach seiner Meinung allgemein gültigen
ränze gelangen kann, glaube aber, wie ich schon im Eingange
emerkt habe, dass dieser Gegenstand überhaupt noch nicht als
llständig erledigt betrachtet werden darf, und halte weitere Un-
rsuchungen über denselben jedenfalls für sehr dankenswerth.

§. 5.

Man kann bei der Bestimmung des grössten gemeinsc
chen Theilers zweier Zahlen sich auch der folgenden, von d
wöhnlichen etwas verschiedenen Methode bedienen.

In allen den Fällen nämlich, wo bei Anwendung der ge
lichen Methode der bleibende Rest grösser als die Hälfte
entsprechenden Divisors ist, vermehre man den Quotiente
Eins, ziehe von dem Producte des Divisors und Quotiente
Dividendus ab, und verfahre sonst übrigens ganz wie bei de
wöhnlichen Methode, d. h. man führe die Rechnung in de
gegebenen Weise so lange fort, bis man auf einen verschwind
Rest kommt, wo dann immer der entsprechende Divisor de
suchte grösste gemeinschaftliche Theiler der beiden gegel
Zahlen ist.

Bezeichnen wir, um die so eben angedeutete Methode
näher zu betrachten, die beiden gegebenen Zahlen wieder
A_1 und B_1, die gebrauchten Divisoren durch

$$B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ B_5,\ \ldots.$$

und die entsprechenden Quotienten durch

$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ Q_4,\ Q_5,\ \ldots.;$$

also die entsprechenden Reste durch

$$B_2,\ B_3,\ B_4,\ B_5,\ B_6,\ \ldots.;$$

so haben wir, wenn

$$i_1,\ i_2,\ i_3,\ i_4,\ i_5,\ \ldots.$$

gewisse positive gerade oder ungerade ganze Zahlen bezeich
die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
A_1 &= B_1\,Q_1 + (-1)^{i_1}.B_2,\\
B_1 &= B_2\,Q_2 + (-1)^{i_2}.B_3,\\
B_2 &= B_3\,Q_3 + (-1)^{i_3}.B_4,\\
B_3 &= B_4\,Q_4 + (-1)^{i_4}.B_5,\\
&\text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

von denen wir eine beliebige überhaupt durch

$$B_{k-1} = B_k\,Q_k + (-1)^{i_k}.B_{k+1}$$

bezeichnen wollen.

Wenn i_k eine gerade Zahl ist, so ist nach dem Obigen

$$B_{k+1} \leqq \frac{1}{2} B_k.$$

Wenn dagegen i_k eine ungerade Zahl ist, so ist nach dem Obigen offenbar

$$B_{k-1} - B_k (Q_k - 1) > \frac{1}{2} B_k,$$

d. i.

$$B_{k-1} - B_k Q_k + B_k > \frac{1}{2} B_k,$$

folglich

$$B_k Q_k - B_{k-1} < B_k - \frac{1}{2} B_k,$$

d. i.

$$B_{k+1} < \frac{1}{2} B_k.$$

Wenn man also das oben angegebene Verfahren anwendet, so übersteigt kein Rest die Hälfte des entsprechenden Divisors.

Zugleich erhellet hieraus von selbst, dass

$$B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, \ldots.$$

eine Reihe fortwährend abnehmender ganzer Zahlen ist, welche also jederzeit endlich einmal abbrechen, d. h. auf ein verschwindendes Glied führen muss.

Ist nun B_{n+1} der verschwindende Rest, auf welchen man nach dem Vorhergehenden immer endlich einmal kommen muss, so haben wir die folgende Reihe von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
A_1 &= B_1 Q_1 + (-1)^{i_1} . B_2, \\
B_1 &= B_2 Q_2 + (-1)^{i_2} . B_3, \\
B_2 &= B_3 Q_3 + (-1)^{i_3} . B_4, \\
&\text{u. s. w.} \\
B_{n-2} &= B_{n-1} Q_{n-1} + (-1)^{i_{n-1}} . B_n, \\
B_{n-1} &= B_n Q_n.
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen erhellet leicht, dass B_n ein gemeinschaftlicher Theiler von A_1 und B_1 ist. Eben so leicht erhellet aber aus denselben auch, dass jeder gemeinschaftliche Theiler von

A_1 und B_1 auch ein Theiler von B_n sein muss, woraus sich der bekannten Schlussweise ergiebt, dass B_n der grösste gemeinschaftliche Theiler von A_1 und B_1 ist, wie behauptet wurde.

Im Folgenden wollen wir nun wieder annehmen, dass A_1 und B_1 relative Primzahlen sind, also $B_n = 1$ ist, wozu wir aus ähnlichen Gründen wie in §. 1. berechtigt sind.

§. 6.

Nach dem vorhergehenden Paragraphen haben wir die Gleichung:

$$B_{k-1} = B_k Q_k + (-1)^{i_k} . B_{k+1},$$

wo

$$B_k \leqq \frac{1}{2} B_{k-1}, \quad B_{k+1} \leqq \frac{1}{2} B_k;$$

also

$$B_{k-1} \geqq 2B_k, \quad B_k \geqq 2B_{k+1}$$

ist. Folglich ist

$$\frac{B_{k-1}}{B_k} \leqq 2.$$

Ist nun i_k eine gerade Zahl, so ist, wie aus dem Vorhanden und der Natur der Methode auf der Stelle erhellet, zeit $Q_k \geqq 2$, also, wegen der Gleichung

$$B_{k-1} = B_k Q_k + B_{k+1},$$

offenbar

$$B_{k-1} \geqq 2B_k + B_{k+1}.$$

Ist dagegen i_k eine ungerade Zahl, so erhellet eben so dass immer $Q_k - 1 \geqq 2$, also $Q_k \geqq 3$, und folglich, wegen Gleichung

$$B_{k-1} = B_k Q_k - B_{k+1},$$

offenbar

$$B_{k-1} \geqq 3B_k - B_{k+1}$$

$$B_{k-1} \gtreqless 2B_k + B_k - B_{k+1}$$

Nun ist aber nach dem Obigen $B_k \gtreqless 2B_{k+1}$, also

$$B_k - B_{k+1} \gtreqless B_{k+1},$$

folglich nach dem Vorhergehenden

$$B_{k-1} \gtreqless 2B_k + B_{k+1}.$$

Daher ist in allen Fällen

$$B_{k-1} \gtreqless 2B_k + B_{k+1}.$$

Bekanntlich ist nun $B_n = 1$ und $B_{n-1} \gtreqless 2B_n$. Also ist hier- und wegen der vorhergehenden Gleichung offenbar kein Glied Reihe

$$B_n,\ B_{n-1},\ B_{n-2},\ B_{n-3},\ B_{n-4},\ B_{n-5},\ \ldots.$$

er als das gleichstellige Glied der Reihe

$$1,\ 2,\ 5,\ 12,\ 29,\ 70,\ 169,\ 408,\ \ldots.$$

he so gebildet ist, dass vom dritten Gliede an jedes Glied lten wird, wenn man zu dem doppelten vorhergehenden Gliede vorhergehende Glied addirt. Bezeichnen wir folglich die Glie- dieser Reihe durch

$$\mathfrak{B}'_1,\ \mathfrak{B}'_2,\ \mathfrak{B}'_3,\ \mathfrak{B}'_4,\ \mathfrak{B}'_5,\ \mathfrak{B}'_6,\ \mathfrak{B}'_7,\ \ldots.$$

setzen also

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}'_1 &= 1,\\
\mathfrak{B}'_2 &= 2,\\
\mathfrak{B}'_3 &= \mathfrak{B}'_1 + 2\mathfrak{B}'_2,\\
\mathfrak{B}'_4 &= \mathfrak{B}'_2 + 2\mathfrak{B}'_3,\\
\mathfrak{B}'_5 &= \mathfrak{B}'_3 + 2\mathfrak{B}'_4,\\
\mathfrak{B}'_6 &= \mathfrak{B}'_4 + 2\mathfrak{B}'_5,\\
\mathfrak{B}'_7 &= \mathfrak{B}'_5 + 2\mathfrak{B}'_6,
\end{aligned}$$

u. s. w.

t kein Glied der Reihe

$$B_n,\ B_{n-1},\ B_{n-2},\ B_{n-3},\ B_{n-4},\ B_{n-5},\ \ldots.$$

kleiner als das gleichstellige Glied der Reihe

$$\mathfrak{A}'_1, \mathfrak{A}'_2, \mathfrak{A}'_3, \mathfrak{A}'_4, \mathfrak{A}'_5, \mathfrak{A}'_6, \mathfrak{A}'_7, \ldots.$$

welche wir im Folgenden die Reihe (II) nennen wollen. Hieraus ergiebt sich auf ganz ähnliche Art wie in §. 2. zur Bestimmung einer Gränze, welche die Anzahl der durch die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers zweier Zahlen A_1 und B_1 nöthig gemachten Divisionen nicht übersteigen kann, die in dem folgenden Satze enthaltene Regel:

In der Reihe (II) suche man das erste Glied auf, welches grösser als B_1 ist; dann kann die Anzahl der durch die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von A_1 und B_1 nöthig gemachten Divisionen nicht grösser als die Anzahl der diesem Gliede vorangehenden Glieder der Reihe (II) sein.

Dass bei dieser Regel die Anwendung der in §. 5. näher charakterisirten zweiten Methode zur Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Theilers vorausgesetzt wird, braucht hier wohl nicht wiederholt in Erinnerung gebracht zu werden.

Für die Zahlen $A_1 = 2904$ und $B_1 = 1122$ liefert die vorhergehende Regel die Gränze 9. Für $A_1 = 264$ und $B_1 = 102$ erhält man die Gränze 6. Für $A_1 = 44$ und $B_1 = 17$ ergiebt sich die Gränze 4, wobei man §. 2. zu vergleichen hat. Die Richtigkeit der letzteren Gränze ergiebt sich aus der folgenden Rechnung:

$$\begin{array}{rl|l}
1122 & 2904 & 3 \\
 & \underline{3366} & \\
 & 462 & 1122 \mid 2 \\
 & & \underline{924} \\
 & & 198 \mid 462 \mid 2 \\
 & & \quad \underline{396} \\
 & & \quad 66 \mid 198 \mid 3 \\
 & & \quad\quad \underline{198} \\
 & & \quad\quad 0
\end{array}$$

Die obige Regel hat Lionnet a. a. O. gegeben.

§. 7.

Nach dem Vorhergehenden ist

$$B_n = 1,$$
$$B_{n-1} \gtrless 2,$$
$$B_{n-2} \gtrless 5$$

und

$$B_{n-3} \gtreqless 12, \quad B_{n-4} \gtreqless 29;$$

$$B_{n-3} > 1.10,$$
$$B_{n-4} > 2.10,$$
$$B_{n-5} > 5.10$$

$$B_{n-6} > 12.10, \quad B_{n-7} > 29.10;$$

$$B_{n-6} > 1.10^2,$$
$$B_{n-7} > 2.10^2,$$
$$B_{n-8} > 5.10^2$$

$$B_{n-9} > 12.10^2, \quad B_{n-10} > 29.10^2;$$

$$B_{n-9} > 1.10^3,$$
$$B_{n-10} > 2.10^3,$$
$$B_{n-11} > 5.10^3$$

$$B_{n-12} > 12.10^3, \quad B_{n-13} > 29.10^3;$$

$$B_{n-12} > 1.10^4,$$
$$B_{n-13} > 2.10^4,$$
$$B_{n-14} > 5.10^4$$

$$B_{n-15} > 12.10^4, \quad B_{n-16} > 29.10^4.$$

man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar.

Es ist also unter der Voraussetzung, dass $n > 3k$ ist, immer

$$B_{n-3k} \gtreqless 10^k.$$

Wenn nun, indem N die Anzahl der Ziffern von B_1 bezeichnet, $3N$ wäre, so wäre nach dem Vorhergehenden

$$B_{n-3N} \geqq 10^N,$$

und die Anzahl der Ziffern von B_{n-3N} wäre also mindestens
Folglich wäre, da

$$B_1 \geqq B_{n-3N}$$

ist, auch die Anzahl der Ziffern von B_1 mindestens $N+1$,
demnach nicht bloss N, wie doch vorausgesetzt wurde. I
kann nicht $n > 3N$ sein, und es ist folglich immer $n \leqq 3N$,
ches uns zu dem folgenden ebenfalls von Lionnet gefun
Satze führt:

Die Anzahl der zu der Aufsuchung des grös
gemeinschaftlichen Theilers von A_1 und B_1 erford
chen Divisionen kann nie die dreifache Anzahl
Ziffern der Zahl B_1 übersteigen.

Früher als Lionnet hat Binet in dem Journal von Liou
(T. VI.) die höhere und also weniger genäherte Gränze $1 +$
angegeben.

§. 8.

Weil bekanntlich allgemein

$$B_{k+1} \leqq \frac{1}{2} B_k$$

ist, so ist

$$B_2 \leqq \frac{1}{2} B_1,$$

$$B_3 \leqq \frac{1}{2} B_2,$$

$$B_4 \leqq \frac{1}{2} B_3,$$

$$B_5 \leqq \frac{1}{2} B_4,$$

$$B_6 \leqq \frac{1}{2} B_5,$$

u. s. w.

und folglich

$$B_2 \overset{=}{<} \frac{1}{2} B_1,$$

$$B_3 \overset{=}{<} \frac{1}{2^2} B_1,$$

$$B_4 \overset{=}{<} \frac{1}{2^3} B_1$$

$$B_5 \overset{=}{<} \frac{1}{2^4} B_1,$$

$$B_6 \overset{=}{<} \frac{1}{2^5} B_1,$$

u. s. w

Also ist

$$B_n \overset{=}{<} \frac{1}{2^{n-1}} B_1,$$

voraus sich, weil $B_n = 1$ ist,

$$B_1 \overset{=}{>} 2^{n-1}$$

rgiebt. Ist nun 2^μ die grösste in B_1 enthaltene Potenz von 2, o ist

$$2^\mu \overset{=}{>} 2^{n-1},$$

nd folglich $n-1 \overset{=}{<} \mu$, also $n \overset{=}{<} \mu+1$, was unmittelbar zu dem lgenden zuerst von Binet gefundenen Satze führt:

Wenn 2^μ die grösste in B_1 enthaltene Potenz von ist, so kann die Anzahl der Divisionen, welche die ufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers on A_1 und B_1 erfordert, niemals grösser als $\mu+1$ sein.

Diesem Satze kann man noch Folgendes beifügen.

Wenn

$$B_2 \overset{=}{<} \frac{1}{4} B_1$$

ist, so ist, weil

$$B_3 \overset{=}{<} \frac{1}{2} B_2,$$

$$B_4 \overset{=}{<} \frac{1}{2} B_3,$$

$$B_5 \leqq \frac{1}{2} B_4,$$

$$B_6 \leqq \frac{1}{2} B_5,$$

u. s. w.

ist:

$$B_2 \leqq \frac{1}{2^2} B_1,$$

$$B_3 \leqq \frac{1}{2^3} B_1,$$

$$B_4 \leqq \frac{1}{2^4} B_1,$$

$$B_5 \leqq \frac{1}{2^5} B_1,$$

$$B_6 \leqq \frac{1}{2^6} B_1,$$

u. s. w.

und folglich

$$B_n \leqq \frac{1}{2^n} B_1,$$

also, weil $B_n = 1$ ist,

$$B_1 \geqq 2^n.$$

Ist nun wieder 2^μ die grösste in B_1 enthaltene Potenz v
so ist

$$2^\mu \geqq 2^n,$$

also $n \leqq \mu$, was zu dem folgenden Satze führt:

Wenn 2^μ die grösste in B_1 enthaltene Potenz
2 und $B_2 \leqq \frac{1}{4} B_1$ ist, so kann die Anzahl der D
sionen, welche die Aufsuchung des grössten gem
schaftlichen Theilers von A_1 und B_1 erfordert, nien
grösser als μ sein.

Diese Bemerkung habe ich hier um so weniger unterdrü
wollen, weil sie der in §. 4. über den analogen von Lionnet g
denen Satz gemachten Bemerkung entspricht, und eine Bestäti
mehr abgiebt, dass der erwähnte Satz in der ihm von Lio
gegebenen Fassung unrichtig ist, und die ihm oben durch mic
Theil gewordene Berichtigung wirklich erfordert.

Zum Schluss mag hier nun noch bemerkt werden, dass, wie aus dem Obigen sich unzweideutig ergiebt, bei der zweiten neuerlich wohl vorzüglich von Binet hervorgehobenen Methode zur Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers zweier Zahlen die Gränze für die Anzahl der erforderlichen Divisionen im Allgemeinen niedriger ist als bei der älteren in allen Lehrbüchern sich findenden Methode des Euklides, weshalb uns allerdings die neuere Methode recht sehr zu verdienen scheint, allgemeineren Eingang in die Lehrbücher und den arithmetischen Unterricht zu finden.

XIII.

Ueber die Bewegung eines schweren Punktes auf einer krummen Linie.

Von dem

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Wenn sich ein materieller Punkt von einer ihrer Lage nach bekannten Stelle einer Curve aus ohne Anfangsgeschwindigkeit, einzig und allein vermöge seiner Schwere, auf der Curve selbst abwärts bewegt und in Folge dieser Bewegung nach der Zeit t an eine andere Stelle der krummen Linie gekommen ist, so wird die genannte Zeit immer von der Höhendifferenz des Anfangs- und Endpunktes der Bewegung abhängen, also eine Funktion derselben sein. Man könnte nun die Frage aufstellen, wie die Gleichung der in Rede stehenden Curve beschaffen sein müsse, wenn die Zeit t eine gegebene Funktion jener Höhendifferenz darstellen, oder einer solchen proportional sein soll. Wir wollen diese Frage, welche z. B. die nach der Tautochrone als speziellen Fall in sich fasst, durch die nachstehenden Betrachtungen zu beantworten versuchen.

Sei APC (Taf. III. Fig. 1.) irgend eine krumme Linie, BC eine durch einen beliebigen Punkt in ihr gezogene Vertikallinie und die Höhendifferenz der Punkte A und C, nämlich die Strecke BC von

C bis zum Fusspunkte des von A auf die Vertikale gefällten Perpendikels $= h$. Nach einem bekannten Satze der Dynamik kommt ein materieller Punkt, welcher sich von A aus ohne Anfangsgeschwindigkeit vermöge der Schwere von A nach P bewegt, an dieser Stelle mit eben derselben Geschwindigkeit an, die er bei freiem Falle durch die Strecke BQ, welche die Projektion von AP auf BC ist, am Ende des Falles in Q erlangen würde. Bezeichnen wir diese Geschwindigkeit mit v, die Beschleunigung der Schwere (30,1835 Fuss) mit g und BQ mit p, so ist hiernach

$$v = \sqrt{2gp}.$$

Nennen wir ferner σ den Bogen AP und τ die Zeit, in welcher der materielle Punkt ihn durchlief, so haben wir andererseits nach den Prinzipien der Dynamik

$$v = \frac{\partial \sigma}{\partial \tau},$$

und folglich durch Vergleichung dieses Werthes von τ mit dem vorhergehenden:

$$\sqrt{2gp}.\partial\tau = \partial\sigma$$

und

$$\sqrt{2g}.\partial\tau = \frac{\partial\sigma}{\sqrt{p}}.$$

Nehmen wir aber den Punkt C zum Anfangspunkte der Coordinaten und setzen

$$\text{Arc } CP = s,\ CQ = x,\ BC = h,$$

so wird

$$\sigma = \text{Arc } APC - s,\ p = h - x,$$

und durch Einführung dieser Werthe geht die vorige Differenzialgleichung in die folgende über:

$$\sqrt{2g}.\partial\tau = -\frac{\partial s}{\sqrt{h-x}},$$

und mithin wird jetzt

$$\sqrt{2g}.\tau = -\int \frac{\partial s}{\sqrt{h-x}} + \text{Const.}$$

Wollen wir hieraus die Zeit t finden, innerhalb welcher der ganze Bogen APC durchlaufen wird, so müssen wir die Constante so bestimmen, dass die ganze rechte Seite für $x = h$ verschwindet (weil dann der materielle Punkt noch in A befindlich und folglich keine Zeit verwendet worden ist) und darauf $x = 0$ setzen, oder,

was auf das Nämliche hinauskommt, wir müssen das Integral zu einem bestimmten machen, welches mit $x=h$ anfängt und mit $x=0$ aufhört. Demnach ist

$$\sqrt{2g}.t = -\int_h^0 \frac{\partial s}{\sqrt{h-x}},$$

oder, da man in einem bestimmten Integrale die Gränzen vertauschen darf, wenn man ihm das entgegengesetzte Zeichen giebt,

$$\sqrt{2g}.t = \int_0^h \frac{\partial s}{\sqrt{h-x}}. \qquad (1)$$

Kennt man die Gleichung zwischen den Coordinaten $CQ=x$, $PQ=y$ der Curve, so dient die Formel (1) zur Bestimmung von t, indem man ∂s nach der Relation

$$\partial s = \partial x \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

berechnet; umgekehrt aber dient sie auch zur Bestimmung der Gleichung der Curve, wenn über das Wachsthum der Zeit t eine besondere Voraussetzung gemacht wird.

In so fern s eine Funktion von x ist, dürfen wir

$$\partial s = \varphi(x)\,\partial x \qquad (2)$$

setzen, so dass

$$\sqrt{2g}.t = \int_0^h \frac{\varphi(x)\,\partial x}{\sqrt{h-x}} \qquad (3)$$

ist. Führen wir eine neue Veränderliche z dadurch ein, dass wir $x=hz$ nehmen, so wird $\partial x = h\,\partial z$, und wenn x die Werthe $x=0$ und $x=h$ angenommen hat, so ist $z\left(=\frac{x}{h}\right)$ entsprechend $=0$ und $=1$ geworden. Demnach haben wir

$$\sqrt{2g}.t = \int_0^1 \frac{\varphi(hz)\,h\,\partial z}{\sqrt{h-hz}},$$

oder

$$\sqrt{2g}.t = \int_0^1 \frac{\partial z}{\sqrt{1-z}} \sqrt{h}\,\varphi(hz). \qquad (4)$$

Soll nun die Zeit t einer gegebenen Funktion $f(h)$ von h proportional sein, so kann diese Bedingung offenbar nur dadurch erfüllt werden, dass

$$\sqrt{h}\,\varphi(hz) = f(h)\,\psi(z) \qquad (5)$$

ist, wo $\psi(z)$ eine blosse Funktion von z bedeutet. In der Tl geht dann die Gleichung (4) in die folgende über:

$$\sqrt{2g}.t = f(h)\int_0^1 \frac{\partial z}{\sqrt{1-z}}\,\psi(z); \qquad (6)$$

und da hier das Integral kein h enthält und durch Einführung d Gränzen $z=0$, $z=1$ auch die z herausfallen, so ist der Wer desselben eine blosse Zahl und folglich dann t der Funktion f proportional. Um nun aus der Gleichung (5) die beiden unb kannten Funktionen φ und ψ mit Hülfe der gegebenen f zu b stimmen, verfahren wir folgendermaassen.

Es folgt zunächst aus Nro. (5)

$$\varphi(hz) = \frac{f(h)}{\sqrt{h}}\psi(z). \qquad (7)$$

Nun ist aber, wenn $\varphi(hz)$ partiell nach z differenzirt wird:

$$\frac{\partial\varphi(hz)}{\partial z} = h\varphi'(hz),$$

und ebenso durch partielle Differenziation nach h:

$$\frac{\partial\varphi(hz)}{\partial h} = z\varphi'(hz).$$

Multipliziren wir die erste Gleichung mit z, die zweite mit h so werden die rechten Seiten einander gleich, und mithin ist

$$z\frac{\partial\varphi(hz)}{\partial z} = h\frac{\partial\varphi(hz)}{\partial h}.$$

Diese Eigenschaft von $\varphi(hz)$ muss aber vermöge der Gle chung (7) auch dem Quotienten $\frac{f(h)}{\sqrt{h}}\psi(z)$ zukommen, für welche

$$z\frac{\partial\varphi(hz)}{\partial z} = \frac{f(h)}{\sqrt{h}}z\psi'(z),$$

$$h\frac{\partial\varphi(hz)}{\partial h} = h\,\frac{h^{\frac{1}{2}}f'(h) - \frac{1}{2}h^{-\frac{1}{2}}f(h)}{h}\psi(z) = \frac{hf'(h) - \frac{1}{2}f(h)}{\sqrt{h}}\psi(z)$$

ist. Durch Gleichsetzung beider Ausdrücke ergiebt sich jetzt

$$f(h)z\psi'(z) = [hf'(h) - \tfrac{1}{2}f(h)]\psi(z),$$

oder nach beiderseitiger Division mit $f(h)z\psi(z)$:

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = [h\frac{f'(h)}{f(h)} - \tfrac{1}{2}]\frac{1}{z}, \qquad (8)$$

wobei wir zur Abkürzung

$$h\frac{f'(h)}{f(h)} - \tfrac{1}{2} = \lambda - 1,$$

also

$$\lambda = h\frac{f'(h)}{f(h)} + \tfrac{1}{2} \qquad (9)$$

setzen wollen. Bemerken wir ferner, dass in Nro. (8)

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = \frac{\frac{\partial\psi(z)}{\partial z}}{\psi(z)} = \frac{\frac{\partial\psi(z)}{\psi(z)}}{\partial z} = \frac{\partial l\psi(z)}{\partial z}$$

ist, so erhalten wir nach beiderseitiger Multiplikation mit ∂z:

$$\partial l\psi(z) = (\lambda - 1)\frac{\partial z}{z},$$

folglich durch Integration

$$l\psi(z) = (\lambda - 1)^{1}\, l(z^2) + \text{Const.},$$

oder wenn man bemerkt, dass $z = \frac{x}{h}$ nur positive Werthe erhält, mithin $\frac{1}{2}l(z^2) = lz$ ist, und Const. $= la$, wo a ebenfalls eine beliebige Constante bedeutet, setzt:

$$l\psi(z) = (\lambda - 1)lz + la = l(z^{\lambda-1}) + la,$$

und mithin

$$\psi(z) = az^{\lambda-1}. \qquad (10)$$

Wir haben aber bereits gesehen, dass $\psi(z)$ eine von h freie Funktion sein muss; da nun in unserem Werthe derselben die Grösse λ vorkommt, welche laut Gleichung (8) von h abhängt, so kann die Aufgabe überhaupt nur dann möglich sein, wenn sich λ von h befreien lässt. Soll aber λ von h unabhängig sein, so ist nach Nro. (8) nur nöthig, dass der Quotient

$$\frac{f'(h)}{f(h)} = \frac{\mu}{h}$$

sei, wenn μ eine constante Grösse bedeutet. Da hier $\frac{f'(h)}{f(h)} = \frac{\partial lf(h)}{\partial h}$ ist, so folgt auf ähnliche Weise wie vorher

$$f(h) = ch^{\mu}, \qquad (11)$$

wo c eine durch die Integration hereingebrachte Constante ist. Wir sehen hieraus, dass, wenn die Zeit t einer Funktion von h proportional sein soll, diese Funktion selbst nur eine Potenz von h sein kann. Wir haben nun nach (8) und (11)

$$\lambda = \mu + \tfrac{1}{2},$$

folglich

$$\psi(z) = a\, z^{\mu-\frac{1}{2}},$$

und nach Nro. (7) vermöge der Werthe von $f(h)$ und $\psi(z)$

$$\varphi(hz) = ac\,(hz)^{\mu-\frac{1}{2}},$$

mithin

$$\varphi(x) = ac\, x^{\mu-\frac{1}{2}}. \qquad (12)$$

Die Gleichung der so charakterisirten Curve ergiebt sich jetzt auf folgende Weise. Es ist

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2,$$

mithin

$$y = \int \partial x \sqrt{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 - 1} + \text{Const.},$$

wobei die Constante so bestimmt werden muss, dass für $x=0$ auch $y=0$ wird, weil der Punkt C, für welchen $x=0$ ist, auf der Curve selbst liegt. Also ist jetzt

$$y = \int_0^x \partial x \sqrt{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 - 1},$$

oder, weil nach Nro. (2) und Nro. (12)

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \varphi(x) = ac\, x^{\mu-\frac{1}{2}}$$

ist,

$$y = \int_0^x \partial x \sqrt{a^2 c^2 x^{2\mu-1} - 1}. \qquad (13)$$

Die Zeit t findet sich nach Formel (6), wenn wir für $f(h)$ und $\psi(z)$ ihre Werthe setzen:

$$\sqrt{2g}.t = ach^\mu \int_0^1 \frac{\partial z}{\sqrt{1-z}}\, z^{\mu-\frac{1}{2}}$$

$$= ach^\mu \int_0^1 z^{\mu+\frac{1}{2}-1} (1-z)^{\frac{1}{2}-1}\, \partial z,$$

bei der Werth des Integrals nach der bekannten Gammafunk-
nenformel

$$\int_0^1 z^{\alpha-1}\,(1-z)^{\beta-1}\,\partial z = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

funden werden kann, wenn man $\alpha=\mu+\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$ nimmt und be-
erkt, dass $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ ist. Man hat daher

$$t = ach^{\mu}\,\frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu+1)}\sqrt{\frac{\pi}{2g}}, \qquad (14)$$

nd in den Gleichungen (13) und (14) ist jetzt die vollständige
ösung des aufgestellten Problems enthalten, da man mittelst der
rsteren Formel diejenige Curve bestimmen kann, für welche die
allzeit t einer gegebenen Potenz der Höhe h proportional ist.
ber auch für den Exponenten dieser Potenz treten noch Be-
chränkungen ein. Soll nämlich die Gleichung (13) eine reelle
urve, also eine mögliche Lösung der gestellten Aufgabe bedeu-
en, so darf das Integral auf der rechten Seite weder unendlich
ross noch imaginär werden; ob der erstere Fall eintritt, lässt
ich erst dann entscheiden, wenn man die unbestimmte Integration
ereits ausgeführt hat, dagegen übersieht man auf der Stelle, dass
as Integral imaginär ausfallen muss, wenn die Differentialformel
elbst entweder ganz, oder während eines bestimmten Intervalles
maginär ist. Diess geschieht aber immer, wenn $2\mu-1>0$ ist,
eil dann der Ausdruck

$$\sqrt{a^2c^2x^{2\mu-1}-1}$$

ür alle der Null sehr nahen Werthe von x imaginär wird. Es
uss also $2\mu-1\leqq 0$, folglich $\mu\leqq\frac{1}{2}$ sein, wenn die Aufgabe
elbst unter die möglichen gehören soll.

Nimmt man in (14) $\mu=\frac{1}{2}$, so ergiebt sich aus (13)

$$y=\sqrt{a^2c^2-1}\,.\,x,$$

lso die Curve eine Gerade, wie man ohnehin weiss. Setzt man
$=0$ und die beliebige Constante $c=1$, so ist t von h unabhängig,
nd man erhält folglich diejenige Curve, auf welcher alle Bögen,
ie sich mit dem Punkte C endigen, in gleichen Zeiten durch-
ufen werden, also die Tautochrone. Es ist dann nach (13)

$$y=\int_0^x \partial x\sqrt{\frac{a^2}{x}-1}.$$

Durch unbestimmte Integration findet man leicht

$$y=\sqrt{a^2x-x^2}-\tfrac{1}{2}a^2\,\mathrm{Arc\,cos}\,\frac{2x-a^2}{a^2}+\mathrm{Const.},$$

und folglich für $x=0$

$$\text{Const.} = \frac{a^2}{2}\operatorname{Arc\,cos}(-1) = \tfrac{1}{2}a^2\pi,$$

woraus sich ergiebt

$$y = \tfrac{1}{2}a^2\pi + \sqrt{a^2x-x^2} - \tfrac{1}{2}a^2\operatorname{Arc\,cos}\frac{2x-a^2}{a^2},$$

oder wenn $a=\sqrt{2r}$ gesetzt wird:

$$y = r\pi + \sqrt{2rx-x^2} - r\operatorname{Arc\,cos}\frac{x-r}{r}.$$

d. i. die Gleichung der Cykloide, wenn der Punkt C der Scheitel derselben, BC das Perpendikel auf ihre Basis und r der Halbmesser des erzeugenden Kreises ist.

Will man das Unendlichwerden der Zeit t vermeiden, so muss man μ so wählen, dass keine der Gammafunktionen $\Gamma(\mu+\frac{1}{2})$ und $\Gamma(\mu+1)$ ein negatives Argument erhält, welche Bedingung durch $\mu+\frac{1}{2}>0$ oder $\mu>-\frac{1}{2}$ befriedigt wird. Nehmen wir hierzu die frühere Bedingung $\mu<\frac{1}{2}$, unter welcher allein eine krumme Linie möglich ist, so erhalten wir den folgenden Satz:

Sollen sich die Zeiten, innerhalb deren ein materieller Punkt verschiedene Bögen einer Curve ohne Anfangsgeschwindigkeit bloss vermöge der Schwere durchläuft, einer gegebenen Funktion der Höhendifferenzen der Anfangs- und Endpunkte jener Bögen proportional ändern, so darf diese Funktion nur eine Potenz jener Höhendifferenzen sein, die zum Exponenten eine zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ fallende Zahl hat."

Für ein Beispiel hierzu sei $\mu=\frac{1}{4}$, und $ac=\sqrt{2b}$, wo b wieder eine beliebige Constante ist. Es wird dann

$$t = \sqrt{2b}\cdot\sqrt[4]{h}\cdot\frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{5}{4})}\sqrt{\frac{\pi}{2g}},$$

oder

$$t = \sqrt{b}\sqrt[4]{h}\frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{5}{4})}\sqrt{\frac{\pi}{g}},$$

und

$$y = \int_0^x \partial x\sqrt{\frac{2b}{\sqrt{x}}-1}.$$

Durch die Substitution

$$x = (b+u)^2$$

nält man hier

$$\int \partial x \sqrt{\frac{2b}{\sqrt{x}} - 1}$$

$$= 2\int (b+u)\,\partial u \sqrt{\frac{2b}{b+u} - 1} = 2\int (b+u)\,\partial u \sqrt{\frac{b-u}{b+u}}$$

$$= 2\int \partial u \sqrt{b^2-u^2},$$

obei der Werth des letzteren Integrals bekanntlich

$$= u\sqrt{b^2-u^2} + b^2 \operatorname{Arcsin}\frac{u}{b}$$

t. Da nun aus $x=(b+u)^2$ folgt $u=\sqrt{x}-b$, so ist jetzt

$$\int \partial x \sqrt{\frac{2b}{\sqrt{x}} - 1}$$

$$= (\sqrt{x}-b)\sqrt{(2b\sqrt{x}-x)} + b^2 \operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{x}-b}{b} + \text{Const.}$$

ür $x=0$ ergiebt sich hieraus

$$\text{Const.} = -b^2 \operatorname{Arcsin}(-1) = +b^2\frac{\pi}{2},$$

id folglich ist jetzt nach Nro. (13)

$$y = \frac{\pi}{2}b^2 + (\sqrt{x}-b)\sqrt{(2b\sqrt{x}-x)} + b^2 \operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{x}-b}{b}$$

e Gleichung derjenigen Curve, in welcher die Fallzeit der vierten urzel von h proportional ist.

XIV.

Beweis des Taylor'schen Lehrsatze

Nach der Abhandlung: Note sur la formule de Taylor p
M. J. Caqué in dem Journal de Mathématiques pures
appliquées, publié par Joseph Liouville. Octobre 1845. p. 3
frei bearbeitet

von

dem Herausgeber.

I.

Es sei $y=f(x)$ eine beliebige Function von x. Setzen wir
überhaupt, wenn k eine beliebige positive ganze Zahl bezeich

$$y_k = f(x+k\Delta x),$$

so haben wir in der gewöhnlichen Bezeichnung der Differen
rechnung die folgende Reihe von Gleichungen:

$$\begin{aligned} y_1 - y &= \Delta y, \\ y_2 - y_1 &= \Delta y_1, \\ y_3 - y_2 &= \Delta y_2, \\ &\text{u. s. w.} \\ y_k - y_{k-1} &= \Delta y_{k-1}; \end{aligned}$$

durch deren Addition sich die Gleichung

$$y_k - y = \Delta y + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \cdots + \Delta y_{k-1}$$

oder

$$1) \quad y_k = y + \Delta y + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \cdots + \Delta y_{k-1}$$

ergiebt.

Aus dieser Gleichung erhält man nach einem bekannten Satze der Differenzenrechnung

$$2)\quad \Delta y_k = \Delta y + \Delta^2 y + \Delta^2 y_1 + \Delta^2 y_2 + \ldots + \Delta^2 y_{k-1},$$

und folglich nach 1):

$$\begin{aligned} y_k = y &+ \Delta y \\ &+ \Delta y + \Delta^2 y \\ &+ \Delta y + \Delta^2 y + \Delta^2 y_1 \\ &\quad \text{u. s. w.} \\ &+ \Delta y + \Delta^2 y + \Delta^2 y_1 + \ldots + \Delta^2 y_{k-2}, \end{aligned}$$

d. i.

$$3)\quad y_k = y + \frac{k}{1}\Delta y + \frac{k-1}{1}\Delta^2 y + \frac{k-2}{1}\Delta^2 y_1 + \frac{k-3}{1}\Delta^2 y_2 + \ldots + \frac{1}{1}\Delta^2 y_{k-2}.$$

Weil nun nach 2)

$$4)\quad \Delta^2 y_k = \Delta^2 y + \Delta^3 y + \Delta^3 y_1 + \Delta^3 y_2 + \ldots + \Delta^3 y_{k-1}$$

ist, so ist nach 3):

$$\begin{aligned} y_k = y &+ \frac{k}{1}\Delta y + \frac{k-1}{1}\Delta^2 y \\ &+ \frac{k-2}{1}\Delta^2 y + \frac{k-2}{1}\Delta^3 y \\ &+ \frac{k-3}{1}\Delta^2 y + \frac{k-3}{1}\Delta^3 y + \frac{k-3}{1}\Delta^3 y_1 \\ &\quad \text{u. s. w.} \\ &+ \frac{1}{1}\Delta^2 y + \frac{1}{1}\Delta^3 y + \frac{1}{1}\Delta^3 y_1 + \ldots + \frac{1}{1}\Delta^3 y_{k-3}, \end{aligned}$$

d. i. nach der Lehre von den figurirten Zahlen:

$$5)\quad y_k = y + \frac{k}{1}\Delta y + \frac{k(k-1)}{1.2}\Delta^2 y + \frac{(k-1)(k-2)}{1.2}\Delta^3 y + \frac{(k-2)(k-3)}{1.2}\Delta^3 y_1 + \ldots + \frac{2.1}{1.2}\Delta^3 y_{k-3}.$$

Weil ferner nach 4)

$$6)\quad \Delta^3 y_k = \Delta^3 y + \Delta^4 y + \Delta^4 y_1 + \Delta^4 y_2 + \ldots + \Delta^4 y_{k-1}$$

ist, so ist nach 5)

$$y_k = y + \frac{k}{1}\Delta y + \frac{k(k-1)}{1.2}\Delta^2 y + \frac{(k-1)(k-2)}{1.2}\Delta^3 y$$
$$+ \frac{(k-2)(k-3)}{1.2}\Delta^3 y + \frac{(k-2)(k-3)}{1.2}\Delta^4 y$$
u. s. w.
$$+ \frac{2.1}{1.2}\Delta^3 y + \frac{2.1}{1.2}\Delta^4 y + \ldots + \frac{2.1}{1.2}\Delta^4 y_{k-4}.$$

d. i. nach der Lehre von den figurirten Zahlen:

7) $$y_k = y + \frac{k}{1}\Delta y + \frac{k(k-1)}{1.2}\Delta^2 y + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\Delta^3 y$$
$$+ \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{1.2.3}\Delta^4 y + \frac{(k-2)(k-3)(k-4)}{1.2.3}\Delta^4 y_1 + \ldots + \frac{3.2.1}{1.2.3}\Delta^4 y_{k-4}.$$

Wie man auf diese Art immer weiter gehen kann, unterliegt nicht dem geringsten Zweifel, und wir gelangen daher, wenn wir uns der gewöhnlichen, hinreichend bekannten Bezeichnung der Binomial-Coefficienten bedienen, zu der folgenden allgemeinen Formel, wo natürlich n so wie k eine positive ganze Zahl bezeichnet:

8) $$y_k = y + k_1\Delta y + k_2\Delta^2 y + k_3\Delta^3 y + \ldots + k_n\Delta^n y$$
$$+ (k-1)_n\Delta^{n+1} y + (k-2)_n\Delta^{n+1} y_1 + (k-3)_n\Delta^{n+1} y_2 + \ldots + y_n\Delta^{n+1} y_{k-n-1}.$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

9) $$R_n = (k-1)_n\Delta^{n+1} y + (k-2)_n\Delta^{n+1} y_1$$
$$+ (k-3)_n\Delta^{n+1} y_2 + \ldots + n_n\Delta^{n+1} y_{k-n-1}$$

setzen:

10) $$y_k = y + k_1\Delta y + k_2\Delta^2 y + k_3\Delta^3 y + \ldots + k_n\Delta^n y + R_n.$$

II.

Setzen wir nun $k\Delta x = i$, so wird, wie man leicht findet:

11) $$f(x+i) = y + \frac{i}{1}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$+ \frac{i(i-\Delta x)}{1.2}\cdot\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$$
$$+ \frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)}{1.2.3}\cdot\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$$
u. s. w.
$$+ \frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)\ldots(i-(n-1)\Delta x)}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} + R_n.$$

Nun ist aber, wenn wir der Kürze wegen

$$12)\quad \Omega_n = \frac{(k-1)_n \frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}} + (k-2)_n \frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}} + (k-3)_n \frac{\Delta^{n+1}y_2}{\Delta x^{n+1}} + \ldots + n_n \frac{\Delta^{n+1}y_{k-n-1}}{\Delta x^{n+1}}}{(k-1)_n + (k-2)_n + (k-3)_n + \ldots + n_n}$$

setzen:

$$R_n = \{(k-1)_n + (k-2)_n + (k-3)_n + \ldots + n_n\}\, \Omega_n \Delta x^{n+1},$$

und folglich, weil nach der Lehre von den figurirten Zahlen offenbar

$$(k-1)_n + (k-2)_n + (k-3)_n + \ldots + n_n = k_{n+1}$$

ist:

$$R_n = k_{n+1}\, \Omega_n\, \Delta x^{n+1},$$

also

$$R_n = \frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)\ldots(i-n\Delta x)}{1.2.3\ldots(n+1)}\, \Omega_n.$$

Weil die Grössen

$$(k-1)_n,\ (k-2)_n,\ (k-3)_n,\ \ldots . n_n$$

offenbar sämmtlich positiv sind, so ist nach dem im Archiv. Thl. I. S. 292. §. 45. bewiesenen höchst wichtigen Satze von den Mittelgrössen, wenn wir uns der dort eingeführten Bezeichnung der Mittelgrössen auch jetzt bedienen:

$$\Omega_n = M\left(\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}},\ \frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}},\ \frac{\Delta^{n+1}y_2}{\Delta x^{n+1}},\ \ldots \frac{\Delta^{n+1}y_{k-n-1}}{\Delta x^{n+1}}\right),$$

also

$$R_n = \frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)..(i-n\Delta x)}{1.2.3..(n+1)} M\left(\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}},\ \frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}},\ldots \frac{\Delta^{n+1}y_{k-n-1}}{\Delta x^{n+1}}\right),$$

und folglich nach 11):

$$13)\quad f(x+i) = y + \frac{i}{1}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{i(i-\Delta x)}{1.2}\cdot\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)}{1.2.3}\cdot\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$$

u. s. w.

$$+\frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)\ldots(i-(n-1)\Delta x)}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$$

$$+\frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)..(i-n\Delta x)}{1.2.3..(n+1)}M\left(\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}},\ \frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}},\ldots\frac{\Delta^{n+1}y_{k-n}}{\Delta x^{n+1}}\right.$$

III.

Wenn man sich jetzt Δx der Null nähern, also, weil $i=$ ist, k in's Unendliche wachsen lässt, so nähern sich die Grö

$$\frac{i(i-\Delta x)}{1.2},$$

$$\frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)}{1.2.3},$$

$$\frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)(i-3\Delta x)}{1.2.3.4},$$

u. s. w.

$$\frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)(i-3\Delta x)\ldots(i-(n-1)\Delta x)}{1.2.3.4\ldots n},$$

$$\frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)(i-3\Delta x)\ldots(i-n\Delta x)}{1.2.3.4\ldots(n+1)};$$

wobei man nicht zu vergessen hat, dass n hier als constan betrachten ist, respective den Gränzen

$$\frac{i^2}{1.2},\ \frac{i^3}{1.2.3},\ \frac{i^4}{1.2.3.4},\ \cdots\ \frac{i^n}{1.2.3..n},\ \frac{i^{n+1}}{1.2.3..(n+1)}.$$

Weil ferner nach bekannten Sätzen der Differenzenrechnu

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}=\frac{\Delta(\Delta y)}{\Delta x^2}=\frac{\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}{\Delta x},$$

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}=\frac{\Delta(\Delta^2 y)}{\Delta x^3}=\frac{\Delta\left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)}{\Delta x},$$

$$\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4}=\frac{\Delta(\Delta^3 y)}{\Delta x^4}=\frac{\Delta\left(\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}\right)}{\Delta x},$$

u. s. w.

$$\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}=\frac{\Delta(\Delta^{n-1}y)}{\Delta x^n}=\frac{\Delta\left(\frac{\Delta^{n-1}y}{\Delta x^{n-1}}\right)}{\Delta x}$$

ist, so nähern sich nach den bekannten Begriffen der Differentialrechnung, wenn Δx sich der Null nähert, offenbar

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}, \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}, \frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4}, \ldots \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$$

respective den Gränzen:

$$\frac{\partial y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^4 y}{\partial x^4},$$

u. s. w.

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^n y}{\partial x^n};$$

oder in einer andern bekannten Bezeichnung respective den Gränzen:

$$f'(x), f''(x), f'''(x), f''''(x), \ldots f^{(n)}(x).$$

Weil endlich

$$y = f(x) = f(x),$$

$$y_1 = f(x+\Delta x) = f(x+\frac{i}{k}),$$

$$y_2 = f(x+2\Delta x) = f(x+2\frac{i}{k}),$$

$$y_3 = f(x+3\Delta x) = f(x+3\frac{i}{k}),$$

u. s. w.

$$y_{k-n-1} = f(x+(k-n-1)\Delta x) = f(x+(1-\frac{n+1}{k})i)$$

oder, wenn wir

$$\frac{i}{k} = i_1$$

setzen:

$$\begin{aligned} y &= f(x), \\ y_1 &= f(x+i_1), \\ y_2 &= f(x+2i_1), \\ y_3 &= f(x+3i_1) \end{aligned}$$

u. s. w.

$$y_{k-n-1} = f(x+(i-(n-1)i_1))$$

ist; so nähert sich, wenn Δx sich der Null, also k dem Unendlichen, und folglich auch i_1 sich der Null nähert, die Reihe der Grössen

$$y, y_1, y_2, y_3, \ldots y_{k-n-1}$$

offenbar der Reihe der Grössen, welche man erhält, wenn man in der Function $f(u)$ sich u von $u=x$ bis $u=x+i$ stetig verändern lässt, und die Reihe der Grössen

$$\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}}, \frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}}, \frac{\Delta^{n+1}y_2}{\Delta x^{n+1}}, \frac{\Delta^{n+1}y_3}{\Delta x^{n+1}}, \ldots \frac{\Delta^{n+1}y_{k-n-1}}{\Delta x^{n+1}}$$

nähert sich folglich, wie mittelst des Vorhergehenden leicht erhellet, der Reihe der Grössen, welche man erhält, wenn man in

$$\frac{\partial^{n+1} f(u)}{\partial u^{n+1}} = f^{(n+1)}(u)$$

sich u von $u=x$ bis $u=x+i$ stetig verändern lässt.

Ist nun $f^{(n+1)}(u)$ von $u=x$ bis $u=x+i$ stetig, so muss es, immer unter der Voraussetzung, dass Δx sich der Null nähert, offenbar jederzeit unter den Werthen, welche $f^{(n+1)}(u)$ erhält, wenn man u sich von $u=x$ bis $u=x+i$ stetig verändern lässt, nothwendig einen geben, welcher der Mittelgrösse

$$M\left(\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}}, \frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}}, \frac{\Delta^{n+1}y_2}{\Delta x^{n+1}}, \ldots \frac{\Delta^{n+1}y_{k-n-1}}{\Delta x^{n+1}}\right)$$

gleich ist, und man kann also, wenn ϱ eine die Einheit nicht übersteigende positive Grösse bezeichnet, unter der gemachten Voraussetzung immer

$$f^{(n+1)}(x+\varrho i) = M\left(\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}}, \frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}}, \frac{\Delta^{n+1}y_2}{\Delta x^{n+1}}, \ldots \frac{\Delta^{n+1}y_{k-n-1}}{\Delta x^{n+1}}\right)$$

setzen.

Nimmt man alles Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich aus 13) unmittelbar, dass, wenn

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots f^{(n)}(x)$$

sämmtlich endliche völlig bestimmte Grössen sind — was natürlich bei der ganzen vorhergehenden Betrachtung vorausgesetzt

werden muss — und die Function $f^{(n+1)}(u)$ von $u=x$ bis $u=x+i$ stetig ist, immer

$$14)\quad f(x+i) = f(x)+\frac{i}{1}f'(x)+\frac{i^2}{1.2}f''(x)+\frac{i^3}{1.2.3}f'''(x)+\ldots+\frac{i^n}{1\ldots n}f^{(n)}(x) + \frac{i^{n+1}}{1\ldots(n+1)}f^{(n+1)}(x+\varrho i)$$

gesetzt werden kann, wo ϱ eine gewisse positive, die Einheit nicht übersteigende Grösse bezeichnet.

Dies ist bekanntlich das Fundamentaltheorem der ganzen Lehre von den Reihen, aus welchem der eigentliche Taylor'sche und Maclaurin'sche Satz leicht hergeleitet werden können, worüber ich hier nichts weiter sage, weil diese Ableitung in jedem guten, den neueren Ansichten sich anschliessenden Lehrbuche der Differentialrechnung zu finden ist.

IV.

Soll ich schliesslich noch mein Urtheil über den im Obigen absichtlich so schleunig als möglich den Lesern des Archivs mitgetheilten Beweis des vorhergehenden so höchst wichtigen Satzes aussprechen, so muss ich, so wie ich die Sache jetzt ansehe, bekennen, dass ich allerdings der Meinung bin, dass dieser Beweis sehr verdient, bei dem Vortrage der Differentialrechnung benutzt zu werden. Vor dem von Cauchy gegebenen, hauptsächlich auf dem bekannten Ampère'schen Theoreme beruhenden, Beweise, den man in zum Theil abgeänderter Darstellung z. B. in meinen Lehrbüchern (Elemente der Differential- und Integralrechnung. Erster Theil. Leipzig. 1837. S. 116. und Leitfaden für den ersten Unterricht in der höheren Analysis. Leipzig. 1838. 33. ff.) findet, scheint mir der obige Beweis hauptsächlich den für den Unterricht keineswegs unwichtigen Vorzug zu haben, dass er, wie aus der im Vorhergehenden gegebenen Entwickelung ersichtlich ist, eine ganz analytische Darstellung zulässt, indem im Gegentheil Cauchy's Beweis eine mehr synthetische Darstellung erfordert. Interessant ist mir der von Herrn Caqué gegebene Beweis auch hauptsächlich durch die bei demselben gemachte Anwendung des im Archiv. Thl. I. S. 292. §. 45. bewiesenen Satzes von den Mittelgrössen gewesen, dessen grosse Wichtigkeit immer mehr erkannt zu werden verdient. Endlich will ich auch noch bemerken, dass, streng genommen, dieser Beweis durchaus nur eine im Sinne der neueren Analysis vervollkommnete Darstellung des ältesten Beweises ist, durch welchen Brook Taylor selbst in seiner Methodus incrementorum directa et inversa. Londini. 1715. 4. Prop. VII. Coroll. 2. den späterhin nach ihm benannten Satz zu begründen suchte, wovon sich Jeder, wer diese ziemlich seltene Schrift nicht selbst besitzt, auch schon aus dem Mathematischen Wörterbuche. Thl. I. S. 768. hinreichend, jedoch nicht voll-

ständig, zu überzeugen im Stande ist, so dass wir also auf diese Art auch bei dem vorliegenden höchst wichtigen Gegenstande, was jedenfalls sehr interessant ist, wieder zu den ersten Anfängen der Differentialrechnung, — welche von der zu einer gewissen Zeit, und auch jetzt noch, bei vielen Mathematikern so sehr beliebten, aber gewiss höchst ungründlichen Methode der unbestimmten Coefficienten nichts wussten, — nur in einer in Rücksicht auf wahre mathematische Strenge und Evidenz sehr vervollkommneten Darstellung, zurückgeführt werden. Einer ähnlichen Betrachtungsweise hat sich in neuerer Zeit übrigens auch schon Crelle in seinem Journal. Thl. VII. S. 276. ff. bedient, der ich aber, wenn sie auch allgemeiner ist, in Bezug auf den vorliegenden bestimmten Zweck doch die obige Darstellung des Herrn Caqué aus mehr als einer Rücksicht vorziehen möchte.

XV.

Ueber einige Eigenschaften des Punktes der kleinsten Entfernung.

Von

Herrn Fr. Seydewitz,

Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

In einer Abhandlung des Herrn Professor Steiner über Fusspunkten-Vielecke, Fusspunkten-Curven u. s. w. (Crelle's Journal. 21. Band.) wird bemerkt, dass derselben eine andere Untersuchung zur Seite stehe, welche sich mit den folgenden Aufgaben beschäftige.

α) In der Ebene einer gegebenen Curve denjenigen Punkt zu bestimmen, dessen Fusspunkten-Curve in Rücksicht auf jene unter allen die kürzeste sei.

β) Wenn in der Ebene eine gegebene Curve auf einer festen Geraden rollt, denjenigen mit ihr verbundenen Punkt anzugeben, welcher die kürzeste Curve beschreibt.

γ) Dasselbe, wenn die Curve auf einer anderen Curve rollt.

Wiewohl die Auflösung dieser Aufgaben wegen ihres innigen Zusammenhanges mit den dortigen Untersuchungen ziemlich nahe liegt, so erlaube ich mir doch, die meinige hier mitzutheilen, weil Betrachtungen über Rektifikation der Curven, der Analysis gegen-

her, so zu sagen, die schwache Seite der Geometrie bilden, und aher ein jeder dahin einschlagende Fortschritt der letzteren näher stgestellt zu werden verdient.

§. 1.

Vom Punkte der mittleren Entfernung.

Sind a, a_1, a_2 die Abstände eines beliebigen Punktes A, in er Ebene eines beliebigen Dreiecks MM_1M_2, von den Seiten M_1M_2, MM_2, MM_1 oder p, p_1, p_2 des letzteren, so ist, jenachem derselbe 1) innerhalb des Dreiecks, oder 2) ausserhalb desselben in einem seiner Winkel (MM_2M_1), oder 3) im Scheitelinkel eines seiner Winkel (MM_2M_1) liegt:

1) $\Delta AM_1M_2 + \Delta AMM_2 + \Delta AMM_1 = \Delta MM_1M_2$, und daher
$$a.p + a_1.p_1 + a_2.p_2 = 2\Delta;$$

oder 2) $\Delta AM_1M_2 + \Delta AMM_2 - \Delta AMM_1 = \Delta MM_1M_2$, und
$$a.p + a_1.p_1 - a_2.p_2 = 2\Delta;$$

oder 3) $-\Delta AM_1M_2 - \Delta AMM_2 + \Delta AMM_1 = \Delta MM_1M_2$, und
$$-a.p - a_1.p_1 + a_2.p_2 = 2\Delta.$$

Lehrsatz 1.

Die algebraische Summe der Rechtecke zwischen en Seiten eines beliebigen Dreiecks und den Abstänen eines beliebigen Punktes seiner Ebene von diesen eiten ist dem doppelten Inhalte des Dreiecks gleich, ndem ein jeder Abstand positiv oder negativ genomen wird, jenachdem jener Punkt und die Gegenecke er betreffenden Dreiecksseite auf einerlei oder auf erschiedenen Seiten dieser letzteren liegen.

Sind nun A, B, C, $D \ldots n$ beliebige Punkte in der Ebene des reiecks MM_1M_2, sind α, β, γ, $\delta \ldots$ eben so viele diesen Punkten ntsprechende ganze oder gerbochene, positive oder negative Zahlen, nd a, a_1, a_2; b, b_1, b_2, c, c_1, c_2; d, d_1, d_2;.. die Abstände der rsteren von den Seiten p, p_1, p_2 des Dreiecks, so ist

$$\begin{aligned}
\alpha ap + \alpha a_1p_1 + \alpha a_2p_2 &= 2\alpha\Delta;\\
\beta bp + \beta b_1p_1 + \beta b_2p_2 &= 2\beta\Delta;\\
\gamma cp + \gamma c_1p_1 + \gamma c_2p_2 &= 2\gamma\Delta;\\
\delta dp + \delta d_1p_1 + \delta d_2p_2 &= 2\delta\Delta;\\
\cdot \quad & \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
\cdot \quad & \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
\cdot \quad & \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{aligned}$$

so $(\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d \ldots)p + (\alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 + \delta d_1 \ldots)p_1$
$+ (\alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 + \delta d_2 \ldots)p_2 = 2(\alpha + \beta + \gamma + \delta \ldots)\Delta,$

oder, indem man die Faktoren von p, p_1, p_2, 2Δ kürzer durch $\Sigma(\alpha a)$, $\Sigma(\alpha a_1)$, $\Sigma(\alpha a_2)$, $\Sigma(\alpha)$ bezeichnet:

$$\frac{\Sigma(\alpha a)}{\Sigma(\alpha)} \cdot p + \frac{\Sigma(\alpha a_1)}{\Sigma(\alpha)} \cdot p_1 + \frac{\Sigma(\alpha a_2)}{\Sigma(\alpha)} \cdot p_2 = 2\Delta.$$

Denkt man sich nun in derselben Ebene einen Punkt S, welcher von den Seiten p und p_1 um

$$s = \frac{\Sigma(\alpha a)}{\Sigma(\alpha)} \text{ und } s_1 = \frac{\Sigma(\alpha a_1)}{\Sigma(\alpha)}$$

entfernt ist, was allemal und bei gehöriger Berücksichtigung der Zeichen dieser Ausdrücke nur auf einzige Weise möglich ist, und ist s_2 der Abstand des so bestimmten Punktes S von der dritten Seite p_2, so folgt einmal aus der vorigen Gleichung:

$$s \cdot p + s_1 \cdot p_1 + \frac{\Sigma(\alpha a_2)}{\Sigma(\alpha)} \cdot p_2 = 2\Delta;$$

dann aber auch aus dem Lehrsatze I.:

$$s \cdot p + s_1 \cdot p_1 + s_2 \cdot p_2 = 2\Delta;$$

folglich ist auch

$$s_2 = \frac{\Sigma(\alpha a_2)}{\Sigma(\alpha)}.$$

Bildet die Gerade MM_1 mit M_1M_2 und MM_2 kein Dreieck, sondern ist dieselbe mit einer von beiden, z. B. mit M_1M_2, parallel, und ist m der Abstand beider von einander, so ist

$$a = m + a_2,\ b = m + b_2,\ c = m + c_2,\ d = m + d_2,\ \ldots;$$
$$s = m + s_2;$$

wo a_2, b_2, c_2, $d_2 \ldots$, s_2 positiv oder negativ zu nehmen sind, jenachdem die Punkte A, B, C, D, .., S ausserhalb oder innerhalb der Parallelen liegen; substituirt man also diese Ausdrücke in die Gleichung

$$\Sigma(\alpha) \cdot s = \Sigma(\alpha a),$$

so wird daraus

$$\Sigma(\alpha) \cdot m + \Sigma(\alpha) \cdot s_2 = \Sigma(\alpha) \cdot m + \Sigma(\alpha a_2),$$

also wiederum, wie oben:

$$s_2 = \frac{\Sigma(\alpha a_2)}{\Sigma(\alpha)}.$$

Nehmen die Coefficienten α, β, γ, $\delta \ldots$ in gleichem Verhältnisse zu oder ab, so werden hierdurch die Werthe der Quotienten

$\frac{\Sigma(\alpha a)}{\Sigma(\alpha)}$ und $\frac{\Sigma(\alpha a_1)}{\Sigma(\alpha)}$, und also auch die Lage des Punktes S nicht geändert. Ist $\alpha=\beta=\gamma=\delta\ldots$, so sind s, s_1, s_2 die arithmetischen Mittel zwischen den Abständen $a, b, c, d\ldots$; $a_1, b_1, c_1, d_1\ldots$; $a_2, b_2, c_2, d_2\ldots$, und der Punkt S heisst im gewöhnlichen Sinne der Punkt der mittleren Entfernung in Bezug auf das System der Punkte $A, B, C, D\ldots$. Offenbar aber ist der Ausdruck $\frac{\Sigma(\alpha a)}{\Sigma(\alpha)}$, wenigstens für den Fall positiver ganzer Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$, ebenfalls das arithmetische Mittel zwischen den Abständen der Punkte $A, B, C, D\ldots$ von einer Geraden, insofern man sich in diesen Punkten bezüglich eine Anzahl von $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ Punkten vereinigt denkt. Daher ist man berechtigt, auch im allgemeinen Falle den Ausdruck $\frac{\Sigma(\alpha a)}{\Sigma(\alpha)}$ das arithmetische Mittel zwischen den mit den Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ behafteten Längen $a, b, c, d\ldots$, und den Punkt S den Punkt der mittleren Entfernung in Bezug auf die mit den Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ behafteten Punkte $A, B, C, D\ldots$ zu nennen.

Lehrsatz 2.

Sind die Abstände eines Punktes S von zwei beliebigen, einander durchschneidenden Geraden, ein jeder das arithmetische Mittel zwischen den, mit beliebigen ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ behafteten Abständen eines ebenen Systems von Punkten $A, B, C, D\ldots$ von der betreffenden Geraden, so besitzt jener Punkt S die nämliche Eigenschaft hinsichtlich jeder dritten Geraden; und es gibt daher allemal einen, aber auch nur einen Punkt der mittleren Entfernung in Bezug auf ein gegebenes System mit gegebenen Coefficienten behafteter Punkte. Hierbei aber wird vorausgesetzt, dass die Abstände je zweier Punkte von einer Geraden mit einerlei oder mit entgegengesetzten Zeichen genommen werden, jenachdem sie auf einerlei oder auf verschiedenen Seiten dieser Geraden liegen.

Zusatz. Geht die Gerade, von welcher die Abstände gerechnet werden, durch den Punkt der mittleren Entfernung selbst, so ist

$$s=\frac{\Sigma(\alpha a)}{\Sigma(\alpha)}=0, \text{ also } \Sigma(\alpha a)=0,$$

und umgekehrt: Gilt die letztere Gleichung für zwei Gerade, welche sich schneiden, so ist ihr Durchschnitt der Punkt der mittleren Entfernung. Daher sind im Falle von lauter positiven Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ die Punkte $A, B, C, D\ldots$ nothwendig auf beide Seiten einer jeden Geraden vertheilt,

welche durch den Punkt der mittleren Entfernung geht, und wel daher eine Linie der mittleren Entfernung heisst.

Anmerkung. Auf dieselbe Weise, wie hier mittels Dreiecks MM_1M_2 im Fall eines ebenen Systems von Punkten, l man mittels einer Pyramide auch den Punkt der mittleren fernung in Bezug auf ein System von Punkten im Raume stimmen.

§. 2.

Vom Punkte der kleinsten Entfernung.

Es seien in (Taf. III. Fig. 2., 3., 4.) S, S_1 zwei Punkte von be biger Entfernung mit einem beliebigen dritten Punkte A durch Geraden AS, AS_1 verbunden, und von dem einen (S_1) auf Gerade AS eine Senkrechte S_1m gefällt, so ist

$$\begin{aligned} \text{entweder 1)} \quad & Am = AS + Sm, \\ \text{oder 2)} \quad & Am = AS - Sm, \\ \text{oder 3)} \quad & Am = Sm - AS \\ & \quad = AS - Sm + 2Am, \\ \text{oder aber 4)} \quad & Am = AS; \end{aligned}$$

jenachdem das in S auf SS_1 errichtete Loth SX 1) zwischen d Punkten A und S_1 hindurchgeht, 2) oder nicht, und zwar $AS >$ oder 3) $AS < Sm$, oder aber 4) dieses Loth mit AS zusamme fällt.

Jedenfalls aber ist

$$AS_1 > Am.$$

Wird nun aus A auf SS_1 noch die Senkrechte Ap gefäl so ist

$$Sm = SS_1 \cdot \frac{Sp}{AS};$$

also, wenn man der Kürze wegen AS, A_1S, SS_1, Sp mit A, A s, a bezeichnet und unter p eine Linie versteht, welche Null od grösser als Null ist, so erhält man in jedem Falle folgende U gleichung:

$$A_1 > A - s \cdot \frac{a}{A} + p,$$

wo a positiv oder negativ zu nehmen ist, jenachdem die Punkt A und S_1 auf einerlei oder auf verschiedenen Seiten des Lothe SX liegen.

Sind also irgend ein ebenes System von Punkten $A, B, C, D...$ nd ebensoviele ganze oder gebrochene, aber positive Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta...$ gegeben; werden erstere mit zwei beliebigen Punkten S, S_1 der Ebene bezüglich durch die Geraden $A, B, C, D...$ nd $A_1, B_1, C_1, D_1...$ verbunden, und sind $a, b, c, d...$ die Abstände jener Punkte von dem in S auf SS_1 errichteten Lothe, so erhält man für jeden dieser Punkte eine der vorigen analoge Ungleichung, und wenn man die Glieder einer jeden bezüglich mit den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta...$ multiplicirt und sodann die Summen der linken und der rechten Seiten nimmt, so ergibt sich:

$$\alpha.A_1+\beta.B_1+\gamma.C_1+\delta.D_1+...>\alpha.A+\beta.B+\gamma.C+\delta.D+..$$
$$-s\left(\frac{\alpha.a}{A}+\frac{\beta.b}{B}+\frac{\gamma.c}{C}+\frac{\delta.d}{D}+...\right)+P,$$

wo $a, b, c, d...$ positiv oder negativ oder $=0$ zu nehmen sind, jenachdem die betreffenden Punkte $A, B, C, D...$ auf derjenigen Seite des Lothes SX, wo der Punkt S_1 sich befindet, oder auf der anderen Seite, oder auf dem Lothe selbst liegen; und wo P wiederum eine Linie $\geqq 0$ bedeutet. Mittels der schon oben gebrauchten Abkürzungszeichen lässt sich die zuletzt erhaltene Beziehung auch so ausdrücken:

$$\Sigma(\alpha A_1) > \Sigma(\alpha A)-s.\Sigma\left(\frac{\alpha a}{A}\right)+P.$$

Gesetzt nun, es wäre S ein solcher Punkt der Geraden SS_1, für welchen die algebraische Summe

$$\Sigma\left(\frac{\alpha a}{A}\right)=0,$$

so würde

$$\Sigma(\alpha A_1) > \Sigma(\alpha A)+P,$$

um so mehr also

$$\Sigma(\alpha A_1) > \Sigma(\alpha A)$$

sein, und zwar — was für den Vergleich der geometrischen mit der analytischen Entwickelungsweise von Wichtigkeit ist — wie gross oder klein auch die Strecke $SS_1=s$ gedacht werden mag.

Werden die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta...$ mit anderen vertauscht, welche zu den ersteren alle einerlei Verhältniss haben, so besteht auch jetzt noch für den Punkt S die Bedingungsgleichung

$$\Sigma\left(\frac{\alpha a}{A}\right)=0,$$

und es wird also hierdurch die Lage des Punktes S nicht verändert. Sind die Coefficienten $\alpha=\beta=\gamma=\delta=...$, so ist, wenn

$$\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}+\frac{d}{D}+\ldots=0,$$

allemal

$$A_1+B_1+C_1+D_1+\ldots>A+B+C+D+\ldots,$$

d. h. die Summe der Entfernungen des so bestimmten Punkte von den Punkten $A, B, C, D\ldots$ ist kleiner als die eines je anderen Punktes S_1 derselben Ebene, und in diesem Falle he der Punkt S der Punkt der kleinsten Entfernung in Bezug das System der Punkte $A, B, C, D\ldots$. Im Falle ungleic Coefficienten aber braucht man sich nur vorzustellen, dass Anzahl von α Punkten im Punkte A, β Punkte in B, γ in in $D\ldots$ vereinigt seien, um auch jetzt in den Ausdrücken $\Sigma($ $\Sigma(\alpha A_1)$ die Summen der Entfernungen der Punkte S, S_1 von $A, B, C, D\ldots$ zu erkennen und in dieser Vorstellung noch ei Schritt weiter gehend den Sinn der folgenden Definition zu fass Ein Punkt S heisst der Punkt der kleinsten Entf nung in Bezug auf ein gegebenes System, mit gege nen ganzen oder gebrochenen positiven Coefficien $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ behafteter Punkte $A, B, C, D\ldots$, wenn Summe der Entfernungen des Punktes S von die letzteren kleiner als die eines jeden anderen Punk S_1 ist.

Man kann die Quotienten $\frac{\alpha}{A}, \frac{\beta}{B}, \frac{\gamma}{C}, \frac{\delta}{D}\ldots$ als const Coefficienten ansehen, mit denen die Punkte $A, B, C, D\ldots$ haftet sind. Gesetzt nun, der Punkt S, welcher von den Punk $A, B, C, D\ldots$ um die Längen $A, B, C, D\ldots$ entfernt ist, der Punkt der mittleren Entfernung in Bezug auf diese Pun so würde nach Lehrsatz 2. Zusatz. für jede durch S gehende rade die Gleichung

$$\Sigma\left(\frac{\alpha a}{A}\right)=0$$

gelten, und da die in §. 1. für die Abstände $a, b, c, d\ldots$ ge bene Zeichenregel mit derjenigen des jetzigen Paragraphen v kommen übereinstimmt, so müsste der Punkt S zugleich auch Punkt der kleinsten Entfernung in Bezug auf die mit den Co cienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ behafteten Punkte $A, B, C, D\ldots$ sein.

Denkt man sich um den Punkt S als Centrum mit beliebig Halbmesser r einen Kreis beschrieben, welcher die Geraden $BS, CS, DS\ldots$ in den Punkten $A', B', C', D'\ldots$ schnei und sind $a', b', c', d\ldots$ die Abstände dieser Punkte von Lothe SX, so ist

$$\frac{a}{A}=\frac{a'}{r}, \quad \frac{b}{B}=\frac{b'}{r}, \quad \frac{c}{C}=\frac{c'}{r}, \quad \frac{d}{D}=\frac{d'}{r}\ldots,$$

also

$$\Sigma\left(\frac{\alpha a}{A}\right)=\frac{1}{r}\Sigma(\alpha a').$$

Gesetzt also, der Punkt S wäre der Punkt der mittleren Entfernung in Bezug auf die mit den Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ behafteten Punkte $A', B', C', D' \ldots$, so würde

$$\Sigma(\alpha a') = 0, \text{ und also auch } \Sigma\left(\frac{\alpha a}{A}\right) = 0 \text{ sein,}$$

also S zugleich auch der Punkt der kleinsten Entfernung in Bezug auf die mit denselben Coefficienten behafteten Punkte $A, B, C, D \ldots$ sein.

Lehrsatz 3.

Ist irgend ein ebenes System von Punkten $A, B, C, D \ldots$, und sind ebensoviele ganze oder gebrochene positive Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ gegeben, und gibt es in der Ebene jenes Systems einen Punkt S, welcher, wenn man die reciproken Werthe seiner Abstände $A, B, C, D \ldots$ von jenen Punkten bezüglich mit den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ multiplicirt, der Punkt der mittleren Entfernung in Bezug auf die, mit den so erhaltenen Zahlen $\frac{\alpha}{A}, \frac{\beta}{B}, \frac{\gamma}{C}, \frac{\delta}{D} \ldots$ behafteten Punkte $A, B, C, D \ldots$ ist, so ist dieser Punkt S zugleich auch der Punkt der kleinsten Entfernung in Bezug auf dieselben, mit den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ behafteten Punkte, und zwar gibt es dann allemal nur einen einzigen solchen Punkt S.

Lehrsatz 4.

Ist der Mittelpunkt eines Kreises der Punkt der mittleren Entfernung in Bezug auf ein System von Punkten, welche auf seinem Umfange liegen und mit beliebigen ganzen oder gebrochenen positiven Coefficienten behaftet sind, so ist derselbe zugleich auch der Punkt der kleinsten Entfernung in Bezug auf ein System von ebensovielen, mit denselben Coefficienten behafteten Punkten, welche beliebig auf den nach jenen Punkten gehenden Halbmessern, auf einerlei Seite vom Mittelpunkte, liegen.

Lehrsatz 5.

Der Punkt der kleinsten Entfernung für ein gegebenes System von Punkten, welche mit gegebenen Coefficienten behaftet sind, bleibt unverändert, wenn diese Coefficienten alle in gleichem Verhältniss sich ändern.

Ob übrigens allemal ein Punkt der kleinsten Entfernung existire, und wie derselbe gefunden werde, lässt sich bis jetzt im

Allgemeinen nicht ermitteln, wohl aber in besonderen Fällen, unter welchen hier der folgende, von welchem später Gebrauch gemacht wird, hervorgehoben werden soll.

Liegen je zwei der gegebenen Punkte, z B. A und B, auf einem Strahle eines Strahlbüschels S, und zwar auf verschiedenen Seiten des Punktes S, so sind die Abstände a, b derselben von einem beliebigen Strahle des Strahlbüschels entgegengesetzt und es ist $\frac{a}{A} = \frac{b}{B}$. Sind also nun auch noch die betreffenden zwei Coefficienten α und β einander gleich, so ist

$$\frac{\alpha a}{A} + \frac{\beta b}{B} = 0,$$

und somit überhaupt

$$\Sigma\left(\frac{\alpha a}{A}\right) = 0,$$

also S der Punkt der kleinsten Entfernung in Bezug auf die Gesammtheit dieser Punktenpaare.

Lehrsatz 6.

Schneiden sich beliebig viele Gerade in einem Punkte S, und sind auf einer jeden auf verschiedenen Seiten von S zwei Punkte beliebig gegeben und mit beliebigen ganzen oder gebrochenen positiven, aber paarweise unter sich gleichen Coefficienten behaftet, so ist S der Punkt der kleinsten Entfernung in Bezug auf die Gesammtheit dieser Punktenpaare.

Aus einer bekannten Eigenschaft des Punktes der mittleren Entfernung ergibt sich, dass für einen beliebigen Punkt S_1 der Ausdruck $\Sigma\left(\frac{\alpha . A_1^2}{A}\right)$ um so grösser wird, je weiter der Punkt S_1 sich vom Punkte S der kleinsten Entfernung entfernt. Es fragt sich, ob dasselbe auch von dem Ausdrucke $\Sigma(\alpha A_1)$ gelte?

Denkt man sich in (Taf. III. Fig. 2., 3., 4.) die Strecke $SS_1 = s$ im Zunehmen begriffen, so wird die Linie AS_1 in Taf. III. Fig. 2. und Fig. 4. zwar unbedingt zunehmen, dagegen in Taf. III. Fig. 3. so lange abnehmen, bis SS_1 so gross als die Projektion Sp der Linie AS geworden ist; hat aber SS_1 diese Grösse erreicht, so nimmt auch hier AS_1 nun ins Unendliche zu. Das nämliche gilt also auch von $\alpha . AS_1$. Gesetzt aber auch, dass ein oder mehrere der Produkte $\alpha . A_1$, $\beta . B_1$ ... die Grenze, über welche hinaus sie sich mit s zugleich fortwährend vergrössern müssen, erreicht haben, so lässt sich doch dasselbe nicht eher von der Summe $\Sigma(\alpha A_1)$ selber mit Gewissheit behaupten, bis ein jedes der Produkte an dieser Grenze angelangt ist; und da die Projektion Sp mit der Verkleinerung des Winkels ASS_1 bis zur Grösse von AS zunimmt, so lässt sich hiernach mit völliger Gewissheit nur Folgendes feststellen:

Lehrsatz 7.

Die Summe der Abstände eines Punktes S_1 von den mit beliebigen ganzen oder gebrochenen positiven Coefficienten behafteten Punkten $A, B, C, D \ldots$ einer Ebene nimmt mit seinem Abstande vom Punkte S der kleinsten Entfernung nothwendig zu, sobald derselbe den Umfang desjenigen Kreises erreicht hat, welcher um den Punkt S als Mittelpunkt durch den von ihm entferntesten unter jenen Punkten $A, B, C, D \ldots$ gelegt wird.

§. 3.

Von den Fusspunkten-Vielecken und den Fusspunkten-Curven.

Fällt man auf alle Seiten eines gegebenen Vielecks $\mathfrak{V}$, aus einem Punkte P seiner Ebene, Senkrechte, und verbindet deren Fusspunkte der Reihe nach paarweise durch Gerade, so entsteht ein neues Vieleck V, welches dem gegebenen eingeschrieben ist. Dieses neue Vieleck V heisst das Fusspunkten-Vieleck des Punktes P in Bezug auf das gegebene Vieleck $\mathfrak{V}$; und zwar soll diese Benennung gelten, es mag nun das Vieleck $\mathfrak{V}$ geschlossen oder offen sein, lauter ausspringende oder auch einspringende Winkel besitzen, einen einzigen oder mehrere Räume einschliessen

Ist nun A irgend eine Ecke des Vielecks $\mathfrak{V}$, α der von den anstossenden Seiten eingeschlossene spitze oder stumpfe Winkel, PA der Abstand eines beliebigen Punktes P von dieser Ecke, und MN die derselben entsprechende Seite des Fusspunkten-Vielecks V, so lässt sich um das Viereck $PMAN$ ein Kreis beschreiben, dessen Durchmesser PA ist; folglich ist dessen Sehne

$$MN = PA \cdot \sin\alpha.$$

Man erhält also den Umfang von V, indem man die Abstände des Punktes P von den Ecken des Vielecks $\mathfrak{V}$ bezüglich mit den Sinus der an diesen Ecken liegenden Winkel von $\mathfrak{V}$ multiplicirt und die Summe der Produkte nimmt, oder:

Lehrsatz 8.

a) Der Umfang des Fusspunkten-Vielecks V eines beliebigen Punktes P, in Bezug auf ein beliebiges gegebenes, geschlossenes oder offenes Vieleck $\mathfrak{V}$, ist ebensogross als die Summe der Abstände des Punktes P von den Eckpunkten des Vielecks $\mathfrak{V}$, insofern diese letzteren mit den Sinus der betreffenden Winkel von $\mathfrak{V}$, als Coefficienten, behaftet werden.

b) Und daher hat unter allen Fusspunkten-Vielecken in Bezug auf ein gegebenes Vieleck $\mathfrak{V}$ dasjenige den kleinsten Umfang, welches dem Punkte S der kleinsten Entfernung in Bezug auf die mit jenen Sinus behafteten Eckpunkte des Vielecks $\mathfrak{V}$ entspricht.

c) Je weiter ein Punkt P über diejenige Kreislinie hinausrückt, welche um den erwähnten Punkt S, als Mittelpunkt, durch die von ihm entfernteste Ecke des Vielecks $\mathfrak{V}$ beschrieben wird, desto grösser wird der Umfang seines Fusspunkten-Vielecks V.

Da im regelmässigen Vieleck alle Winkel einander gleich sind, und da, was sich sehr leicht aus Lehrsatz 4. und 6. ergibt, sein Mittelpunkt der Punkt der kleinsten Entfernung in Bezug auf seine Ecken ist, so hat man insbesondere:

Lehrsatz 9.

a) Der Umfang des Fusspunkten-Vielecks V eines beliebigen Punktes P, in Bezug auf ein regelmässiges Vieleck $\mathfrak{V}$, ist gleich der Summe der Abstände des Punktes P von den Ecken des letzteren, multiplicirt mit dem Sinus des Winkels des regelmässigen Vielecks.

b) Unter allen Fusspunkten-Vielecken in Bezug auf ein regelmässiges Vieleck hat das dem Mittelpunkte des letzteren entsprechende den kleinsten Umfang.

Fällt man auf die sämmtlichen Tangenten einer Curve (oder eines Curvenstückes) $\mathfrak{V}$ aus einem beliebigen Punkte P ihrer Ebene Senkrechte, so bilden die Fusspunkte dieser letzteren ebenfalls eine Curve (oder ein Curvenstück) V. Diese Curve V heisst die Fusspunkten-Curve des Punktes P in Bezug auf die Curve $\mathfrak{V}$. Kraft des Gesetzes der Continuität nun lassen sich alle Eigenschaften der Fusspunkten-Vielecke auf die Fusspunkten-Curven übertragen. Denn eine jede Curve $\mathfrak{V}$ lässt sich als ein Vieleck mit unendlich kleinen, einander gleichen Seiten betrachten, und dann sind die Fusspunkten-Curven in Bezug auf die Curve $\mathfrak{V}$ mit den Fusspunkten-Vielecken in Bezug auf das Vieleck $\mathfrak{V}$ identisch, indem die Seiten des letzteren die Richtungen der Tangenten der ersteren bestimmen. Die Winkel, welche je zwei unmittelbar auf einander folgende Tangenten einschliessen, treten jetzt an die Stelle der Winkel des Vielecks, und da dieselben unendlich klein, also ihre Sinus genau ihren Bogen, für den Halbmesser $=1$, gleich sind, so darf man diese Bogen an die Stelle jener Sinus setzen. Handelt es sich nur um die Bestimmung des Punktes der kleinsten Entfernung oder um das Verhältniss der Umfänge der Fusspunkten-Curven, so kann man auch, was offenbar bequemer ist, nach Lehrsatz 5. sich statt jener Sinus der reciproken Werthe der Krümmungshalbmesser in den betreffenden Punkten der Curve $\mathfrak{V}$ bedienen. Denn ist A irgend eine Ecke eines gleichseitigen Vielecks $\mathfrak{V}$, die Seite desselben $=2h$, und denkt man sich in den Mittelpunkten m, n der die Ecke A oder

len Winkel α einschliessenden Seiten zwei Senkrechte errichtet. welche sich im Punkte a schneiden, so ist

$$\sin\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha . \cos\tfrac{1}{2}\alpha = 2\frac{am}{aA}.\frac{Am}{aA} = \frac{2h\sqrt{(aA)^2-h^2}}{(aA)^2};$$

nd ebenso erhält man für irgend eine andere Ecke C

$$\sin\gamma = \frac{2h\sqrt{(Cc)^2-h^2}}{(Cc)^2};$$

also

$$\sin\alpha : \sin\gamma = \frac{\sqrt{(aA)^2-h^2}}{(aA)^2} : \frac{\sqrt{(cC)^2-h^2}}{(cC)^2}.$$

Da nun im Falle der Curve $\mathfrak{B}$ die Seite $2h$ unendlich klein ist, so ist hier

$$\sin\alpha : \sin\gamma = \frac{1}{aA} : \frac{1}{cC}.$$

Offenbar aber sind in diesem Falle die Längen aA, cC die Krümmungshalbmesser der Curve in den Punkten A, C.

Lehrsatz 10.

a) Der Umfang der Fusspunkten-Curve V eines beliebigen Punktes P in Bezug auf eine beliebige gegebene Curve (oder Curvenstück) $\mathfrak{B}$ ist ebensogross als die Summe der Abstände des Punktes P von sämmtlichen Punkten der Curve $\mathfrak{B}$, wenn man einen jeden dieser Abstände mit dem Bogen des Winkels, welchen die Tangente in dem betreffenden Punkte mit der ihr zunächst folgenden bildet (für den Halbmesser $=1$), multiplicirt.

b) Unter allen Fusspunkten-Curven in Bezug auf eine gegebene Curve $\mathfrak{B}$ ist diejenige die kürzeste, welche dem Punkte S der kleinsten Entfernung in Bezug auf sämmtliche Punkte der Curve $\mathfrak{B}$ entspricht, vorausgesetzt, dass diese Punkte mit den unter *a*) erwähnten Bogen oder auch mit den reciproken Werthen der Krümmungshalbmesser der Curve, als Coefficienten, behaftet werden.

c) Die Fusspunkten-Curve eines Punktes P in Bezug auf eine gegebene Curve (oder Curvenstück) $\mathfrak{B}$ wird um so länger, je weiter der Punkt P über diejenige Kreislinie hinausrückt, welche um den genannten Punkt S der kleinsten Entfernung, als Mittelpunkt, durch den von ihm entferntesten Punkt der Curve $\mathfrak{B}$ beschrieben wird.

Da bei einer Ellipse und Hyperbel die Krümmungen der Curve in zwei Endpunkten eines Durchmessers allemal einander gleich sind, also nach Lehrsatz 6. der Mittelpunkt des Kegelschnittes der Punkt der kleinsten Entfernung in Bezug auf die mit den reciproken Werthen der Krümmungshalbmesser behafteten Punkte des ganzen Kegelschnittes sowohl, als auch zweier von zwei Durchmessern begrenzten Curvenstücke ist, so ergibt sich insbesondere:

Lehrsatz 11.

Unter allen Fusspunkten-Curven in Bezug auf eine Ellipse oder Hyperbel, oder auch in Bezug auf zwei von zwei Durchmessern begrenzte Bogen derselben ist diejenige die kürzeste, welche dem Mittelpunkte des Kegelschnittes entspricht.

§. 4.

Von den Curven, welche dadurch erzeugt werden, dass eine andere Curve auf einer Geraden rollt.

Es sei $MABCDN$ (Taf. III. Fig. 5.) irgend eine gebrochene Linie oder ein Stück eines Vielecks; A, B, C, D seien die Ecken und α, β, γ, δ die Winkel, welche die Seiten AB, BC, CD, DN mit den Verlängerungen der ihnen vorhergehenden Seiten MA, AB, BC, CD bilden; und P sei irgend ein Punkt in der Ebene des Vielecks. Denkt man sich nun, dass jenes Stück des letzteren auf einer festen Geraden $\mathfrak{G}$ als Basis rolle, d. h. dass die Seiten MA, AB, BC, CD, DN desselben nach einander in die Stelle der Abschnitte MA, $A\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}\mathfrak{N}$ der Geraden $\mathfrak{G}$ treten, so wird gleichzeitig der Punkt P eine krumme Linie beschreiben, welche aus so vielen Kreisbogen besteht, als das Polygonstück Ecken hat; die Punkte A, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ werden die Centra, die Längen PA, PB, PC, PD die Halbmesser und die Winkel α, β, γ, δ die Centriwinkel dieser Bogen sein. Setzt man also der Kürze wegen $PA=a$, $PB=b$, $PC=c$, $PD=d$..., und versteht unter α, β, γ, δ die den gleichnamigen Winkeln zugehörigen Bogen für den Halbmesser $=1$, so ist die Länge der so entstandenen krummen Linie $PA_1B_1C_1D_1$ oder

$$W = \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = \Sigma(\alpha a).$$

Je kleiner nun die Winkel α, β, γ, δ werden, desto mehr nähert sich die Summe $\Sigma(\alpha a)$ der Summe $\Sigma(\sin\alpha . a)$, d. h. die Länge W dem Umfange des Fusspunkten-Vielecks V des Punktes P in Bezug auf das gegebene Polygonstück $MABCDN$ oder $\mathfrak{B}$; werden also jene Winkel unendlich klein, so sind beide einander gleich.

Lehrsatz 12.

Rollt eine gebrochene Linie $\mathfrak{B}$ über einer Geraden $\mathfrak{G}$, so beschreibt ein jeder, mit der Ebene von $\mathfrak{B}$ fest verbundene Punkt P eine krumme Linie W, deren Länge der Länge des Fusspunkten-Vielecks V des Punktes P in Bezug auf $\mathfrak{B}$ um so näher kommt, je kleiner die Winkel sind, welche die Theillinien von $\mathfrak{B}$ mit einander bilden.

Der Fall, dass sämmtliche Winkel α, β, γ, δ unendlich klein sind, tritt aber ein, wenn statt des Polygonstückes $\mathfrak{B}$ ein Curvenstück $\mathfrak{B}$ gesetzt wird; also gilt mit vollkommener Strenge:

Lehrsatz 13.

a) Rollt irgend eine Curve oder ein Curvenstück $\mathfrak{B}$ über einer Geraden $\mathfrak{G}$, so beschreibt ein jeder, mit der Ebene von $\mathfrak{B}$ fest verbundene Punkt P eine zweite Curve W, welche genau eben so lang ist, als die Fusspunkten-Curve V des Punktes P in Bezug auf denjenigen Theil von $\mathfrak{B}$, mit welchem diese Curve beim Rollen nach und nach die Gerade $\mathfrak{G}$ berührt.

b) Unter allen Curven W, welche durch das Rollen einer Curve $\mathfrak{B}$ über einer Geraden entstehen, ist diejenige die kürzeste, welche vom Punkte S der kleinsten Entfernung in Bezug auf die, mit den reciproken Werthen der Krümmungshalbmesser, als Coefficienten, behafteten Punkte der Curve $\mathfrak{B}$ beschrieben wird.

c) Die Curve W wird um so länger, je weiter der dieselbe beschreibende Punkt P über diejenige Kreislinie hinaus liegt, welche um den genannten Punkt S der kleinsten Entfernung, als Mittelpunkt, durch den von ihm entferntesten Punkt des rollenden Theiles der Curve $\mathfrak{B}$ beschrieben wird.

Ueber die Gestalt der Curve W ist Folgendes zu bemerken: Besitzt die Curve $\mathfrak{B}$ einen Wendungspunkt und berührt sie in demselben beim Rollen die Gerade $\mathfrak{G}$, so tritt dieselbe von nun an von der einen Seite dieser Geraden auf die andere über und setzt zwar ihre Bewegung in derselben Richtung von $\mathfrak{G}$ fort, aber die Ebene der Curve $\mathfrak{B}$ dreht sich plötzlich z. B. rechtsherum, wenn sie bisher sich linksherum drehte, weshalb jenem Wendungspunkte von $\mathfrak{B}$ ein Rückkehrpunkt der Curve W entsprechen muss. In Taf. III. Fig. 5. wird die Tangente im Wendungspunkte durch die Linie BC des Polygonstücks, und der Rückkehrpunkt von W durch den Punkt B_1 repräsentirt. — Das Nämliche findet statt, wenn die Curve $\mathfrak{B}$ einen sogenannten Rückkehrpunkt im Schnabel (rebroussement en bec) besitzt, indem sie dann, bis zu diesem Punkte auf der Geraden $\mathfrak{G}$ fortgerollt, sofort in der entgegengesetzten Richtung, aber ohne von der einen Seite von $\mathfrak{G}$ auf die andere überzutreten, zurückrollt. Dagegen hat ein gewöhnlicher Rückkehrpunkt, wo die Tangente zwischen beiden

Zweigen der Curve hindurchgeht, keinen Rückkehrpunkt der Curve W zur Folge In diesem Falle nämlich rollt die erstere zwar auch längs dem anderen Zweige auf der Geraden $\mathfrak{G}$ zurück, tritt aber zugleich auch auf die andere Seite von $\mathfrak{G}$ über, so dass die Ebene von $\mathfrak{V}$ selbst keine entgegengesetzte Drehung erleidet. Auch diese beiden Fälle zeigen sich schon am Polygonstück $\mathfrak{V}$, wenn eine Ecke desselben nicht um denjenigen Winkel, welchen eine Seite mit der Verlängerung der vorhergehenden bildet, sondern um den von beiden Seiten selbst gebildeten hohlen Winkel gedreht wird.

Besondere Fälle.

a) Ist die rollende Curve $\mathfrak{V}$ ein Kreis oder ein Kreisbogen, so beschreibt der Mittelpunkt desselben eine Gerade von der Länge des durchrollten Bogens; in der That fällt die Fusspunkten-Curve des Mittelpunktes eines Kreises in Bezug auf einen Bogen desselben mit diesem letzteren selbst zusammen. Der vorige Lehrsatz *b*) sagt also aus, dass unter allen Cykloiden, welche von den Punkten in der Ebene eines rollenden Kreises beschrieben werden, die gerade Linie die kürzeste sei.

b) Ist die Curve $\mathfrak{V}$ eine Parabel, so ist die Fusspunkten-Curve des Brennpunktes in Bezug auf dieselbe eine Gerade, nämlich die Scheiteltangente der Parabel; und gilt es nur einem Bogen der letzteren, so ist die Fusspunkten-Curve des Brennpunktes demjenigen Stücke der Scheiteltangente gleich, das von den Tangenten in den beiden Endpunkten dieses Bogens begrenzt wird. Aber das Stück der Scheiteltangente, welches zwischen dem Scheitel und einer Tangente der Parabel liegt, ist bekanntlich halb so gross, als die Ordinate des Berührungspunktes dieser Tangente, und folglich das von jenen zwei Tangenten begrenzte Stück halb so gross, als die Summe oder Differenz der Ordinaten der Endpunkte jenes Bogens; also ergibt sich aus Lehrsatz 13. *a*) der folgende besondere

Lehrsatz 14.

Rollt ein Parabelbogen auf einer geraden Linie, so beschreibt der Brennpunkt der Parabel eine Curve, welche halb so lang als die Projektion jenes Bogens auf eine zur Achse senkrechte Gerade ist.

c) Die Fusspunkten-Curve des Brennpunktes einer Ellipse oder Hyperbel in Bezug auf dieselbe ist bekanntlich ein Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem der ersteren einerlei, und dessen Durchmesser die Hauptachse derselben ist. Ist nun in Taf. III. Fig. 6. AB irgend ein Bogen einer Ellipse oder Hyperbel; sind Aa, Bb die Tangenten in dessen Endpunkten A, B; und a, b die Fusspunkte der Senkrechten aus dem Brennpunkte F auf diese Tangenten, so ist der Bogen ab jenes Kreises derjenigen Curve gleich, welche vom Punkte F beim Rollen des Bogens AB auf einer Geraden beschrieben wird. Zieht man aber noch die Halbmesser Ma, Mb

und aus dem anderen Brennpunkte F_1 die Zuglinien F_1A, F_1B, so sind letztere bekanntlich den ersteren parallel, und daher die Winkel aMb und AF_1B von gleicher Grösse. Demnach darf man behaupten:

Lehrsatz 15.

Rollt ein Ellipsen- oder ein Hyperbelbogen auf einer geraden Linie, so beschreibt ein jeder der beiden Brennpunkte des Kegelschnittes eine Curve von der Länge eines Kreisbogens, dessen Halbmesser die halbe Hauptachse, und dessen Centriwinkel derjenige Winkel ist, unter welchem jener erstere Bogen vom anderen Brennpunkte aus gesehen wird.

Zusatz. Rollt eine Ellipse oder Hyperbel in einer Ebene $\mathfrak{E}$ auf einer festen Geraden dieser Ebene, so verhalten sich die dem Berührungspunkte beider Linien entsprechenden Geschwindigkeiten des einen Brennpunktes ebenso wie die Geschwindigkeiten, mit welchen die Zuglinie des anderen Brennpunktes in der Ebene $\mathfrak{E}_1$ des Kegelschnittes selbst den Berührungspunkt begleitet.

Lehrsatz 16.

Rollt eine Ellipse oder Hyperbel auf einer geraden Linie, so beschreibt unter allen Punkten ihrer Ebene der Mittelpunkt derselben die kürzeste Curve.

§. 5.

Von den Curven, welche durch das Rollen einer Curve auf einer anderen Curve erzeugt werden.

Denkt man sich zwei Polygonstücke $MABCDN$ und $M_1A_1B_1C_1D_1N_1$ oder $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V}_1$, deren gleichnamige Seiten paarweise gleich sind, so kann man das eine, z. B. $\mathfrak{V}$, dergestalt um das andere herumführen, dass fortwährend die gleichen Seiten sich decken und dass die Ecken von $\mathfrak{V}$ sich um die gleichnamigen Ecken von $\mathfrak{V}_1$ drehen. Während aber diess geschieht, wird jeder beliebige, mit der Ebene von $\mathfrak{V}$ fest verbundene Punkt P eine krumme Linie beschreiben, welche aus so vielen Kreisbogen besteht, als das Polygonstück $\mathfrak{V}$ Ecken hat; die Halbmesser a, b, c, d dieser Bogen werden den Abständen PA, PB, PC, PD des Punktes P von diesen Ecken, und die Centriwinkel derselben werden, jenachdem die zusammentreffenden Ecken von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V}_1$ sich gegenseitig ihre convexen Seiten zukehren oder nicht, den Summen oder den Differenzen der Winkel α und α_1, β und β_1, γ und γ_1, δ und δ_1, welche die gleichnamigen Seiten mit den Verlängerungen der vorhergehenden bilden, gleich sein.

Unter den vielen Fällen, welche auf der Unterscheidung des Convexen und Concaven in den beiden Polygonstücken beruhen, kommen hier vorzüglich folgende in Betracht:

a) Alle Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ von $\mathfrak{B}$ sind grösser (oder doch nur einzelne eben so gross) als die gleichnamigen Winkel von $\mathfrak{B}_1$; und dann ist es für das Endresultat einerlei, ob die convexen Ecken von $\mathfrak{B}$ durchweg den convexen, durchweg den concaven, oder aber theils den convexen, theils den concaven Ecken von $\mathfrak{B}_1$ zugekehrt werden.

b) Sämmtliche Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind kleiner (oder doch nur einzelne eben so gross) als die gleichnamigen von $\mathfrak{B}_1$, und es kommt die Bedingung hinzu, dass die convexen Ecken von $\mathfrak{B}_1$ entweder durchweg den convexen oder durchweg den concaven Ecken von $\mathfrak{B}$ zugekehrt seien.

c) Beide Polygonstücke sind congruent.

Bezeichnet man nämlich die Länge der vom Punkte P beschriebenen Curve, jenachdem $\mathfrak{B}$ von der einen oder von der anderen Seite auf $\mathfrak{B}_1$ rollt, das eine Mal durch W und das andere Mal durch W_0, und bedenkt, dass diese beiden Fälle sich durch die additive und subtraktive Lage der gleichnamigen Winkel unterscheiden, so erhält man für W und W_0 nothwendig zwei Gleichungen von folgender gegenseitiger Beziehung, nämlich im Falle

$$a)\quad \begin{aligned} W &= a(\alpha \pm \alpha_1) + b(\beta \pm \beta_1) + c(\gamma \mp \gamma_1) + d(\delta \pm \delta_1); \\ W_0 &= a(\alpha \mp \alpha_1) + b(\beta \mp \beta_1) + c(\gamma \pm \gamma_1) + d(\delta \mp \delta_1); \end{aligned}$$

und hieraus die dritte:

$$W + W_0 = 2(a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta) = 2\Sigma(a\alpha):$$

$$b)\quad \begin{aligned} W &= a(\alpha_1 + \alpha) + b(\beta_1 + \beta) + c(\gamma_1 + \gamma) + d(\delta_1 + \delta); \\ W_0 &= a(\alpha_1 - \alpha) + b(\beta_1 - \beta) + c(\gamma_1 - \gamma) + d(\delta_1 - \delta): \end{aligned}$$

$$W - W_0 = 2(a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta) = 2\Sigma(a\alpha);$$

$$c)\quad \begin{aligned} W &= 2(a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta); \\ W_0 &= 0; \\ W &\pm W_0 = 2\Sigma(a\alpha). \end{aligned}$$

Da nun die Grössen $\Sigma(a\alpha)$ und $\Sigma(a \sin \alpha)$ der Gleichheit um so näher kommen, je kleiner die Bogen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ werden, so erhält man folgenden Satz, aus welchem man mit Leichtigkeit noch eine Reihe anderer Sätze wird ableiten können:

Lehrsatz 17.

Haben zwei Polygonstücke $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ paarweise und in derselben Ordnung gleiche Seiten, und rollt das erstere auf der einen Seite des andern, so beschreibt ein jeder mit der Ebene von $\mathfrak{B}$ fest verbundene Punkt P

eine krumme Linie W; und rollt $\mathfrak{B}$ auf der anderen Seite von $\mathfrak{B}_1$, so beschreibt derselbe Punkt P eine andere krumme Linie W_0. Sind nun *a*) alle hohlen Winkel von $\mathfrak{B}$ kleiner als die ihnen entsprechenden hohlen Winkel von $\mathfrak{B}_1$, oder doch nur einzeln denselben gleich, so nähert sich die Summe der Längen von W und W_0 um so mehr der doppelten Länge des Fusspunkten-Vielecks des Punktes P in Bezug auf das Polygonstück $\mathfrak{B}$, je kleiner die Nebenwinkel aller jener hohlen Winkel werden. Sind dagegen *b*) alle hohlen Winkel von $\mathfrak{B}$ grösser als die ihnen entsprechenden hohlen Winkel von $\mathfrak{B}_1$ oder doch nur einzeln denselben gleich, und sind bei der Erzeugung von W immer nur die convexen Winkel von $\mathfrak{B}$ den convexen von $\mathfrak{B}_1$, und bei der Erzeugung von W_0 immer nur die concaven Winkel von $\mathfrak{B}$ den convexen von $\mathfrak{B}_1$ zugekehrt, so gilt das nämliche nicht von der Summe, sondern von dem Unterschiede jener Längen. Sind endlich *c*) beide Polygonstücke congruent, so gilt diess von der Länge der einen Curve selbst, und die andere verschwindet.

Lehrsatz 18.

A) Rollt eine beliebige Curve (oder ein Curvenstück) $\mathfrak{B}$ auf der einen Seite einer anderen beliebigen Curve $\mathfrak{B}_1$, so beschreibt ein jeder, mit der Ebene von $\mathfrak{B}$ festverbundene Punkt P eine neue Curve W; und rollt $\mathfrak{B}$ auf der anderen Seite von $\mathfrak{B}_1$ so, dass immer wieder dieselben Punkte beider Curven wie das erste Mal zusammentreffen, so beschreibt derselbe Punkt P eine andere Curve W_0. Ist nun *a*) die Curve $\mathfrak{B}$ in allen ihren Punkten stärker gekrümmt, als die Curve $\mathfrak{B}_1$ in den entsprechenden Punkten, so ist die Summe der Längen von W und W_0 doppelt so gross als die Länge der Fusspunkten-Curve des Punktes P in Bezug auf die Curve $\mathfrak{B}$; ist aber *b*) die Curve $\mathfrak{B}$ in allen ihren Punkten schwächer gekrümmt, als die Curve $\mathfrak{B}_1$ in den entsprechenden Punkten, und ist bei der Erzeugung der beiden Curven W und W_0 das eine Mal der convexen Seite von $\mathfrak{B}_1$ durchweg die convexe, das andere Mal durchweg die concave Seite von $\mathfrak{B}$ zugekehrt, so ist der Unterschied der Längen von W und W_0 doppelt so gross als die jener Fusspunkten-Curve. Sind endlich *c*) beide Curven $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ congruent, so gilt das nämliche von der Länge der einen Curve W selbst, und die andere W_0 verschwindet. Uebrigens gilt das in *a*) und *b*) Ausgesagte auch noch, wenn die Krümmungen der Curven $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ in einzelnen Punktenpaaren einander gleich sind.

B) Die Längen derjenigen Curven W und W_0 bilden unter allen die grösste Summe oder Differenz, welche vom Punkte der kleinsten Entfernung in Bezug auf die mit den reciproken Werthen ihrer Krümungshalbmesser

behafteten Punkte der rollenden Curve $\mathfrak{B}$ beschrieben werden.

C) Und jene Summe oder Differenz wird um so grösser, je weiter der beschreibende Punkt P über diejenige Kreislinie hinaus liegt, welche um den genannten Punkt der kleinsten Entfernung, als Mittelpunkt, durch den von ihm entferntesten Punkt der Curve $\mathfrak{B}$ gelegt wird.

Lehrsatz 19.

A) Die Epicykloide und die von dem nämlichen Punkte beschriebene Hypocykloide sind zusammen doppelt so lang als die Fusspunkten-Curve jenes Punktes in Bezug auf den erzeugenden Kreis, wenn der letztere kleiner als die Basis ist; dagegen ist die Epicykloide um die doppelte Länge dieser Curve grösser als die Hypocykloide, wenn der erzeugende Kreis grösser als die Basis ist; und sind diese beiden letzteren einander gleich, so ist die Epicykloide doppelt so lang als jene Fusspunkten-Curve — es mag nun die ganze Basis oder nur ein bestimmter Theil derselben von einem bestimmten Theile des erzeugenden Kreises durchrollt werden.

B) Die Summe oder Differenz der Längen der Epicykloide und Hypocykloide, welche vom Mittelpunkte des erzeugenden Kreises auf einerlei Basis beschrieben werden, ist doppelt so gross als diese Basis, und ist die letztere dem ganzen Umfange des erzeugenden Kreises gleich, so ist die Summe oder der Unterschied der Längen der Epicykloide und Hypocykloide, welche von irgend einem anderen Punkte beschrieben werden, grösser als die doppelte Basis.

Anmerkung. Im Falle *B*) sind die Epicykloide und Hypocykloide selber Kreise oder Kreisbogen: ist nämlich der Halbmesser der Basis $=r$, der des erzeugenden Kreises $=\varrho$, so ist der der Epicykloide $W=r+\varrho$ und der der Hypocykloide, wenn $r>\varrho$, $=r-\varrho$, und wenn $r<\varrho$, $=\varrho-r$. Ist nun $2qr\pi$ der durchrollte Theil der Basis, wo $q \gtreqless 1$, so verhält sich, wenn $r>\varrho$:

$$W : 2(r+\varrho)\pi = 2qr\pi : 2r\pi;$$
$$W_0 : 2(r-\varrho)\pi = 2qr\pi : 2r\pi;$$

also

$$W + W_0 = 2q(r+\varrho)\pi + 2q(r-\varrho)\pi = 4qr\pi.$$

Ist aber $r<\varrho$, so ist

$$W - W_0 = 2q(r+\varrho)\pi - 2q(\varrho-r)\pi = 4qr\pi;$$

beiden Fällen also erhält man das Doppelte der Basis oder, s einerlei ist, das Doppelte des erzeugenden Kreisbogens.

Lehrsatz 20.

Rollt ein Bogen eines Kegelschnittes nacheinander uf beiden Seiten eines eben so langen Bogens einer eliebigen Curve, so beschreibt ein jeder Brennpunkt es Kegelschnitts zwei Curven, deren Summe oder Unerschied eine bestimmte, von der Basis unabhängige rösse hat, jenachdem der erste Bogen durchweg tärker oder schwächer als der zweite gekrümmt ist, orausgesetzt, dass im zweiten Falle die Basis keinen Wendungspunkt besitzt. Diese Grösse ist nämlich im alle der Parabel die Projektion ihres Bogens auf ine zur Achse senkrechte Gerade, und im Falle der llipse und Hyperbel ein Kreisbogen, welcher die albe Hauptachse zum Halbmesser und das Doppelte es Winkels, unter welchem jener Bogen vom anderen rennpunkte aus gesehen wird, zum Centriwinkel hat.

Lehrsatz 21.

Rollt ein Kegelschnitt auf einem demselben conruenten Kegelschnitte, indem immer zwei entsprechende Punkte zusammentreffen, so hat 1) unter allen unkten in der Ebene des ersten sein Mittelpunkt die eringste Geschwindigkeit; 2) verhalten sich die Geschwindigkeiten, mit welchen sich ein Brennpunkt in er Ebene der Basis bewegt, ebenso wie die Geschwinligkeiten, mit welchen im Falle der Parabel die mit der Achse parallele Gerade, im Falle der Ellipse und Hyperbel die Zuglinie des anderen Brennpunktes den Berührungspunkt beider Kegelschnitte in der Ebene des erzeugenden begleitet.

XVI.

Ueber einen Satz der analytischen Geometrie.

Von

dem Herausgeber.

1.

Jedermann kennt die elegante und in der Anwendung so fruchtbare Formel, durch welche der Cosinus des zwei rechte Winkel nicht übersteigenden Winkels, den zwei von dem Anfange eines rechtwinkligen Coordinatensystems im Raume ausgehende gerade Linien mit einander einschliessen, durch die Cosinus der von diesen Linien mit den positiven Theilen der drei Coordinatenaxen eingeschlossenen, ebenfalls zwei rechte Winkel nicht übersteigenden Winkel ausgedrückt wird. Sind nämlich α, β, γ und α_1, β_1, γ_1 die von den beiden Linien mit den positiven Theilen der drei Coordinatenaxen eingeschlossenen, 180^0 nicht übersteigenden Winkel, und bezeichnen wir den von diesen beiden Linien mit einander eingeschlossenen, ebenfalls 180^0 nicht übersteigenden Winkel durch Θ, so ist bekanntlich

$$\cos\Theta = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1.$$

Es scheint mir interessant zu sein, diesen in der vorhergehenden Form auf rechtwinklige Coordinaten eingeschränkten Satz auf beliebige schiefwinklige Coordinatensysteme zu erweitern, oder vielmehr die der vorhergehenden entsprechende allgemeine Gleichung für jedes beliebige schiefwinklige Coordinatensystem aufzusuchen, unter welcher die vorhergehende Gleichung als ein besonderer Fall enthalten ist, und aus der dieselbe hervorgehen muss, wenn man das beliebige schiefwinklige System rechtwinklig annimmt. Diese allgemeine Gleichung werde ich in der vorliegenden Abhandlung auf eine von andern nicht ganz allgemein bekannten Untersuchungen möglichst unabhängige und völlig elementare Weise zu entwickeln versuchen, und werde dann auch zeigen, dass sich aus derselben mit grosser Leichtigkeit ein anderer ebenfalls sehr bemerkenswerther Satz ableiten lässt, welchen Cauchy auf eine von der hier gegebenen Entwickelung völlig verschiedene Weise

der neuesten bis jetzt erschienenen Lieferung seiner Exercices d'Analyse et de Physique mathématique *) beehren hat, bemerke aber, dass ich die in Rede stehende allgemeine, von Cauchy a. a. O. nicht entwickelte und wohl auch überhaupt sonst noch nicht bekannte Gleichung als den Hauptgegenstand dieser Abhandlung betrachtet zu sehen wünsche.

II.

In Taf. III. Fig. 7. sei O der Anfang eines beliebigen Coordinatensystems im Raume und $OK=\varrho$ eine von demselben ausgehende gerade Linie, welche mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z respective die 180^0 nicht übersteigenden Winkel α, β, γ einschliesst. Die Coordinaten des Punktes K seien x, y, z. Sind nun OX, OY, OZ die Theile der drei Coordinatenaxen, welche den körperlichen Winkel einschliessen, in dem die Linie OK liegt, so beschreibe man über denselben als Kanten von unbestimmter Länge und mit der ihrer Länge nach bestimmten Linie OK als Diagonale ein Parallelepipedon, wie aus der Figur ohne weitere Erläuterung ersichtlich ist. Denken wir uns dann noch die in der Figur nicht gezeichnete Linie AK gezogen, so ist nach einem bekannten trigonometrischen Satze in dem Dreiecke OAK:

$$1)\quad AK^2 = OK^2 + OA^2 - 2OK.OA.\cos AOK,$$

und nach demselben Satze ist offenbar

$$2)\quad AK^2 = OB^2 + OC^2 + 2OB.OC.\cos YOZ.$$

Nun ist aber, wie sogleich in die Augen fällt, entweder

$$OA = +x,\ \angle AOK = \alpha$$

oder

$$OA = -x,\ \angle AOK = 180^0 - \alpha,$$

und folglich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$OA = \pm x,\ \cos AOK = \pm\cos\alpha;$$

also immer

$$OA.\cos AOK = x\cos\alpha;$$

folglich nach 1) in völliger Allgemeinheit:

$$3)\quad AK^2 = \varrho^2 + x^2 - 2\varrho x\cos\alpha.$$

Ferner ist, wobei die Bedeutung des Symbols (yz) als bekannt

*) Tome troisième. 1843. 29. Livraison. Paris. 1845. p. 137.

vorausgesetzt werden kann, mit Beziehung der obern und u
Zeichen auf einander entweder

$$OB = \pm y, \quad OC = \pm z, \quad \angle YOZ = (yz)$$

oder

$$OB = \pm y, \quad OC = \mp z, \quad \angle YOZ = 180^0 - (yz);$$

d. i. mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einande

$$OB.OC = \pm yz, \quad \cos YOZ = \pm \cos(yz);$$

also immer

$$OB.OC.\cos YOZ = yz\cos(yz);$$

folglich nach 2) in völliger Allgemeinheit:

$$4) \quad AK^2 = y^2 + z^2 + 2yz\cos(yz).$$

Aus den Gleichungen 3) und 4) ergiebt sich also jetzt
völlig allgemein gültige Gleichung:

$$5) \quad \varrho^2 + x^2 - 2\varrho x\cos\alpha = y^2 + z^2 + 2yz\cos(yz).$$

Vertauscht man nun aber in dieser Gleichung die Zeichen
hörig, so erhält man überhaupt die drei folgenden ganz allgem
gültigen Gleichungen:

$$6) \quad \begin{cases} \varrho^2 + x^2 - 2\varrho x\cos\alpha = y^2 + z^2 + 2yz\cos(yz), \\ \varrho^2 + y^2 - 2\varrho y\cos\beta = z^2 + x^2 + 2zx\cos(zx), \\ \varrho^2 + z^2 - 2\varrho z\cos\gamma = x^2 + y^2 + 2xy\cos(xy). \end{cases}$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen ergiebt sich:

$$7) \quad 3\varrho^2 - 2\varrho(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos(xy) + 2yz\cos(yz) + 2zx\cos(zx).$$

Denkt man sich jetzt in der Figur von den Punkten C und
auf die Linie OK Perpendikel gefällt, und bezeichnet deren Fu
punkte durch C' und D', so ist

$$8) \quad OK = KD' + C'D' + OC'.$$

Jenachdem nun $OA = +x$ oder $OA = -x$ ist, ist offen
$\angle XOK = \alpha$ oder $\angle XOK = 180^0 - \alpha$, d. h. es ist mit Beziehu
der obern und untern Zeichen auf einander

$$OA = \pm x, \quad \cos XOK = \pm\cos\alpha;$$

folglich in völliger Allgemeinheit

$$KD' = OA.\cos XOK = x\cos\alpha.$$

Denkt man sich durch CC' und DD' zwei auf OK senkrecht stehende Ebenen gelegt, und zwischen denselben von C' aus eine der Linie OB parallele Linie $C'D''$ gezogen, so ist offenbar $C'D''=OB$, und, jenachdem $OB=+y$ oder $OB=-y$ ist, ist $\angle D'C'D''=\angle YOK=\beta$ oder $\angle D'C'D''=\angle YOK=180^0-\beta$, d. h. es ist mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$OB=\pm y,\ \cos D'C'D''=\cos YOK=\pm\cos\beta;$$

also ist, weil das Dreieck $C'D'D''$ offenbar bei D' rechtwinklig ist, in völliger Allgemeinheit

$$C'D'=OB.\cos YOK=y\cos\beta.$$

Jenachdem endlich $OC=+z$ oder $OC=-z$ ist, ist offenbar $\angle ZOK=\gamma$ oder $\angle ZOK=180^0-\gamma$, d. h. es ist mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$OC=\pm z,\ \cos ZOK=\pm\cos\gamma;$$

folglich in völliger Allgemeinheit

$$OC'=OC.\cos ZOK=z\cos\gamma.$$

Führt man nun die gefundenen Ausdrücke von KD', $C'D'$, OC' in die Gleichung 8) ein, und setzt zugleich $OK=\varrho$, so erhält man die Gleichung

$$9)\quad \varrho=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma.$$

Diese Gleichung führt aber in Verbindung mit der Gleichung 7) auf der Stelle zu der Gleichung

$$10)\quad \varrho^2=x^2+y^2+z^2+2xy\cos(xy)+2yz\cos(yz)+2zx\cos(zx).$$

Sind jetzt x, y, z und x_1, y_1, z_1 die Coordinaten zweier beliebigen Punkte im Raume, deren Entfernung von einander durch E bezeichnet werden mag, so lege man durch den ersten dieser beiden Punkte als Anfang ein dem primitiven Systeme paralleles Coordinatensystem, und bezeichne die Coordinaten des zweiten der beiden gegebenen Punkte in Bezug auf dieses neue System durch x', y', z'; so ist nach den einfachsten Formeln der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten

$$x_1=x+x',\ y_1=y+y',\ z_1=z+z';$$

also

$$x'=x_1-x,\ y'=y_1-y,\ z'=z_1-z.$$

Nun ist aber nach 10) offenbar

$$E^2=x'^2+y'^2+z'^2+2x'y'\cos(xy)+2y'z'\cos(yz)+2z'x'\cos(zx),$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$11)\quad E^2 = (x_1-x)^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2 + 2(x_1-x)(y_1-y)\cos(xy) + 2(y_1-y)(z_1-z)\cos(yz) + 2(z_1-z)(x_1-x)\cos(zx)$$

oder

$$12)\quad E^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 + 2(x-x_1)(y-y_1)\cos(xy) + 2(y-y_1)(z-z_1)\cos(yz) + 2(z-z_1)(x-x_1)\cos(zx).$$

Führt man den Ausdruck von ϱ^2 aus 10) in eine jede der drei Gleichungen 6) ein, so erhält man nach einigen leichten Reductionen die drei folgenden Gleichungen:

$$13)\quad \begin{cases} \varrho\cos\alpha = x + y\cos(xy) + z\cos(zx), \\ \varrho\cos\beta = y + z\cos(yz) + x\cos(xy), \\ \varrho\cos\gamma = z + x\cos(zx) + y\cos(yz); \end{cases}$$

und wenn man nun aus diesen drei Gleichungen auf dem Wege gewöhnlicher algebraischer Elimination x, y, z bestimmt; so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$14)\quad \begin{cases} K = \cos\alpha\sin^2(yz) - \cos\beta\{\cos(xy) - \cos(yz)\cos(zx)\} \\ \qquad\qquad - \cos\gamma\{\cos(zx) - \cos(xy)\cos(yz)\}, \\ L = \cos\beta\sin^2(zx) - \cos\gamma\{\cos(yz) - \cos(zx)\cos(xy)\} \\ \qquad\qquad - \cos\alpha\{\cos(xy) - \cos(yz)\cos(zx)\}, \\ M = \cos\gamma\sin^2(xy) - \cos\alpha\{\cos(zx) - \cos(xy)\cos(yz)\} \\ \qquad\qquad - \cos\beta\{\cos(yz) - \cos(zx)\cos(xy)\} \end{cases}$$

und

$$15)\quad N = 1 - \cos^2(xy) - \cos^2(yz) - \cos^2(zx) + 2\cos(xy)\cos(yz)\cos(zx$$

gesetzt wird:

$$16)\quad x = \frac{K}{N}\varrho,\quad y = \frac{L}{N}\varrho,\quad z = \frac{M}{N}\varrho.$$

Es ist auch, wie man leicht findet:

$$17)\quad \begin{aligned} N &= \sin^2(yz)\sin^2(zx) - \{\cos(xy) - \cos(yz)\cos(zx)\}^2 \\ &= \sin^2(zx)\sin^2(xy) - \{\cos(yz) - \cos(zx)\cos(xy)\}^2 \\ &= \sin^2(xy)\sin^2(yz) - \{\cos(zx) - \cos(xy)\cos(yz)\}^2. \end{aligned}$$

Zerlegt man aber jede dieser Differenzen zweier Quadra

f bekannte Weise in Factoren, so erhält man mit Hülfe einiger kannten gòniometrischen Formeln auch:

$$18)\quad N = 4\sin\tfrac{1}{2}\{(xy)+(yz)+(zx)\}\sin\tfrac{1}{2}\{(yz)+(zx)-(xy)\}\times\sin\tfrac{1}{2}\{(xy)+(zx)-(yz)\}\sin\tfrac{1}{2}\{(xy)+(yz)-(zx)\}.$$

III.

Wir wollen uns nun zwei von dem Anfange der Coordinaten sgehende gerade Linien denken, und den von denselben einge-hlossenen, 180^0 nicht übersteigenden Winkel durch Θ, die von esen Linien mit den positiven Theilen der drei Coordinatenaxen ngeschlossenen, ebenfalls 180^0 nicht übersteigenden Winkel aber rch α, β, γ und α_1, β_1, γ_1 bezeichnen. In jeder dieser beiden inien nehmen wir einen beliebigen Punkt an, und bezeichnen die ntfernungen dieser beiden Punkte von dem Anfange der Coordi-ten durch ϱ und ϱ_1, ihre Entfernung von einander aber durch ; so ist nach einem bekannten trigonometrischen Satze

$$19)\quad E^2 = \varrho^2 + \varrho_1{}^2 - 2\varrho\varrho_1\cos\Theta.$$

ezeichnen wir aber die Coordinaten der beiden in Rede stehen-n Punkte durch x, y, z und x_1, y_1, z_1; so ist nach 10) und 12)

$$\varrho^2 = x^2+y^2+z^2+2xy\cos(xy)+2yz\cos(yz)+2zx\cos(zx),$$
$$\varrho_1{}^2 = x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2+2x_1y_1\cos(xy)+2y_1z_1\cos(yz)+2z_1x_1\cos(zx)$$

d

$$\begin{aligned}E^2 = {}&(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+z-z_1)^2\\&+2(x-x_1)(y-y_1)\cos(xy)\\&+2(y-y_1)(z-z_1)\cos(yz)\\&+2(z-z_1)(x-x_1)\cos(zx);\end{aligned}$$

so nach 19):

$$\begin{aligned}&(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2\\&+2(x-x_1)(y-y_1)\cos(xy)\\&+2(y-y_1)(z-z_1)\cos(yz)\\&+2(z-z_1)(x-x_1)\cos(zx)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= x^2+y^2+z^2+2xy\cos(xy)+2yz\cos(yz)+2zx\cos(zx)\\&+ x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2+2x_1y_1\cos(xy)+2y_1z_1\cos(yz)+2z_1x_1\cos(zx)\\&- 2\varrho\varrho_1\cos\Theta,\end{aligned}$$

ler, wie man hieraus, wenn man aufhebt, was sich aufheben sst, leicht findet:

$$20)\quad \varrho\varrho_1\cos\Theta = xx_1+yy_1+zz_1+(xy_1+yx_1)\cos(xy)+(yz_1+zy_1)\cos(yz)+(zx_1+xz_1)\cos(zx).$$

Setzen wir aber der Kürze wegen

$$21)\quad P=\sin^2(xy),\ Q=\sin^2(yz),\ R=\sin^2(zx)$$

und

$$22)\quad \begin{cases} P_1 = \cos(xy)-\cos(yz)\cos(zx), \\ Q_1 = \cos(yz)-\cos(zx)\cos(xy), \\ R_1 = \cos(zx)-\cos(xy)\cos(yz); \end{cases}$$

so ist nach 16)

$$x=\frac{Q\cos\alpha-P_1\cos\beta-R_1\cos\gamma}{N}\varrho,$$

$$y=\frac{R\cos\beta-Q_1\cos\gamma-P_1\cos\alpha}{N}\varrho,$$

$$z=\frac{P\cos\gamma-R_1\cos\alpha-Q_1\cos\beta}{N}\varrho$$

und

$$x_1=\frac{Q\cos\alpha_1-P_1\cos\beta_1-R_1\cos\gamma_1}{N}\varrho_1,$$

$$y_1=\frac{R\cos\beta_1-Q_1\cos\gamma_1-P_1\cos\alpha_1}{N}\varrho_1,$$

$$z_1=\frac{P\cos\gamma_1-R_1\cos\alpha_1-Q_1\cos\beta_1}{N}\varrho_1$$

Also ist nach 20):

$$23)\quad NN\cos\Theta =$$

$$\begin{aligned}
&(Q\cos\alpha-P_1\cos\beta-R_1\cos\gamma)(Q\cos\alpha_1-P_1\cos\beta_1-R_1\cos\\
&+(R\cos\beta-Q_1\cos\gamma-P_1\cos\alpha)(R\cos\beta_1-Q_1\cos\gamma_1-P_1\cos\\
&+(P\cos\gamma-R_1\cos\alpha-Q_1\cos\beta)(P\cos\gamma_1-R_1\cos\alpha_1-Q_1\cos\\
&+\left\{\begin{matrix}(Q\cos\alpha-P_1\cos\beta-R_1\cos\gamma)(R\cos\beta_1-Q_1\cos\gamma_1-P_1\cos\alpha_1)\\+(R\cos\beta-Q_1\cos\gamma-P_1\cos\alpha)(Q\cos\alpha_1-P_1\cos\beta_1-R_1\cos\gamma_1)\end{matrix}\right\}\cos(\\
&+\left\{\begin{matrix}(R\cos\beta-Q_1\cos\gamma-P_1\cos\alpha)(P\cos\gamma_1-R_1\cos\alpha_1-Q_1\cos\beta_1)\\+(P\cos\gamma-R_1\cos\alpha-Q_1\cos\beta)(R\cos\beta_1-Q_1\cos\gamma_1-P_1\cos\alpha_1)\end{matrix}\right\}\cos\\
&+\left\{\begin{matrix}(P\cos\gamma-R_1\cos\alpha-Q_1\cos\beta)(Q\cos\alpha_1-P_1\cos\beta_1-R_1\cos\gamma_1)\\+(Q\cos\alpha-P_1\cos\beta-R_1\cos\gamma)(P\cos\gamma_1-R_1\cos\alpha_1-Q_1\cos\beta_1)\end{matrix}\right\}\cos(
\end{aligned}$$

der, wie man nach leichter Entwickelung findet:

$$
\begin{aligned}
24)\quad NN\cos\Theta = {} & \left.\begin{aligned} &QQ + P_1P_1 + R_1R_1 \\ &-2QP_1\cos(xy) \\ &+2P_1R_1\cos(yz) \\ &-2R_1Q\cos(zx) \end{aligned}\right\} \cos\alpha\cos\alpha_1 \\
& + \left.\begin{aligned} &RR + Q_1Q_1 + P_1P_1 \\ &-2RP_1\cos(xy) \\ &-2Q_1R\cos(yz) \\ &+2P_1Q_1\cos(zx) \end{aligned}\right\} \cos\beta\cos\beta_1 \\
& + \left.\begin{aligned} &PP + R_1R_1 + Q_1Q_1 \\ &+2Q_1R_1\cos(xy) \\ &-2PQ_1\cos(yz) \\ &-2R_1P\cos(zx) \end{aligned}\right\} \cos\gamma\cos\gamma_1 \\
& - \left.\begin{aligned} &((Q+R)P_1 - Q_1R_1) \\ &-(QR+P_1P_1)\cos(xy) \\ &-(P_1Q_1-RR_1)\cos(yz) \\ &-(R_1P_1-QQ_1)\cos(zx) \end{aligned}\right\} (\cos\alpha\cos\beta_1 + \cos\beta\cos\alpha_1) \\
& - \left.\begin{aligned} &((R+P)Q_1 - R_1P_1) \\ &-(P_1Q_1-RR_1)\cos(xy) \\ &-(RP+Q_1Q_1)\cos(yz) \\ &-(Q_1R_1-PP_1)\cos(zx) \end{aligned}\right\} (\cos\beta\cos\gamma_1 + \cos\gamma\cos\beta_1) \\
& - \left.\begin{aligned} &((P+Q)R_1 - P_1Q_1) \\ &-(R_1P_1-QQ_1)\cos(xy) \\ &-(Q_1R_1-PP_1)\cos(yz) \\ &-(PQ+R_1R_1)\cos(zx) \end{aligned}\right\} (\cos\gamma\cos\alpha_1 + \cos\alpha\cos\gamma_1).
\end{aligned}
$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$
\begin{aligned}
25)\quad NN\cos\Theta = {} & A\cos\alpha\cos\alpha_1 \\
& + B\cos\beta\cos\beta_1 \\
& + C\cos\gamma\cos\gamma_1 \\
& + D(\cos\alpha\cos\beta_1 + \cos\beta\cos\alpha_1) \\
& + E(\cos\beta\cos\gamma_1 + \cos\gamma\cos\beta_1) \\
& + F(\cos\gamma\cos\alpha_1 + \cos\alpha\cos\gamma_1),
\end{aligned}
$$

so die Bedeutung von

$$A, B, C, D, E, F$$

von selbst erhellen wird; so ist, wie man nach einigen leicht Reductionen findet:

$$\begin{aligned}
A &= N\sin^2(yz),\\
B &= N\sin^2(zx),\\
C &= N\sin^2(xy),\\
D &= -N\{\cos(xy)-\cos(yz)\cos(zx)\},\\
E &= -N\{\cos(yz)-\cos(zx)\cos(xy)\},\\
F &= -N\{\cos(zx)-\cos(xy)\cos(yz)\};
\end{aligned}$$

und nach 25) erhält man also für $N\cos\Theta$, wo immer N seine a dem Obigen bekannte Bedeutung hat, den folgenden merkwür gen Ausdruck:

$$\begin{aligned}
26)\quad N\cos\Theta = {} & \sin^2(yz)\cos\alpha\cos\alpha_1\\
& +\sin^2(zx)\cos\beta\cos\beta_1\\
& +\sin^2(xy)\cos\gamma\cos\gamma_1\\
& -\{\cos(xy)-\cos(yz)\cos(zx)\}(\cos\alpha\cos\beta_1+\cos\beta\cos\alpha_1)\\
& -\{\cos(yz)-\cos(zx)\cos(xy)\}(\cos\beta\cos\gamma_1+\cos\gamma\cos\beta_1)\\
& -\{\cos(zx)-\cos(xy)\cos(yz)\}(\cos\gamma\cos\alpha_1+\cos\alpha\cos\gamma_1)
\end{aligned}$$

Für rechtwinklige Coordinaten ist

$$(xy)=(yz)=(zx)=90^0,$$

also nach dem Obigen offenbar $N=1$, und folglich nach 26):

$$27)\quad \cos\Theta=\cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1+\cos\gamma\cos\gamma_1,$$

welches die bekannte Formel ist, deren schon oben in der E leitung Erwähnung gethan worden ist.

IV.

Zu dem im Vorhergehenden betrachteten Coordinatensyste der xyz wollen wir nun ein zweites Coordinatensystem der x' mit demselben Anfangspunkte fügen, dessen Axen auf den Co dinatenebenen des ersten Systems, nämlich die Axe der

$$x',\ y',\ z'$$

respective auf der Ebene der

$$yz,\ zx,\ xy,$$

senkrecht stehen, und wollen die 180° nicht übersteigenden W kel, welche die von dem gemeinschaftlichen Anfangspunkte a gehenden beiden Linien mit den positiven Theilen der Axen d x', y', z' einschliessen, durch α', β', γ' und α'_1, β'_1, γ'_1 bezeichn

Dies vorausgesetzt, ist offenbar nach 26):

$$\begin{aligned} N\cos\alpha'_1 = {} & \sin^2(yz)\cos(xx')\cos\alpha_1 \\ & + \sin^2(zx)\cos(yx')\cos\beta_1 \\ & + \sin^2(xy)\cos(zx')\cos\gamma_1 \\ & -\{\cos(xy)-\cos(yz)\cos(zx)\}\{\cos(xx')\cos\beta_1+\cos(yx')\cos\alpha_1)\} \\ & -\{\cos(yz)-\cos(zx)\cos(xy)\}\{\cos(yx')\cos\gamma_1+\cos(zx')\cos\beta_1)\} \\ & -\{\cos(zx)-\cos(xy)\cos(yz)\}\{\cos(zx')\cos\alpha_1+\cos(xx')\cos\gamma_1)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N\cos\beta'_1 = {} & \sin^2(yz)\cos(xy')\cos\alpha_1 \\ & + \sin^2(zx)\cos(yy')\cos\beta_1 \\ & + \sin^2(xy)\cos(zy')\cos\gamma_1 \\ & -\{\cos(xy)-\cos(yz)\cos(zx)\}\{\cos(xy')\cos\beta_1+\cos(yy')\cos\alpha_1\} \\ & -\{\cos(yz)-\cos(zx)\cos(xy)\}\{\cos(yy')\cos\gamma_1+\cos(zy')\cos\beta_1\} \\ & -\{\cos(zx)-\cos(xy)\cos(yz)\}\{\cos(zy')\cos\alpha_1+\cos(xy')\cos\gamma_1\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N\cos\gamma'_1 = {} & \sin^2(yz)\cos(xy')\cos\alpha_1 \\ & + \sin^2(zx)\cos(yz')\cos\beta_1 \\ & + \sin^2(xy)\cos(zz')\cos\gamma_1 \\ & -\{\cos(xy)-\cos(yz)\cos(zx)\}\{\cos(xz')\cos\beta_1+\cos(yz')\cos\alpha_1\} \\ & -\{\cos(yz)-\cos(zx)\cos(xy)\}\{\cos(yz')\cos\gamma_1+\cos(zz')\cos\beta_1\} \\ & -\{\cos(zx)-\cos(xy)\cos(yz)\}\{\cos(zz')\cos\alpha_1+\cos(xz')\cos\gamma_1\}. \end{aligned}$$

Nach der Voraussetzung sind aber die Winkel

$$(yx'),\ (zx');\ (zy'),\ (xy');\ (xz'),\ (yz')$$

sämmtlich rechte Winkel, und die drei obigen Gleichungen nehmen daher die folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} N\frac{\cos\alpha'_1}{\cos(xx')} = {} & \sin^2(yz)\cos\alpha_1 - \{\cos(xy)-\cos(yz)\cos(zx)\}\cos\beta_1 \\ & - \{\cos(zx)-\cos(xy)\cos(yz)\}\cos\gamma_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N\frac{\cos\beta'_1}{\cos(yy')} = {} & \sin^2(zx)\cos\beta_1 - \{\cos(xy)-\cos(yz)\cos(zx)\}\cos\alpha_1 \\ & - \{\cos(yz)-\cos(zx)\cos(xy)\}\cos\gamma_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N\frac{\cos\gamma'_1}{\cos(zz')} = {} & \sin^2(xy)\cos\gamma_1 - \{\cos(yz)-\cos(zx)\cos(xy)\}\cos\beta_1 \\ & - \{\cos(zx)-\cos(xy)\cos(yz)\}\cos\alpha_1. \end{aligned}$$

Weil nun nach 26)

$$
\begin{aligned}
& N\cos\Theta \\
= \quad & \cos\alpha\,\{\sin^2(yz)\cos\alpha_1 - (\cos(xy) - \cos(yz)\cos(zx))\cos\beta_1 \\
& \qquad - (\cos(zx) - \cos(xy)\cos(yz))\cos\gamma_1\} \\
+ \quad & \cos\beta\,\{\sin^2(zx)\cos\beta_1 - (\cos(xy) - \cos(yz)\cos(zx))\cos\alpha_1 \\
& \qquad - (\cos(yz) - \cos(zx)\cos(xy))\cos\gamma_1\} \\
+ \quad & \cos\gamma\,\{\sin^2(xy)\cos\gamma_1 - (\cos(yz) - \cos(zx)\cos(xy))\cos\beta_1 \\
& \qquad - (\cos(zx) - \cos(xy)\cos(yz))\cos\alpha_1\}
\end{aligned}
$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden offenbar

$$28)\quad \cos\Theta = \frac{\cos\alpha\cos\alpha'_1}{\cos(xx')} + \frac{\cos\beta\cos\beta'_1}{\cos(yy')} + \frac{\cos\gamma\cos\gamma'_1}{\cos(zz')}.$$

Bezeichnet man die beiden Linien durch ϱ und ϱ', so kann man diese Gleichung auf folgende Art schreiben:

$$
\begin{aligned}
& 29)\quad \cos(\varrho\varrho') \\
= & \frac{\cos(\varrho x)\cos(\varrho' x')}{\cos(xx')} + \frac{\cos(\varrho y)\cos(\varrho' y')}{\cos(yy')} + \frac{\cos(\varrho z)\cos(\varrho' z')}{\cos(zz')}.
\end{aligned}
$$

Weil nach bekannten stereometrischen Sätzen auch die Axen de

$$x,\ y,\ z$$

respective auf den Ebenen der

$$y'z',\ z'x',\ x'y'$$

senkrecht stehen, so kann man in der vorhergehenden Gleichun die gleichnamigen Axen der beiden Systeme mit einander verwech seln, wodurch man die Gleichung

$$
\begin{aligned}
& 30)\quad \cos(\varrho\varrho') \\
= & \frac{\cos(\varrho x')\cos(\varrho' x)}{\cos(xx')} + \frac{\cos(\varrho y')\cos(\varrho' y)}{\cos(yy')} + \frac{\cos(\varrho z')\cos(\varrho' z)}{\cos(zz')}
\end{aligned}
$$

erhält.

Ist das System der xyz, und also natürlich auch das Systen der $x'y'z'$ rechtwinklig, so kann man offenbar immer annehmen dass die positiven Theile der Axen der x', y', z' respective mi den positiven Theilen der Axen der x, y, z zusammenfallen, und es ist dann

$$(xx') = (yy') = (zz') = 0$$

und

$$(\varrho' x') = (\varrho' x),\ (\varrho' y') = (\varrho' y),\ (\varrho' z') = (\varrho' z);$$

also nach 29):

$$31)\quad \cos(\varrho\varrho') = \cos(\varrho x)\cos(\varrho' x) + \cos(\varrho y)\cos(\varrho' y) + \cos(\varrho z)\cos(\varrho' z),$$

welches wieder die Gleichung 27) ist.

In den Gleichungen 29) und 30) ist der in der Einleitung erwähnte, von Cauchy a. a. O. auf eine ganz andere Art bewiesene Satz enthalten. Unser Hauptzweck bei der vorliegenden Abhandlung war aber, wie schon erinnert worden ist, die Entwickelung der allgemeinen Gleichung 26), von welcher die bekannte Gleichung 27) ein besonderer Fall ist.

XVII.

Ueber die Schwingungen eines kleinen Körpers, der an einem elastischen Körper befestigt ist.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

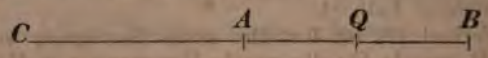
Die Abhandlung Nro. XXVI. im 7ten Bande des Archivs erinnerte mich an eine frühere Arbeit, die ich hier vorlegen will. Sie behandelt die Bewegung eines kleinen Körpers, der z. B. am einen Ende eines elastischen Schraubendrahtes befestigt ist. Wird ein solcher Draht ausgedehnt oder zusammengedrückt, so geräth der daran befestigte Körper in eine hin- und hergehende Bewegung um den Punkt seiner Ruhe herum. Diese Bewegung ist hervorgebracht durch die Kraft der Elastizität, von der man hier annimmt, sie wirke wie eine von dem Punkte, in welchem das Ende des freien Drahtes für den Fall der Ruhe ist, ausgehende und im Verhältniss der Entfernung wirkende anziehende Kraft. Unter diesen Voraussetzungen werden folgende Aufgaben leicht verstanden werden. Es wird natürlich dabei vorausgesetzt, dass das andere Ende des Drahtes festgemacht sei; der feste Punkt aber,

von dem im Folgenden die Rede ist, ist der Punkt, in welchem das freie Ende des Drahtes sich befindet, wenn der Draht unbelastet in Ruhe ist.

§. 1.

Ein Körper, dessen Gewicht (in Kilog.) p sei, ist einer im direkten Verhältniss der Entfernung wirkenden Kraft unterworfen, die von einem festen Punkte ausgeht; welches ist seine Bewegung?

Sei in untenstehender Figur



A der feste Punkt, B der Ausgangspunkt des Körpers, Q seine Stelle am Ende der Zeit t, und $AQ=x$, so hat man offenbar:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{gex}{p},$$

wenn g die bekannte Beschleunigung durch die Schwere, e eine konstante Grösse ist, die von der Beschaffenheit des Drahtes abhängt. Hieraus folgt zunächst:

$$2\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{2gex}{p}\cdot\frac{\partial x}{\partial t},$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = -\frac{gex^2}{p} + C = v^2.$$

Ist nun $AB = a$, so ist v (die Geschwindigkeit) für $x=a$ Null, also

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = \frac{ge}{p}(a^2 - x^2) = v^2. \qquad (1)$$

Aus (1) folgt

$$-\frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{\frac{eg}{p}}\cdot\sqrt{a^2-x^2},$$

$$\partial t\,.\,\sqrt{\frac{eg}{p}} = -\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$t\,.\,\sqrt{\frac{eg}{p}} = C - \arc\left(\sin = \frac{x}{a}\right).$$

Da, für $x=a$, $t=0$, so ist

$$t\,.\,\sqrt{\frac{eg}{p}} = \frac{4n+1}{2}\pi - \arc\left(\sin = \frac{x}{a}\right), \qquad (2)$$

worin n eine bestimmte ganze Zahl ist.

Aus den Gleichungen (1) und (2) schliesst man leicht:

Der Körper bewegt sich von B bis C, wenn $AC=AB$, von B bis A mit zunehmender, von C bis A mit abnehmender Geschwindigkeit; in B und C ist seine Geschwindigkeit Null; von C bis B geht der Körper umgekehrt so, wie von B bis C u. s. f.

Die Zeit, welche verfliesst, bis der Körper, nachdem er von B ausgegangen, das erste Mal wieder dorthin zurückkommt, ist $2\pi\sqrt{\frac{p}{eg}}$; die Zeit, die er braucht von B bis C, ist die Hälfte davon. (Von C bis B ist $\text{arc}(\sin=\frac{x}{a})$ negativ.)

In der Formel (2) ist für die erste Bewegung von B bis wieder nach B, $n=1$; für die zweite Bewegung von B bis wieder nach B, $n=2$ u. s. f.

Die Stelle, welche der Körper am Ende einer bestimmten Zeit T einnimmt, findet sich folgendermassen.

Sei $T=2n\pi\sqrt{\frac{p}{eg}}+\varrho$, worin $\varrho<2\pi\sqrt{\frac{p}{eg}}$, so ist

$$T\sqrt{\frac{eg}{p}}-\frac{4n+1}{2}\pi=-\text{arc}(\sin=\frac{x}{a}),$$

demnach

$$x=a\cos(\varrho\sqrt{\frac{eg}{p}}). \qquad (3)$$

Für $T=0$ ist $\varrho=0$, also $x=a$;

für $T=\pi\sqrt{\frac{p}{eg}}$ ist $\varrho=\pi\sqrt{\frac{p}{eg}}$, also $x=-a$ u. s. f.

Die Gleichungen (1), (2), (3) bestimmen die Bewegung vollständig.

§. 2.

Die Verhältnisse seien wie im vorigen Paragraphen, nur nehmen wir den Körper auch noch als den Wirkungen der Schwerkraft unterworfen an. Es sei x vom Anziehungsmittelpunkte aus nach unten gerechnet und die ursprüngliche Entfernung von demselben wieder a (indem vorausgesetzt wird, dass die Schwingungen senkrecht auf und nieder geschehen).

Für diesen Fall ist

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\frac{g}{p}(p-ex),$$

woraus wie oben

$$v^2 = \frac{g}{p}(2px - ex^2) + C.$$

Da, für $x = a$, $v = 0$, so ist

$$v^2 = \frac{g}{p}[2p(x-a) + e(a^2 - x^2)] = \frac{g}{p}(2p - ea - ex)(x-a). \quad (1)$$

Setzt man also $2p - ae = be$, so ist

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = \frac{ge}{p}(b-x)(x-a),$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{\frac{ge}{p}} \cdot \sqrt{(b-x)(x-a)},$$

$$\partial t \cdot \sqrt{\frac{ge}{p}} = \frac{\partial x}{\sqrt{(b-x)(x-a)}},$$

$$t\sqrt{\frac{ge}{p}} = -2\arctg\sqrt{\frac{b-x}{x-a}} + C,$$

und da, für $x = a$, $t = 0$ ist, so folgt daraus:

$$t\sqrt{\frac{eg}{p}} = (2n+1)\pi - 2\arctg\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}, \quad (2)$$

aus welcher Formel man x durch t ausdrücken kann.

Vor Allem muss hier bemerkt werden, dass wenn $v = 0$ für $x = a$ sein soll, der Punkt, in welchem der Körper im Anfang sein soll, tiefer sein muss, als der, in welchem die Anziehungskraft und die Schwere gleich stark wirken, für den also $ex = p$, oder $x = \frac{p}{e}$ ist, d. h. $a > \frac{p}{e}$; im andern Falle ginge der Körper nicht zurück, sondern er würde sich zuerst noch weiter vom Anziehungsmittelpunkte entfernen.

Die Geschwindigkeit ist Null für $x = a$ und für $x = b = \frac{2p}{e} - a$. Der Körper schwingt also in dem Raume von $x = a$ bis $x = \frac{2p}{e} - a$ hin und her; ist demnach $a < \frac{2p}{e}$, so erreicht er nie den Anziehungsmittelpunkt. Die Zeit, welche der Körper braucht, um von $x = a$ bis $x = \frac{2p}{e} - a$ zu gehen, findet sich $\pi\sqrt{\frac{p}{eg}}$, und die, welche er braucht, um auf seine ursprüngliche Stelle zurückzugehen: $2\pi\sqrt{\frac{p}{eg}}$, ganz wie in §. 1. Der Punkt, in welchem der

örper die grösste Geschwindigkeit hat, entspricht $x=\frac{p}{e}$; die eit, welche er braucht, um von $x=a$ bis $x=\frac{p}{e}$ zu gelangen, t $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{p}{eq}}$, also $\frac{1}{4}$ der ganzen Schwingungsdauer; zugleich liegt ieser Punkt in der Mitte zwischen den äussersten Punkten. Die ewegung ist übrigens ähnlich wie in §. 1.

§. 3.

Sei Alles wie in §. 2., nur befinde sich der Körper im Anange über dem Punkte $x=\frac{p}{e}$, sei also $a<\frac{p}{e}$, so findet man die leichen Resultate in Bezug auf die Schwingungsdauer; die Beegung ist ebenfalls die nämliche, ihre äussersten Gränzen sind $=\frac{p}{e}$ und $x=\frac{2p}{e}-a$, wie oben, so dass §. 2. allgemein gilt.

Setzt man a negativ, so deutet diess an, dass der Körper anänglich über dem Anziehungspunkte gewesen; die Schwingungsauer ist die gleiche, wie so eben; der Körper oszillirt zwischen $=-a$ und $x=\frac{2p}{e}+a$; seine grösste Geschwindigkeit hat er m nämlichen Punkte, wie so eben u. s. f.

§. 4.

Sei ein Körper, dessen Gewicht p sein soll, der Wirkung weier anziehenden Mittelpunkte unterworfen, welche auf die aneführte Art wirken; heissen C und C' die Mittelpunkte, ist a re Entfernung und werden die Abszissen x gezählt von C gegen ', ist der Körper ferner im Anfange der Bewegung auf der geraen Linie, welche die beiden Anziehungsmittelpunkte verbindet, o hat man:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\frac{e'(a-x)-ex}{p}g,$$

obei e' und e den beiden Mittelpunkten entsprechen, und x kleiner ls a vorausgesetzt ist. Hieraus

$$v^2=\frac{2ae'x-e'x^2-ex^2}{p}g+C,$$

nd wenn für $x=k(<a)$, $v=0$:

$$v^2 = \frac{g}{p}\left[2ae'(x-k) - (e+e')(x^2-k^2)\right] \qquad (1)$$

$$= \frac{g}{p}(2ae' - (e+e')(x+k))(x-k)$$

$$= \frac{g}{p}(2ae' - (e+e')k - (e+e')x)(x-k).$$

Setzt man also

$$2ae' - (e+e')k = m(e+e'),$$

so ist

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = \frac{g(e+e')}{p}(m-x)(x-k),$$

woraus, wie oben:

$$t\sqrt{\frac{g(e+e')}{p}} = (2n+1)\pi - 2\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \sqrt{\frac{m-x}{x-k}}\right). \qquad (2)$$

Also ist die Dauer einer Oszillation (hin und her) $= 2\pi\sqrt{\frac{p}{g(e+e')}}$; der Körper oszillirt zwischen $x=k$ und $x=m=\frac{2ae'}{e+e'}-k$; er hat seine grösste Geschwindigkeit in $x=\frac{ae'}{e+e'}$, welcher Punkt in der Mitte liegt, und in welchem beide Mittelpunkte gleich stark wirken.

Setzt man $k=0$, $e=e'$, so geht der Körper von einem Mittelpunkte zum andern in der Zeit $\pi\sqrt{\frac{p}{2ge}}$.

§. 5.

Ein Körper vom Gewichte p sei den Wirkungen zweier senkrecht über einander liegenden Anziehungsmittelpunkte unterworfen, deren Kräfte von der mehrfach betrachteten Art sind; er befindet sich anfänglich zwischen beiden auf der Linie, welche dieselben verbindet. Sei C der untere, C' der obere Mittelpunkt der Anziehung, die x seien von C aus gegen C' gerechnet, a die Linie CC', k habe die Bedeutung des §. 3., wie e und e', endlich sei der Körper den Wirkungen der Schwere unterworfen. Hier hat man:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \left(\frac{e'(a-x)-ex}{p} - 1\right)g = \frac{g}{p}(e'a - (e'+e)x - p),$$

oder, wenn zur Abkürzung $e'a-p=m$, $e'+e=r$ gesetzt wird:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{g}{p}(m - rx),$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = v^2 = \frac{g}{p}(2mx - rx^2) + C,$$

$$v^2 = \frac{g}{p}(2m(x-k) - r(x^2-k^2)) = \frac{g}{p}(2m - r(x+k))(x-k) \quad (1)$$

$$= (2m - rk - rx)(x-k)\frac{g}{p}.$$

etzt man $2m - rk = rb$, so ist

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = \frac{gr}{p}(b-x)(x-k),$$

$$\partial t . \sqrt{\frac{gr}{p}} = \frac{\partial x}{\sqrt{(b-x)(x-k)}},$$

$$t\sqrt{\frac{gr}{p}} = C - 2 . \arc\left(\mathrm{tg} = \sqrt{\frac{b-x}{x-k}}\right),$$

$$t\sqrt{\frac{gr}{p}} = (2n+1)\pi - 2 . \arc\left(\mathrm{tg} = \sqrt{\frac{b-x}{x-k}}\right). \quad (2)$$

Hieraus folgt, dass die ganze Oszillationsdauer $= 2\pi\sqrt{\frac{p}{gr}}$ $= 2\pi\sqrt{\frac{p}{g(e+e')}}$, also gerade wie in §. 3. ist; diese ist daher die ämliche, ob man die Schwere berücksichtigt oder nicht. Der Körper schwingt zwischen den Punkten $x = k$ und $x = b = \frac{2m}{r} - k$ $= \frac{2e'a - 2p}{e+e'} - k$; seine grösste Geschwindigheit hat er im Punkte $= \frac{m}{r} = \frac{e'a - p}{e'+e}$, der in der Mitte liegt.

Wir schliessen demnach aus dem Obigen, dass die Oszillationsdauer durchaus die nämliche ist, ob man die Wirkung der Schwerkraft beachtet oder nicht; es hat dieselbe bloss Einfluss auf die Amplitude der Schwingung.

XVIII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Wenn Δ den Flächeninhalt eines Dreiecks ABC bezeichnet und A', B', C' beliebige Punkte in den Seiten BC, CA, AB oder deren Verlängerungen sind, der Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C'$ aber durch Δ' bezeichnet wird, so ist jederzeit

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{AB.BC.CA}{AB'.BC'.CA' + AC'.BA'.CB'}$$

Wie lässt sich dieser Satz beweisen und auf sphärische Dreiecke erweitern?

(The Mathematician. March. 1846.) Thomas Cotterill.

Wenn die durch den Punkt M eines Kegelschnitts gezogene Berührende die Hauptaxe AB desselben in N schneidet, und das in N auf die Hauptaxe errichtete Perpendikel von den nöthigenfalls gehörig verlängerten Sehnen AN und BN in D und E geschnitten wird, so ist immer $DN = EN$.

(The Mathematician. March. 1846.) J. W. Elliott.

Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm, dessen Diagonalen AC und BD sich in O schneiden. Durch den Punkt O ziehe man die Linien EF und GH den Seiten AB, CD und AD, BC des Parallelogramms $ABCD$ parallel. Nimmt man dann in EF einen beliebigen Punkt E' an, zieht die Linien AE' und DE', welche die Linie GH in G' und H' schneiden, und hierauf die Linien BG' und CH', so gehen diese beiden Linien durch denselben Punkt F' der Linie EF, und das Viereck $E'F'G'H'$ ist ein Parallelogramm.

(The Mathematician. March. 1846.) Fenwick.

Einen Bogen eines gegebenen Kreises so zu bestimmen, dass der Unterschied zwischen seiner Sehne und der Sehne seiner Hälfte ein Maximum ist.

(The Mathematician. March. 1846.) Matthew Collins.

Von dem Herrn Oberlehrer Seydewitz am Gymnasium zu Heiligenstadt.

1. Berühren drei Seiten AB, BC, CD eines einem Kreise ingeschriebenen Vierecks $ABCD$ einen zweiten, mit dem ersteren oncentrischen Kreis, und verbindet man eine der beiden Ecken B, C, wo diese drei Seiten paarweise zusammenstossen, z. B. C, mit dem Berührungspunkte der dritten Seite AB durch eine Gerade, so wird letztere von der Geraden, welche den ersten Kreis in der anderen Ecke B berührt, und von der vierten Seite des Vierecks in einem und demselben Punkte geschnitten.

2. Liegen drei Ecken A, B, C eines einem Kreise umschriebenen Vierecks $ABCD$ auf dem Umfange eines mit demselben oncentrischen Kreises, so schneidet eine jede der beiden Seiten AB, BC, welche zwei dieser Ecken verbinden, z. B AB, die Gerade, welche den zweiten Kreis in der dritten Ecke C berührt, in einem Punkte, welcher mit dem Berührungspunkte der anderen Seite BC und mit der vierten Ecke des Vierecks in einer und derselben geraden Linie liegt.

3. Bewegt sich ein rechter Winkel dergestalt um ein Quadrat, dass seine Schenkel fortwährend zwei benachbarte Ecken des letzteren berühren, so dreht sich die Halbirungslinie desselben um den Mittelpunkt des Quadrats.

Von dem Herrn Dr. J. Dienger, Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

I.

Man hat für jedes ganze, positive m und r:

$$\frac{(m+1).1.2.3\ldots(r-2)}{(m+2)(m+3)\ldots(m+r)}\left[1+\frac{m+r}{r-2}+\frac{(m+r)(m+r-1)}{(r-2)(r-3)}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{(m+r)(m+r-1)\ldots(m+3)}{(r-2)(r-3)\ldots1}\right]=1-\frac{1.2\ldots(r-1)}{(m+2)(m+3)\ldots(m+r)}.$$

II.

$$\frac{2p.(2p-2)\ldots2}{(2p+1)(2p-1)\ldots3}=1-\tfrac{1}{3}p+\tfrac{1}{5}\frac{p(p-1)}{1.2}-\tfrac{1}{7}\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(-1)^p.1}{2p+1},$$

wenn p eine ganze, positive Zahl ist.

III.

$$(-1)^p \frac{2.4.6...2p}{1.3.5...(p+1)}.2^{2p} = \frac{1}{2p+1} - \frac{2p+1}{1}.\frac{1}{2p-1} + \frac{1}{2p-3}.\frac{(2p+1)2p}{1.2} - \ldots (-1)^p \frac{(2p+1)2p\ldots(p+2)}{1.2.3...p},$$

wenn p eine gánze, positive Zahl ist.

IV.

Setzt man

$$\frac{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)}{1.2...m} = n_m,$$

so findet man:

$$\frac{1}{n-m} n_m = \frac{1}{n} n_m + \frac{1}{n-1}(n-1)_{m-1} + \frac{1}{n-2}(n-2)_{m-2} + \ldots + \frac{1}{n-m+1}(n-m+1)_1 + \frac{1}{n-m},$$

was auch n sei, wenn nur m eine ganze, positive Zahl ist.

V.

$$1 - \frac{2m}{3} + \frac{2m(2m-2)}{1.3.5} - \frac{2m(2m-2)(2m-4)}{1.3.5.7} + \ldots \pm \frac{2m(2m-2)\ldots 2}{3.5.7...(2m+1)} = \frac{1}{2m+1},$$

wenn m eine ganze, positive Zahl ist.

VI

$$\frac{\cos\delta}{1.2} - \frac{\cos 3\delta}{3.4} + \frac{\cos 5\delta}{5.6} - \ldots \text{ in inf.} = \frac{\pi}{4} - \frac{\cos\delta}{4}\log(2(1+\cos 2\delta)) - \frac{\delta}{2}\sin\delta.$$

$$\frac{\sin\delta}{1.2} - \frac{\sin 3\delta}{3.4} + \frac{\sin 5\delta}{5.6} - \ldots \text{ in inf.} = \frac{1}{4}\log\left(\frac{1+\sin\delta}{1-\sin\delta}\right) - \frac{\delta}{2}\cos\delta + \frac{\sin\delta}{4}\log(2(1+\cos 2\delta)).$$

Beide Male $\delta^2 < \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$.

VII.

$$\frac{\cos\delta}{1\ 2}+\frac{1}{2}\frac{\cos 3\delta}{3.4}+\frac{1.3}{2.4}\frac{\cos 5\delta}{5.6}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\cos 7\delta}{7.8}+\ldots\ \text{in inf.}$$

$$=\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{\cos\delta}{\sqrt{(1+\sin\delta)}}\right)+\sqrt{2\sin\delta}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\delta}{2}\right)-\cos\delta.$$

$$\frac{\sin\delta}{1.2}+\frac{1}{2}\frac{\sin 3\delta}{3.4}+\frac{1.3}{2.4}\frac{\sin 5\delta}{5.6}+\ldots\ \text{in inf.}$$

$$=\log\left[\sqrt{1+\sin\delta}+\sqrt{\sin\delta}\right]-\sqrt{2\sin\delta}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\delta}{2}\right)+\sin\delta.$$

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3.4}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5.6}+\ldots.$$

$$\delta\overset{=}{<}\frac{\pi}{2},\ \delta\overset{=}{>}0.$$

XIX.

Miscellen.

Beweis des Ptolemäischen Lehrsatzes.

Von dem Herrn Professor Dr. Hessel zu Marburg.

Während uns der Pythagoräische Lehrsatz sagt, dass bei jedem Rectangel *abcd* (Taf. III. Fig. 8.) das Product der beiden Diagonalen gleich sei der Summe aus den Producten der gegenüberstehenden Seiten, d. h. dass

$$ac.bd=bc.ad+ba.cd$$

sei, so erweitert der Ptolemäische Lehrsatz bekanntlich diese Behauptung und spricht ihre Gültigkeit für jedes Viereck im Kreise aus

Er gehört daher zu den interessantesten Sätzen der Elementargeometrie.

Eine eigenthümliche Art ihn zu beweisen ist folgende.

Bezeichnet man ein Parallelogramm und ein Dreieck, wenn in beiden die Seiten x und y den Winkel v einschliessen, durch $\Pi\binom{x.y}{\angle v}$ und durch $\Delta\binom{x.y}{\angle v}$, so hat man:

1) Viereck $abcd = \frac{1}{2}\,\Pi\binom{ac.bd}{\angle u}$ (Siehe Taf. III. Fig. 9.)

Zieht man nun $de \# ac$ und dann ec und eb und ae, so ist

2) $\Delta\, adc \cong \Delta\, cea$,

mithin

3) Viereck $abcd$ = Viereck $aecb = \Delta\, bce + \Delta\, bae$.

Zugleich aber ist:

4) $\angle ace = \angle cad = \delta$,

mithin

5) $\angle bce = \delta + \beta = u'$;

also auch, da $abce$ ein Viereck im Kreise ist,

6) $\angle bae = 180^0 - bce = 180^0 - u' = u$,

so dass

7) $\Delta\, bce = \Delta\binom{be.ce}{\angle u'} = \frac{1}{2}\,\Pi\binom{bc.ce}{\angle u}$,

und

8) $\Delta\, bae = \Delta\binom{ba.ae}{\angle u} = \frac{1}{2}\,\Pi\binom{ba.ae}{\angle u}$.

Es folgt daher aus 1), 3), 7) und 8):

9) $\frac{1}{2}\,\Pi\binom{ac.bd}{\angle u} = \frac{1}{2}\,\Pi\binom{bc.ce}{\angle u} + \frac{1}{2}\,\Pi\binom{ba.ae}{\angle u}$;

folglich, da die Gültigkeit einer solchen Gleichheit nicht aufgehoben wird, wenn man in jedem der drei Parallelogramme statt des Winkels u einen und denselben anderen Winkel, z. B. einen rechten Winkel R, setzt und die Factoren $\frac{1}{2}$ weglässt:

10) $\Pi\binom{ac.bd}{\angle R} = \Pi\binom{bc.ce}{\angle R} + \Pi\binom{ba.ae}{\angle R}$,

d. h.

11) $ac.bd = bc.ce + ba.ae,$

oder, wenn man statt ce den Werth ad und statt ae den Werth cd substituirt,

12) $ac.bd = bc.ad + ba.cd.$

Aufgabe.

Von dem Herrn Professor Dr. Hessel zu Marburg.

Ein gleichschenkeliges Dreieck ABC (Taf. III. Fig. 10.), dessen Schenkel CA und CB an Länge constant sind, verändert sich so, dass sein Winkel ACB wächst und sein Punkt B in einem Kreise vom Radius $CA = CB$ fortschreitet, während der Schenkel CA unbewegt bleibt: man soll die Curve zeichnen, in der sein Schwerpunkt β fortrückt.

Auflösung. Es ist $C\beta = \frac{2}{3} Cu$, oder, wenn $Ca = \frac{2}{3} CA$ ist, $C\beta = Ca \,.\, \cos\frac{1}{2} ACB$. Es ist daher die Curve $a\beta\beta_1\beta_2 C$ ein Kreis vom Radius $ma = mC = \frac{1}{2} aC = \frac{1}{3} AC$, dessen Mittelpunkt m in CA so liegt, dass $Cm = \frac{1}{3} CA$ ist.

In dem Journale: The Mathematician. March. 1846. p. 69. hat Herr William Rutherford eine Untersuchung über die acht Kreise, von denen die drei Kreise, welche sich über den drei Seiten eines Dreiecks als Durchmessern beschreiben lassen, geliefert, deren Hauptresultate ich im Folgenden mittheilen will, weil ich glaube, dass das Aufsuchen der Beweise für dieselben Stoff zu zweckmässigen Uebungen darbieten, und vielleicht auch noch zu manchen andern interessanten Resultaten führen kann, die ich gern im Archive abdrucken lassen werde, wenn man sie mir mitzutheilen die Güte hat.

Das gegebene Dreieck sei DEF und A, B, C seien die Mittelpunkte der Seiten EF, FD, DE. Man setze

$$BC = a,\ CA = b,\ AB = c$$

und $2s = a + b + c$; ferner der Kürze wegen

$$s_1 = s - a,\ s_2 = s - b,\ s_3 = s - c.$$

Die über EF, FD, DE als Durchmesser beschriebenen Kreise wollen wir respective den Kreis a, den Kreis b, den Kreis c nennen.

Der Halbmesser des Kreises, zwischen welchem und dem Kreise a, b, c respective eine Berührung von Innen, Innen, Innen Statt findet, sei ϱ_1.

Der Halbmesser des Kreises, zwischen welchem und
Kreisen a, b, c respective eine Berührung von Aussen, Auss
Aussen Statt findet, sei ϱ_8.

Der Halbmesser des Kreises, zwischen welchem und
Kreisen a, b, c respective eine Berührung von Aussen, Inn
Innen Statt findet, sei ϱ_2.

Der Halbmesser des Kreises, zwischen welchem und
Kreisen a, b, c respective eine Berührung von Innen, Auss
Aussen Statt findet, sei ϱ_7.

Der Halbmesser des Kreises, zwischen welchem und
Kreisen a, b, c respective eine Berührung von Innen, Auss
Innen Statt findet, sei ϱ_3.

Der Halbmesser des Kreises, zwischen welchem und
Kreisen a, b, c respective eine Berührung von Aussen, Inn
Aussen Statt findet, sei ϱ_6.

Der Halbmesser des Kreises, zwischen welchem und
Kreisen a, b, c respective eine Berührung von Innen, Inn
Aussen Statt findet, sei ϱ_4.

Der Halbmesser des Kreises, zwischen welchem und
Kreisen a, b, c respective eine Berührung von Aussen, Auss
Innen Statt findet, sei ϱ_5

Die Halbmesser der vier die Seiten des Dreiecks ABC
rührenden Kreise seien r, r_1, r_2, r_4; und zwar sei r der Halbmes
des in das Dreieck beschriebenen Kreises; r_1 sei der Halbmes
des über der Seite $a=BC$ ausserhalb liegenden Kreises; r_2
der Halbmesser des über der Seite $b=CA$ ausserhalb des Dr
ecks liegenden Kreises; r_3 sei der Halbmesser des über der Se
$c=AB$ ausserhalb des Dreiecks liegenden Kreises.

Dies vorausgesetzt hat man die folgenden Formeln:

$$\frac{1}{s-\varrho_1} = \frac{2}{r} - \frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_3},$$

$$\frac{1}{s_1-\varrho_2} = \frac{2}{r_1} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3},$$

$$\frac{1}{s_2-\varrho_3} = \frac{2}{r_2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_3},$$

$$\frac{1}{s_3-\varrho_4} = \frac{2}{r_3} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2},$$

$$\frac{1}{s_3+\varrho_5} = -\frac{2}{r_3} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2},$$

$$\frac{1}{s_2+\varrho_6} = -\frac{2}{r_2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_3},$$

$$\frac{1}{s_1+\varrho_7} = -\frac{2}{r_1} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3},$$

$$\frac{1}{s-\varrho_8} = -\frac{2}{r} - \frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_3}.$$

Setzt man

$$2d = -r + r_1 + r_2 + r_3,$$

wird

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{s} + \frac{r}{2s(s-d-r)},$$

$$\frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{s_1} + \frac{r_1}{2s_1(s_1+d-r_1)},$$

$$\frac{1}{\varrho_3} = \frac{1}{s_2} + \frac{r_2}{2s_2(s_2+d-r_2)},$$

$$\frac{1}{\varrho_4} = \frac{1}{s_3} + \frac{r_3}{2s_3(s_3+d-r_3)},$$

$$\frac{1}{\varrho_5} = -\frac{1}{s_3} + \frac{r_3}{2s_3(s_3-d+r_3)},$$

$$\frac{1}{\varrho_6} = -\frac{1}{s_2} + \frac{r_2}{2s_2(s_2-d+r_2)},$$

$$\frac{1}{\varrho_7} = -\frac{1}{s_1} + \frac{r_1}{2s_1(s_1-d+r_1)},$$

$$\frac{1}{\varrho_8} = \frac{1}{s} - \frac{r}{2s(s+d+r)}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_8} = \frac{r}{2s}\left\{\frac{1}{s-(d+r)} + \frac{1}{s+(d+r)}\right\},$$

$$\frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_7} = \frac{r_1}{2s_1}\left\{\frac{1}{s_1+(d-r_1)} + \frac{1}{s_1-(d-r_1)}\right\},$$

$$\frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_6} = \frac{r_2}{2s_2}\left\{\frac{1}{s_2+(d-r_2)} + \frac{1}{s_2-(d-r_2)}\right\},$$

$$\frac{1}{\varrho_4} + \frac{1}{\varrho_5} = \frac{r_3}{2s_3}\left\{\frac{1}{s_3+(d-r_3)} + \frac{1}{s_3-(d-r_3)}\right\};$$

der

$$\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_8} = \frac{r}{s^2-(d+r)^2} = \frac{r}{(s+d+r)(s-d-r)},$$

$$\frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_7} = \frac{r_1}{s^2-(d+r)^2} = \frac{r_1}{(s+d+r)(s-d-r)},$$

$$\frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_6} = \frac{r_2}{s^2-(d+r)^2} = \frac{r_2}{(s+d+r)(s-d-r)},$$

$$\frac{1}{\varrho_4} + \frac{1}{\varrho_5} = \frac{r_3}{s^2-(d+r)^2} = \frac{r_3}{(s+d+r)(s-d-r)}.$$

Bemerkt man, dass

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

ist, so erhält man hieraus die Relation

$$\frac{1}{\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_8}} = \frac{1}{\frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_7}} + \frac{1}{\frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_6}} + \frac{1}{\frac{1}{\varrho_4} + \frac{1}{\varrho_5}}$$

oder

$$\frac{\varrho_1 \varrho_8}{\varrho_8 - \varrho_1} = \frac{\varrho_2 \varrho_7}{\varrho_2 + \varrho_7} + \frac{\varrho_3 \varrho_6}{\varrho_3 + \varrho_6} + \frac{\varrho_3 \varrho_5}{\varrho_4 + \varrho_5}.$$

Endlich findet auch noch die folgende bemerkenswerthe Relation Statt:

$$\frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_5} + \frac{1}{\varrho_6} + \frac{1}{\varrho_7} + \frac{1}{\varrho_8}$$

oder

$$-\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4} = \frac{1}{\varrho_5} + \frac{1}{\varrho_6} + \frac{1}{\varrho_7} + \frac{1}{\varrho_8}.$$

Wenn der Winkel bei D in dem gegebenen Dreiecke D ein rechter Winkel ist, so ist

$$\varrho_1 = 0,$$
$$\varrho_2 = 0,$$
$$\frac{1}{\varrho_3} = \frac{1}{s_2} + \frac{r_2}{2s_2(s_2 + a - r_2)},$$
$$\frac{1}{\varrho_4} = \frac{1}{s_3} + \frac{r_3}{2s_3(s_3 + a - r_3)},$$
$$\varrho_5 = 0,$$
$$\varrho_6 = 0,$$
$$\frac{1}{\varrho_7} = -\frac{1}{s_1} + \frac{r_1}{2s_1(s_1 - a + r_1)},$$
$$\frac{1}{\varrho_8} = \frac{1}{s} - \frac{r}{2s(s + a + r)}.$$

Wenn das gegebene Dreieck DEF gleichseitig ist, so

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2a},$$

$$\frac{1}{\varrho_2}=\frac{1}{\varrho_3}=\frac{1}{\varrho_4}=\frac{3\sqrt{3}+1}{2a},$$
$$\frac{1}{\varrho_5}=\frac{1}{\varrho_6}=\frac{1}{\varrho_7}=\frac{3\sqrt{3}-1}{2a},$$
$$\frac{1}{\varrho_8}=\frac{3-\sqrt{3}}{2a}.$$

Also ist in diesem Falle

$$\varrho_1=\frac{2a}{3+\sqrt{3}}=\tfrac{1}{2}(3-\sqrt{3})\,a,$$
$$\varrho_8=\frac{2a}{3-\sqrt{3}}=\tfrac{1}{2}(3+\sqrt{3})\,a;$$

olglich $\varrho_1+\varrho_8=2a=$ der Seite des gegebenen Dreiecks *DEF*.

Ich wiederhole, dass ich einer ausführlichen, mit möglichster leganz und Allgemeinheit durchgeführten Untersuchung über iesen Gegenstand gern einen Platz in dem Archive einräumen erde, da mir die bisherigen Untersuchungen noch Manches zu ünschen übrig zu lassen scheinen.

Anzahl der Diagonalen eines Polyeders.

Die Anzahl der

3ecke, 4ecke, 5ecke, 6ecke, 7ecke, u. s. w,

elche ein Polyeder begränzen, sei respective

$$n_3,\ n_4,\ n_5,\ n_6,\ n_7,\ \text{u. s. w.}$$

Bezeichnen wir nun die Anzahl aller Seitenflächen des Polyeers durch F, so ist natürlich

$$1)\quad F=n_3+n_4+n_5+n_6+n_7+\ldots.$$

Die Anzahl der Seiten aller Seitenflächen ist

$$3n_3+4n_4+5n_5+6n_6+7n_7+\ldots.$$

Weil nun jede Kante des Polyeders zwei Seitenflächen als Seite angehört, so ist offenbar die doppelte Anzahl der Kanten der Anzahl der Seiten aller Seitenflächen gleich, d. h. wenn K die Anzahl der Kanten bezeichnet, so ist

$$2)\quad 2K=3n_3+4n_4+5n_5+6n_6+7n_7+\ldots.$$

Die Anzahl der Diagonalen unsers Polyeders, welche wir durch V bezeichnen wollen, ist offenbar gleich der Anzahl aller die Ecken des Polyeders unter einander verbindenden Linien, weniger der Anzahl aller Kanten und der Anzahl der Diagonalen aller Seitenflächen des Polyeders.

Bezeichnet E die Anzahl der Ecken, so ist $\frac{E(E-1)}{2}$ die A
zahl aller die Ecken des Polyeders unter einander verbindend
geraden Linien.

Die Anzahl der Diagonalen aller Seitenflächen des Polyede
ist nach einem bekannten Satze der ebenen Geometrie

$$\frac{3.0}{2}n_3+\frac{4.1}{2}n_4+\frac{5.2}{2}n_5+\frac{6.3}{2}n_6+\frac{7.4}{2}n_7+\ldots.$$

Hiernach, in Verbindung mit 2), ist also

$$3)\quad N=\frac{E(E-1)}{2}-\frac{3.0}{2}n_3-\frac{4.1}{2}n_4-\frac{5.2}{2}n_5-\frac{6.3}{2}n_6-\ldots.$$
$$-\frac{3}{2}n_3-\frac{4}{2}n_4-\frac{5}{2}n_5-\frac{6}{2}n_6-\ldots.$$
$$=\frac{E(E-1)}{2}-\tfrac{1}{2}(1.3n_3+2.4n_4+3.5n_5+4.6n_6+\ldots.)$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$4)\quad M=1.3n_3+2.4n_4+3.5n_5+4.6n_6+\ldots.$$

gesetzt und auf beiden Seiten der Gleichung mit 8 multiplicirt wir

$$5)\quad 8N=2E(2E-2)-4M.$$

Nach dem Euler'schen Satze ist aber

$$E+F=K+2,$$

folglich

$$E=K-F+2,\quad 2E=2K-2F+4.$$

Weil nun nach 1) und 2) offenbar

$$2K-2F=n_3+2n_4+3n_5+4n_6+\ldots$$

ist, so ist, wenn wir der Kürze wegen

$$6)\quad L=n_3+2n_4+3n_5+4n_6+\ldots.$$

setzen,

$$2E=L+4,\quad 2E-2=L+2.$$

Also ist nach 5)

$$7)\quad 8N=(L+2)(L+4)-4M.$$

Dies führt uns zu dem folgenden Satze:

Wenn die Anzahl der

3ecke, 4ecke, 5ecke, 6ecke, 7ecke, ...

elche ein Polyeder begränzen, respective

$$n_3,\ n_4,\ n_5,\ n_6,\ n_7,\ \ldots.$$

st, und der Kürze wegen

$$L = n_3 + 2n_4 + 3n_5 + 4n_6 + 7n_7 + \ldots.,$$
$$M = 1.3n_3 + 2.4n_4 + 3.5n_5 + 4.6n_6 + \ldots.$$

gesetzt, die Anzahl der Diagonalen des Polyeders aber durch N bezeichnet wird, so ist jederzeit

$$8N = (L+2)(L+4) - 4M.$$

(Dem Wesentlichen nach aus einem Aufsatze des Herrn Henri Binder in den Nouvelles Annales de Mathématiques von Terquem und Gerono. Décembre. 1845. p. 656. entlehnt.)

Schon Thl. VII. S. 107. ist bemerkt worden, dass die französischen Kammern eine Sammlung und Herausgabe der Schriften Fermat's beschlossen haben. In dem Journal des Savants. Septembre 1839. Mai 1841. Novembre 1845. hat Libri drei Aufsätze sur la vie et les manuscrits de Fermat geliefert. Aus dem neuesten dieser Aufsätze theile ich den Lesern des Archivs folgende Fermat's Leben betreffende Stelle mit.

Non-seulement les écrits de Fermat ont été pour la plupart égarés, mais sa biographie même était encore à faire dans ces derniers temps. Excessivement modeste, ne voulant donner aucune publicité à ses travaux, vivant en province et souvent à la campagne, Fermat ne fut apprécié d'abord que par quelques esprits d'élite, qui, à Paris, à Londres, à Florence, admiraient ses belles découvertes scientifiques, et il mourut presque ignoré au milieu des siens. Aussi, jusqu'à ces derniers temps, on n'était d'accord ni sur l'époque de sa naissance ni sur celle de sa mort, et l'on peut dire que l'on ignorait à la fois la ville où il était né, celle où il avait cessé de vivre, et les principales circonstances de sa vie. Nous devons surtout aux infatigables recherches de M. Taupiac, avocat à Beaumont-de-Lomagne, la connaissance de plusieurs documents qui peuvent faire cesser l'incertitude dans laquelle on était à cet égard.

Sans être appuyée sur aucun fait positif, la tradition voulait que Fermat fût né à Toulouse, ville où il résidait habituellement, et cette opinion était adoptée généralement par les biographes, lorsque M. Taupiac, guidé par des renseignements et des traditions qu'il avait recueillis sur les lieux, entreprit, dans les archives de la ville de Beaumont, des recherches qui paraissent établir, à notre avis, que Fermat est né dans cette localité, au mois d'août 1601, de Dominique Fermat et de Françoise Cazeneuve, et qu'il avait été baptisé le 20 du même mois. Les Fermat étaient marchands de cuirs, et Dominique, père du géomètre, possédait des biens considérables. On peut lire, dans la *France méridionale* du 16. avril 1844, un article fort intéressant, dans lequel M. Taupiac, à l'aide d'un grand nombre de documents qu'il a découverts, suit pas à

pas la vie si tranquille de Fermat, et nous le montre avoca
bord, puis ensuite conseiller à la Chambre des requêtes du
ment de Toulouse. L'arrêt qui investit Fermat de ses fonc
est du 14. mai 1631. Quelques jours plus tard, ce jeune magi
qui était déjà un illustre géomètre, épousait Louise de Long
d'un conseiller au même parlement. Nous ne reproduirons pa
les recherches de M. Taupiac relatives à la naissance des en
de Fermat, et aux fréquents voyages que celui-ci fit à Beau
Nous aimons mieux dire un mot d'une difficulté qui nous
arrêté d'abord nous-même, difficulté qui ne semble pas s'être
sentée à l'esprit de M. Taupiac, et qui, si elle n'était pas l
pourrait jeter une grande incertitude sur tout ce qu'il a avanc
sujet de Fermat.

L'extrait de baptême, qui a été découvert par M. Taupia
parle de *Pierre Fermat*, sans la particule nobilière *de*, qui
cède le nom de cet illustre géomètre dans les *Opera varia*,
que dans le *Diophante* publié en 1670 avec des notes de lui.
au XVIIe siècle, cette particule ne se prenait pas à volonté, co
cela est arrivé si fréquemment depuis, et il nous serait impos
d'admettre que *Pierre de Fermat*, conseiller au parlement de
louse, est le même individu qui avait été baptisé à Beaumont
le nom de *Pierre Fermat*, s'il n'y avait pas quelque moyen
de constater l'identité. Heureusement d'autres documents,
M. Pelleport, archiviste de la cour royale de Toulouse, a tro
dans les papiers de l'ancien parlement, et dont nous devon
communication à l'obligeance de M. Martin, député de la Ha
Garonne, nous permettent d'expliquer cette difficulté. Dans l'
du 14. mai 1631. le nouveau conseiller est appelé *Pierre Fer*
et, dans un autre arrêt du 30. décembre 1638. on voit le m
conseiller, sur l'identité duquel il ne peut s'élever aucun do
appelé officiellement *de Fermat*. C'est probablement dans ce
tervalle de temps que ce grand mathématicien, auquel son
mission au parlement donnait ce qu'on appelait la *noblesse de r*
commença à faire usage d'un particule qui n'existait pas dans
acte de baptême. Nous ignorons si, après cette admission, il
anobli et rendu apte, par un arrêt spécial, à faire précéder d
son nom, ou bien si une telle addition s'opéra seulement par s
de la nouvelle charge dont il était revêtu. Quoi qu'il en soit
est bon d'ajouter que, même dans la suite, on trouve son
écrit tantôt de l'une, tantôt de l'autre manière **).

---

*) Voici cet acte, qui n'est pas signé: „Pierre, fils de Domini
Fermat, bourgeois et segond consul de la ville de Beaumont, a
baptisé le 20e aoust 1601. Parrin, Pierre Fermat, marchand et
dudit Dominique; marrine, Jehanne Cazonuve; et moi." A la suite
autre acte qui suit on lit cette signature: „Dumas Vic."

**) Ainsi, par exemple, la dédicace de Saporta, placée à la suite
Traité de la mesure des eaux courantes, par Castelli (Castres, 1
in 4°, p. 59), et en tête d'un ouvrage sur la même matière par Te
celli, est adressée „A Monsieur Fermat, conseiller du roy au parlem
de Tolose."

XX.

Ueber die beste Construction horizontal belasteter Gewölbe.

Von dem

Herrn Reallehrer Brenner

zu Tuttlingen im Königreich Würtemberg.

Ein Gewölbe sei durch eine horizontal geebnete und in Bezug auf Dichtigkeit homogene Last bedeckt. Es soll nun das Gesetz, welches die Wölbung oder die durch den vertikalen und senkrechten Durchschnitt des Gewölbes dargestellte Curve befolgt, für den Fall vollständigen Gleichgewichts, so wie noch die übrigen, hieher gehörigen, wichtigsten Momente entwickelt werden.

Nehmen wir die Abscissenaxe AX (Taf. IV. Fig. 1.) horizontal und die Ordinatenaxe AY vertikal, so wird fraglicher Durchschnitt, den wir uns durch die Abscissenaxe, die Horizontalebene der Belastung, so wie durch zwei auf den sogenannten Widerlagern des Gewölbes ruhende Vertikalen begrenzt denken, ein rechtwinkliges Parallelogramm bilden. Es ist nun klar, dass wir uns jeden Theil des belasteten Gewölbes als vollständig fest und vermittelst der Kräfte, die auf denselben wirken, im Gleichgewicht sich befindend, vorstellen können. Einen solchen Theil stelle $ABEM$ vor, welcher durch die Gewölbskurve $AM=s$, die Horizontale $BE=AF=x$ und die Vertikalen $AB=b$ und $ME=b-y$, wo b die Höhe der Belastung ist, begrenzt ist. $ABEM$ befindet sich vermittelst dreier Kräfte im Gleichgewicht, nemlich

1) vermittelst des vom übrigen Theile des Gewölbes herrührenden Druckes D in M nach der Tangente und Richtung Mt;

2) vermittelst des vom Widerlager in A ausgeübten Druckes a nach der Tangente und Richtung At;

3) vermittelst des Gewichtes von $ABEM$, das wir durch P vorstellen wollen und in seinem Schwerpunkte vereinigt denken können.

Ersetzen wir D und a durch zwei gleiche nach Mt und At gerichtete Kräfte, so schneiden sie sich in t, und wählt man t als

Angriffspunkt, so folgt daraus, dass der Schwerpunkt von P u
t in derselben Vertikale liegen muss. Es ergeben sich somit f
den Punkt t folgende zwei Gleichgewichts-Gleichungen:

$$a\cos\vartheta - D\frac{dx}{ds} = 0,$$

$$a\sin\vartheta - P - D\frac{dy}{ds} = 0\ ^*),$$

wenn man den constanten Winkel $tAX = \vartheta$ setzt.

Eliminiren wir den veränderlichen Druck D, so ergibt si
$P = a\sin\vartheta - a\cos\vartheta\,\partial y$ oder, da P offenbar der Fläche ABt
proportional ist:

$$(L) \qquad p(bx - \int y\,dx) = a\sin\vartheta - a\cos\vartheta\,\partial y,$$

wo p = dem Gewichte der Volumen-Einheit der Belastung
und wo das Integral $\int y\,dx$ mit $x = 0$ zu beginnen hat.

Differenziiren wir in Beziehung auf x, so kommt

$$p(b - y) = -a\cos\vartheta\,\partial^2 y,$$

und wenn wir $\frac{p}{a\cos\vartheta} = A$ und $y - b = z$ setzen:

$$(M) \qquad \partial^2 z = Az.$$

Das Integral dieser linearen Differenzial-Gleichung ist, we
wir z wieder durch $y - b$ ersetzen,

$$y - b = C\cos(x\sqrt{-A}) + C_1\sin(x\sqrt{-A}),$$

wo C und C_1 die beiden Constanten sind.

Für $x = 0$ hat man $y = 0$, daher $C = -b$.

Die Constante C_1 bestimmt sich aber aus (L) oder auch
der Bedingung $[\partial y]_0 = \operatorname{tg}\vartheta$, wo $[\partial y]_0$ der Werth von ∂y ist, w
man $x = 0$ setzt, und so erhalten wir die Gleichung

$$(N) \qquad y = b - b\cos(x\sqrt{-A}) + \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}}\sin(x\sqrt{-A}).$$

Ob unsere Curve die Abscissenaxe ausser dem Anfangspun
A in noch weitern Punkten trifft, ergibt sich, wenn man y
setzt und die Werthe von x entwickelt. Man hat

---

*) Zu bemerken ist, dass wir uns bald des Differenzial-Zeich
d, bald, nach Ohm, des Ableitungszeichens ∂ bedienen.

$$b[1-\cos(x\sqrt{-A})]+\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}}\sin(x\sqrt{-A})=0,$$

der

$$\sin(\tfrac{x}{2}\sqrt{-A})\,[b\sin(\tfrac{x}{2}\sqrt{-A})+\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}}\cos(\tfrac{x}{2}\sqrt{-A})]=0,$$

welcher Gleichung genügt wird:

1) durch $\sin(\frac{x}{2}\sqrt{-A})=0$, d. h.

$$e^{-\frac{x}{2}\sqrt{A}}-e^{\frac{x}{2}\sqrt{A}}=0,$$

oder, wenn man mit $e^{\frac{x}{2}\sqrt{A}}$ multiplicirt, $1=e^{x\sqrt{A}}$, woraus $x\sqrt{A}\log 1=0$, also $x=0$, wodurch eben der Coordinaten-Anfang angezeigt wird;

2) durch $b\sin(\frac{x}{2}\sqrt{-A})+\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}}\cos(\frac{x}{2}\sqrt{-A})=0.$

Geht man auch hier auf die Exponentialgrössen über, so kommt

$$b(e^{-\frac{x}{2}\sqrt{A}}-e^{\frac{x}{2}\sqrt{A}})+\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}}(e^{\frac{x}{2}\sqrt{A}}+e^{-\frac{x}{2}\sqrt{A}})=0.$$

Multiplicirt man mit $e^{\frac{x}{2}\sqrt{A}}$, entwickelt $e^{x\sqrt{A}}$, und logarithmirt, so kommt

$$x=\frac{1}{\sqrt{A}}\log\left(\frac{b\sqrt{A}+\operatorname{tg}\vartheta}{b\sqrt{A}-\operatorname{tg}\vartheta}\right)$$

als zweiter Durchschnittspunkt.

Daraus folgt, dass die Ordinate y eines Maximums fähig ist. Man hat für diesen Zweck

$$\partial y=b\sqrt{-A}\sin(x\sqrt{-A})+\operatorname{tg}\vartheta\cos(x\sqrt{-A})=0,$$

und durch eine ganz ähnliche Entwickelung wie oben in 2) oder auch durch blosse Ansicht von 2) ergibt sich

$$x=\frac{1}{2\sqrt{A}}\log\left(\frac{b\sqrt{A}+\operatorname{tg}\vartheta}{b\sqrt{A}-\operatorname{tg}\vartheta}\right),$$

gerade halb so gross als das x des 2ten Durchschnittspunktes der Curve mit der Abscissenaxe, wie zu erwarten stand.

Meistens ist statt des Druckes a und des Winkels ϑ die Abscisse des zweiten Durchschnittspunktes der Curve mit der Abscissen-

axe, oder die Weite n des Gewölbes und dessen Höhe h, d das Maximum von y gegeben, und es kommt nun darauf an, a ϑ oder auch A und ϑ aus n und h zu entwickeln. Wir ha zu gleicher Zeit

$$(O) \qquad 0 = b[1 - \cos(n\sqrt{-A})] + \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}} \sin(n\sqrt{-A}).$$

$$(P) \qquad h - b = -b\cos(\tfrac{n}{2}\sqrt{-A}) + \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}} \sin(\tfrac{n}{2}\sqrt{-A}).$$

Die erstere Gleichung (O) verwandelt sich in

$$0 = b\sin^2(\tfrac{n}{2}\sqrt{-A}) + \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}} \sin(\tfrac{n}{2}\sqrt{-A})\cos(\tfrac{n}{2}\sqrt{-A}),$$

woraus

$$\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}} = -\frac{b\sin(\frac{n}{2}\sqrt{-A})}{\cos(\frac{n}{2}\sqrt{-A})}.$$

Hiedurch geht (P) über in

$$\frac{b-h}{b} = \cos(\tfrac{n}{2}\sqrt{-A}) + \frac{\sin^2(\frac{n}{2}\sqrt{-A})}{\cos(\frac{n}{2}\sqrt{-A})},$$

welches gibt

$$\cos(\tfrac{n}{2}\sqrt{-A}) = \frac{b}{b-h},$$

oder, wenn man auf Exponentialgrössen übergeht und in Be auf $e^{\frac{n}{2}\sqrt{A}}$ auflöst:

$$e^{\frac{n}{2}\sqrt{A}} = \frac{b \pm \sqrt{h(2b-h)}}{b-h}.$$

Die Grösse $e^{\frac{n}{2}\sqrt{A}}$ ist aber nothwendig positiv und grös als 1.

Der Ausdruck

$$\frac{b \pm \sqrt{h(2b-h)}}{b-h} = \frac{b-h}{b \mp \sqrt{h(2b-h)}}$$

erfüllt aber bei jedem (+ oder —) Zeichen die erstere Bedingu

Denn da der Natur der Aufgabe gemäss $b > h$, so setze man $= h + l$, woraus $2b = 2h + 2l$ und $2b - h = h + 2l = b - l + 2l$ $= b + l$ und $h = b - l$, demnach

$$\sqrt{h(2b-h)} = \sqrt{b^2 - l^2},$$

welche Grösse kleiner ist als b. Die zweite Bedingung aber erfordert, dass der Zähler grösser ist als der Nenner, und diess ist nur möglich, wenn man das positive Zeichen nimmt. Denn da $b > h$, so ist $2b - h > h$, daher $\sqrt{h(2b-h)} > h$.

Würde man das negative Zeichen nehmen, so bliebe der Zähler kleiner als der Nenner. Es ist demnach

$$\sqrt{A} = \log\left[\frac{b+\sqrt{h(2b-h)}}{b-h}\right] \text{ und } A = \left\{\frac{2}{n}\log\left[\frac{b+\sqrt{h(2b-h)}}{b-h}\right]\right\}^2.$$

Zur Abkürzung werden wir uns fast immer des, nun bekannten, Buchstabens A bedienen. Die Gleichung

$$\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}} = -\frac{b\sin(\frac{n}{2}\sqrt{-A})}{\cos(\frac{n}{2}\sqrt{-A})}$$

führt uns nun aber

$$\operatorname{tg}\vartheta = b\sqrt{A}.\frac{e^{\frac{n}{2}\sqrt{A}} - e^{-\frac{n}{2}\sqrt{A}}}{e^{\frac{n}{2}\sqrt{A}} + e^{-\frac{n}{2}\sqrt{A}}} = b\sqrt{A}.\frac{e^{n\sqrt{A}}-1}{e^{n\sqrt{A}}+1}.$$

Allein wir haben

$$e^{n\sqrt{A}} = e^{\log\left[\frac{b+\sqrt{h(2b-h)}}{b-h}\right]^2} = \left[\frac{b+\sqrt{h(2b-h)}}{b-h}\right]^2,$$

und desswegen

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{2b}{n}\log\left[\frac{b+\sqrt{h(2b-h)}}{b-h}\right].\frac{\left[\frac{b+\sqrt{h(2b-h)}}{b-h}\right]^2-1}{\left[\frac{b+\sqrt{h(2b-h)}}{b-h}\right]^2+1}$$

$$= \frac{2}{n}\sqrt{h(2b-h)}\log\left[\frac{b+\sqrt{h(2b-h)}}{b-h}\right].$$

Aus der Gleichung $A = \frac{p}{a\cos\vartheta}$ haben wir $a = \frac{p}{A}.\frac{1}{\cos\vartheta}$.

Während man nun die Formel hat $\frac{1}{\cos B} = \sqrt{1+\operatorname{tg}B^2}$, so erhält sich

$$\text{II.}\quad a = \frac{p}{A}\sqrt{1+A\left(b\,.\,\frac{e^{n\sqrt{A}}-1}{e^{n\sqrt{A}}+1}\right)^2}$$

$$= \frac{p}{A}\sqrt{1+\frac{4h}{n^2}(2b-h)\left\{\log\left[\frac{b+\sqrt{h(2b-h)}}{b-h}\right]\right\}^2}.$$

Vermittelst der Bestimmungen

$$\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}} = -\frac{b\sin(\frac{n}{2}\sqrt{-A})}{\cos(\frac{n}{2}\sqrt{-A})} \quad \text{und} \quad \cos(\tfrac{n}{2}\sqrt{-A}) = \frac{b}{b-h}$$

sind wir im Stande, der Gleichung (N) unserer Curve folge Form zu geben:

$$\text{III.}\quad a)\ y = b-(b-h)\cos[(\tfrac{n}{2}-x)\sqrt{-A}],$$

$$b)\ y = b-\tfrac{1}{2}(b-h)\,[e^{(\frac{n}{2}-x)\sqrt{A}} + e^{-(\frac{n}{2}-x)\sqrt{A}}],$$

welche letztere Form zur Auswerthung der Ordinaten geeignet

Würden wir (was wir jedoch hier nur bemerkungsweise den Anfang der Coordinaten in den Durchschnittspunkt des Ma mums h mit der Abscissenaxe verlegen, so hätten wir $x = x'$ zu setzen, wenn wir die neuen Abscissen mit x' bezeichnen III. b) ginge über in

$$y = b-\tfrac{1}{2}(b-h)\,(e^{x'\sqrt{A}} + e^{-x'\sqrt{A}}),$$

eine Gleichung, welche ganz unverändert bleibt, wenn man in $-x'$ umwandelt. Man wird sich daher überzeugen, dass Maximum von y die Curve in zwei congruente Zweige Auch ist es nicht schwer, einzusehen, dass sich die Curve ihren beiden Zweigen auf der negativen Seite (nicht Rich der Abscissenaxe ins Unendliche fortsetzt. Auch könnte der Gleichung III., wenn man statt $\sqrt{A}$ dessen in n und h fundenen Ausdruck setzen wollte, eine andere Form ertheilen zwar vermittelst der Formel $e^{m\log B} = B^m$.

Beschäftigen wir uns nun mit Aufsuchung des Druckes, ein Gewölbstein auf den andern ausübt. Wir haben oben Druck $= D$ gesetzt, und aus der Gleichung

$$a\cos\vartheta - D\frac{dx}{ds} = 0$$

ergibt sich in Verbindung mit $\frac{p}{a\cos\vartheta} = A$:

$$D = \frac{p}{A}\sqrt{1+\partial y^2}.$$

Wir haben

$$\partial y = -(b-h)\sqrt{-A}\,\sin\left[\left(\frac{n}{2}-x\right)\sqrt{-A}\right]$$

$$= (b-h)\sqrt{-A}\,\sin\left[\left(x-\frac{n}{2}\right)\sqrt{-A}\right],$$

d erhalten

$$\text{IV.}\quad D = \frac{p}{A}\sqrt{1-A(b-h)^2\sin^2\left[\left(x-\frac{n}{2}\right)\sqrt{-A}\right]}$$

$$= \frac{p}{A}\sqrt{1+A(b-h)^2\left(\frac{e^{\left(\frac{n}{2}-x\right)\sqrt{A}} - e^{\left(x-\frac{n}{2}\right)\sqrt{A}}}{2}\right)^2}.$$

Sowohl für $x=0$, als auch für $x=n$, finden wir nach kurzer ntwicklung den oben schon erhaltenen Druck a auf die Widerger, während man für $[\partial y]_0 = \operatorname{tg}\vartheta$ den ebenfalls schon oben wonnenen Werth 1., allein für $[\partial y]_n$, d. h. für die Richtung des rucks auf das zweite Widerlager, zwar denselben Ausdruck, jeh mit negativem Zeichen erhält. Der stumpfe Winkel, den e letztere Richtung mit der Abscissenaxe macht, ist daher $0^0-\vartheta$, so dass dieselbe mit der erwähnten Axe den Neigungsnkel $180^0-(180^0-\vartheta)=\vartheta$, also denselben Winkel macht, den ch die Drucksrichtung des ersten Widerlagers mit ihr macht, s übrigens zu erwarten stand.

Von besonderer Wichtigkeit ist endlich noch die Bestimmung s cubischen Inhaltes des Gewölbes. Bekanntlich findet man esen Inhalt für cylindrische Gewölbe im Allgemeinen, wenn man n vertikalen und senkrechten Durchschnitt derselben mit ihrer inge multiplicirt. Es kommt daher zunächst darauf an, diesen rtikaldurchschnitt zu bestimmen. Derselbe ist offenbar gleich m Flächeninhalt der äusseren Curve, minus dem der innern, ischen ihren Abscissen genommen. Um den ersteren zu finden, heint die Gleichung der äusseren Curve nöthig zu sein. Diese ssere Curve aber ist dadurch entstanden, dass man diejenigen nkte aller verlängerten Normalen der innern, die von dieser ets gleich weit abstehen, mit einander verbindet, oder durch den dpunkt einer Geraden, die, der Gewölbscurve stets normal, mit rem andern Endpunkt auf dieser dahingleitet. Auch ist klar, ss jeder fixirte Punkt einer so dahingleitenden Normale in Verdung der erzeugenden Gewölbscurve den Durchschnitt des Geölbes darstellen kann. Zieht man also durch den beliebigen nkt M oder (x, y) der Erzeugungscurve eine Normale, welche e erzeugte Curve im Punkte m schneiden mag, so stellt Mm e constante Verlängerung der Normale vor. Wir setzen $Mm=r$, wie die Coordinaten des Punktes m gleich x' und y'? Nach facher Betrachtung wird man sich bald überzeugen, dass

$$x' = x - \frac{r\,dy}{ds} \text{ oder } x' = x - \frac{r\partial y}{\sqrt{1-\partial y^2}},$$

$$y' = y + \frac{r\,dx}{ds} \text{ oder } y' = y + \frac{r}{\sqrt{1+\partial y^2}}$$

ist, welche Gleichungen, nebst der Gleichung der Erzeugungscurve $y = f(x)$ dazu dienen, x und y zu eliminiren, so dass dann eine Gleichung zwischen x' und y' resultirt, welche die der erzeugten Curve ist. Diese Eliminationen sind aber in den meisten Fällen ausserordentlich schwierig und führen zu verwickelten schwer zu behandelnden Gleichungen. Für ein Glück dürfen wir es daher halten, dass es einen weit einfachern Weg gibt, unsern Zweck zu erreichen, ein Weg, der uns nicht nur die Quadratur, sondern zu gleicher Zeit auch die Rectification unserer erzeugten Curve sogar ganz im Allgemeinen (abgesehen von unserer oben behandelten Geywölbs-Curve) zeigt.

Es ist nemlich klar, dass die Krümmungshalbmesser beider Curven einander decken und dass derjenige der erzeugten Curve um r grösser ist als der der erzeugenden, so wie, dass die unendlich kleinen Bogen ∂s und $\partial s'$ zwischen zwei auf einander folgenden Normalen oder Krümmungshalbmessern einander parallel sind. Daher ist

$$\frac{\partial s^3}{\partial x\,\partial^2 y - \partial y\,\partial^2 x} : \frac{\partial s^3}{\partial x\,\partial^2 y - \partial y\,\partial^2 x} + r = \partial s : \partial s',$$

woraus

$$r : \frac{\partial s^3}{\partial x\,\partial^2 y - \partial y\,\partial^2 x} = \partial s' - \partial s : \partial s;$$

ferner

$$\partial (s' - s) = r\,\frac{\partial x\,\partial^2 y - \partial y\,\partial^2 x}{\partial s^2}.$$

Die Gleichung der Normale aber ist

$$y'' - y = -\frac{\partial x}{\partial y}(x'' - x),$$

wenn x'' und y'' die Coordinaten der Normale selbst vorstellen während, wie immer, (x, y) einen beliebigen Punkt in der Erzeugungscurve selbst bezeichnet. Setzt man nun den Winkel, den die Normale mit der Abscissenaxe macht, gleich w, so ist

$$\operatorname{tg} w = -\frac{\partial x}{\partial y}, \quad \partial(\operatorname{tg} w) = \frac{\partial w}{\cos w^2} = -\frac{\partial y\,\partial^2 x - \partial x\,\partial^2 y}{\partial y^2},$$

und da

$$\cos w^2 = \frac{\partial y^2}{\partial s^2},$$

ist

$$\partial w = \frac{\partial x\,\partial^2 y - \partial y\,\partial^2 x}{\partial s^2};$$

nd so hat man

$$\partial (s' - s) = r\partial w,$$

oraus

$$s' - s = rw + C,$$

elches den Ueberschuss des Bogens s' über s vorstellt, wofern as Integral $rw + C$ zwischen den gehörigen Grenzen genommen ird. Zwischen diesen Grenzen stellt aber w den von den äussern Normalen eingeschlossenen Winkel dar und rw ist der von iesem Winkel eingeschlossene Kreisbogen, beschrieben mit dem adius r. Es ergibt sich daher der Satz:

Man findet den Bogen der nach oben beschriebener Art erzeugten Curve, wenn man den entsprechenden Bogen der Erzeugungscurve um denjenigen Kreisbogen vermehrt, welcher zwischen dem von den äussersten Normalen eingeschlossenen Winkel mit dem Radius gleich dem Abstand beider Curven beschrieben wird.

Ferner ist der Satz bekannt, dass der Inhalt einer Fläche, die eine Gerade so in einer Ebene beschreibt, dass sie in ihrem Mittelpunkt stets normal auf einer Curve dahingleitet, gleich ist dem Product aus dieser Geraden und der Curve. Diess ist offenbar der Fall mit unserer Erzeugungslinie r und der Curve, die ihr Mittelpunkt beschreibt. Allein, um diese Curve zu erhalten, darf man den Bogen s der Erzeugungscurve nur um den Kreisbogen $\frac{rw}{2}$ vermehren, so dass der von r beschriebene Flächenraum sein wird $r(s + \frac{r}{2}w)$, wofern w der zwischen den äussersten Normalen genommene Winkel ist. Diess auf unsern vorliegenden Fall angewendet, haben wir nur noch den Bogen s, so wie den Winkel w zu bestimmen. Man hat

$$\partial s = \sqrt{1 + \partial y^2} = \sqrt{1 - A(b-h)^2 \sin^2[(x - \tfrac{n}{2})\sqrt{-A}]},$$

her

$$s = \frac{1}{\sqrt{-A}} \int \sqrt{1 - c^2 \sin t^2}\,.\,dt,$$

enn wir $A(b-h)^2 = c^2$ und $(x - \frac{n}{2})\sqrt{-A} = t$ setzen.

So sind wir also auf ein elliptisches Integral gestossen, und wir haben

$$s=\frac{1}{\sqrt{-A}}\left\{\begin{array}{l} t-\frac{1}{2}c^2\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{2^2}\sin 2t\right) \\ -\frac{1.1}{1.2}c^4\left(\frac{1.3}{2.4}t-\frac{4}{2^4}\sin 2t+\frac{1}{2^4.2}\sin 4t\right) \\ -\frac{1.1.3}{2.4.6}c^6\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}t-\frac{15}{2^6}\sin 2t+\frac{6}{2^6.2}\sin 4t-\frac{1}{2^6.3}\sin 6t\right) \\ -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}(\mathrm{C}$$

welches Integral noch zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=$ oder zwischen $t=-\frac{n}{2}\sqrt{-A}$ und $t=+\frac{n}{2}\sqrt{-A}$ zu nehmen ist, so dass also bloss die rechte Seite, mit Weglassung der Constante, verdoppelt werden darf und t durch $\frac{n}{2}\sqrt{-A}$ ersetzt werden muss. Verwandelt man zuletzt die Sinus in Exponentialfunctionen, und vollendet die angezeigte Multiplication mit $\frac{1}{\sqrt{-A}}$, so wird die imaginäre Form verschwinden. Dieses Integral erweist sich übrigens als sehr brauchbar, indem es für die gewöhnlichen Fälle sehr fallend ist. Bemerkt mag noch werden, dass man dem c folgende Form geben kann:

$$c=\frac{2(b-h)}{n}\log\left[\frac{b+\sqrt{h(2b-h)}}{b-h}\right].$$

Endlich wird man bald finden, dass $w=2\vartheta$, so dass sich der gesuchte Durchschnitt gleich

$$\text{V.}\quad rs+\frac{r^2\pi\vartheta}{180}$$

findet, wofern der Winkel in Graden angegeben ist.

So leisten also die mit römischen Nummern bezeichneten Resultate alles, was in Bezug auf die horizontal belasteten Gewölbe praktisch wissenswerth ist.

XXI.

Ueber plagiographische Projection.

Von dem

Herrn Professor Dr. Anger

in Danzig.

Wenn die unter einander parallelen Gesichtslinien mit der Projections-Ebene einen rechten Winkel bilden, so ist diese allein nicht ausreichend, sondern es muss die Projection auch noch auf eine andere Ebene, deren Lage gegen jene als bekannt vorausgesetzt wird, entworfen werden, falls man aus der Zeichnung die wahren Dimensionen des dargestellten Gegenstandes soll entnehmen können, und man hat bekanntlich, wenn die beiden Projections-Ebenen auf einander rechtwinklig stehen, die Methode der beschreibenden Geometrie. Wenn aber die unter einander parallelen Gesichtslinien mit der Projections-Ebene einen schiefen Winkel bilden, dessen Grösse gegeben ist, so reicht eine Projections-Ebene hin, um ein geometrisches Bild zu entwerfen, aus welchem sich die wahren Dimensionen des Gegenstandes erhalten lassen. Der einfachste Fall ist derjenige, in welchem der Winkel, den die Projectionsstrahlen mit der Projections-Ebene machen, ein halber Rechter ist. Diese Projections-Art, welche in der Fortification in Anwendung kommt, bietet auch in theoretischer Hinsicht einige nicht uninteressante Eigenschaften dar, weshalb eine Untersuchung dieses Gegenstandes mir nicht ganz überflüssig erscheint.

Poncelet erwähnt dieser Projections-Art in seinem: „Traité des propriétés projectives des figures“ in der Einleitung Pag. XXVIII. und XXIX., ohne sich auf den Gegenstand näher einzulassen.

Wenn wir im Folgenden die Theorie dieser Methode, welche wir die plagiographische Projection nennen, analytisch begründen, so hat die Ansicht, dass auch für den praktischen Gebrauch sich auf diese Weise gewisse leichte Vorschriften für die Entwerfung der Projectionen der krummen Oberflächen ergeben, welche dem Zeichner willkommener sein werden, als die Methoden, mittelst welcher man auf mühsamen geometrischen Wegen das Ziel erreicht, uns dabei vorgeschwebt. Auch in der gewöhnlichen beschreibenden Geometrie sind die Auflösungen gewisser Aufgaben für die wirkliche Anwendung oft viel zu mühsam und ungenau,

als dass es nicht wünschenswerth wäre, sie durch andere zu ersetzen, die jener Vorwurf nicht trifft. Dazu führt aber gewöhnlich die analytische Auffassung sehr leicht. Die beschreibende Geometrie ist in dieser Hinsicht noch einer Erweiterung fähig, welche dem Praktiker nützlich werden kann. Bei dieser Gelegenheit sei jedoch die Bemerkung gestattet, dass es keineswegs unsere Meinung ist, dass der Zeichner zugleich einige Stücke der Construction auch berechnen solle, gegen eine solche Vermischung des Geometrischen und Arithmetischen müssen wir uns entschieden erklären; das Gesagte bezieht sich hier nur auf die Nachweisung der Richtigkeit, nicht aber auf die Ausführung der Construction, welche unter keinen Umständen ihren geometrischen Character verlieren darf.

Zur Projections-Ebene nehmen wir die Ebene der xy, die Projectionsstrahlen nehmen wir mit der Ebene der xz parallel und, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt wird, den Neigungswinkel derselben mit der Projections-Ebene gleich 45° an.

Aufgabe 1. Man sucht die Gleichung für die plagiographische Projection einer krummen Linie, einfacher oder doppelter Krümmung, deren Gleichung gegeben ist.

Auflösung. Die krumme Linie sei allgemein durch die Gleichungen

$$y = \varphi x, \quad z = \psi x$$

gegeben.

Die Abscissen der gesuchten Projection mögen durch ξ, die Ordinaten durch η bezeichnet werden. Es kommt nun darauf an, die Gleichung zwischen ξ und η zu ermitteln. Man hat aber

$$\xi = x,$$

und erhält dann

$$\eta = y + z,$$

also ist

$$\eta = \varphi\xi + \psi\xi$$

die gesuchte Gleichung.

Wenn z. B. die zu projicirende Linie ein Kreis ist, dessen Ebene auf der Projections-Ebene senkrecht steht und mit der Ebene xz einen beliebigen Winkel bildet, und dessen Mittelpunkt der Einfachheit wegen im Anfangspunkte der Coordinaten liegen mag, so ist, wenn man den Radius mit r bezeichnet:

$$y = ax = \varphi x,$$
$$z = \sqrt{r^2 - (1+a^2)x^2} = \psi x,$$

also

$$\eta = a\xi + \sqrt{r^2 - (1+a^2)\xi^2}$$

oder

$$\eta^2 + (1+2a^2)\xi^2 - 2a\eta\xi = r^2,$$

die Gleichung einer Ellipse, deren Axen sich leicht ermitteln lassen.

Führt man nämlich neue Coordinaten ξ' und η' ein, so dass

$$\xi = \xi' \operatorname{Sin}\varphi - \eta' \operatorname{Cos}\varphi,$$
$$\eta = \xi' \operatorname{Cos}\varphi + \eta' \operatorname{Sin}\varphi$$

wird, so ergiebt sich, wenn man den Coefficienten von $\eta'\xi' = 0$ setzt, zur Bestimmung von φ die Gleichung

$$0 = -a \operatorname{Sin} 2\varphi + \operatorname{Cos} 2\varphi,$$

d. h.

$$\operatorname{Tang} 2\varphi = \frac{1}{a} = \operatorname{Cot} u = \operatorname{Tang}(90^0 - u),$$

mithin

$$\varphi = 45^0 - \frac{1}{2}u,$$

und man erhält als Gleichung der gesuchten Projection

$$\frac{\xi'^2}{r^2(1+\operatorname{Sin} u)} + \frac{\eta'^2}{r^2(1-\operatorname{Sin} u)} = 1.$$

Die halben Axen der Ellipse sind demnach:

$$r \operatorname{Cos}(45^0 - \frac{1}{2}u) \cdot \sqrt{2} \text{ und } r \operatorname{Sin}(45^0 - \frac{1}{2}u) \cdot \sqrt{2}.$$

Wenn der Fall eintritt, dass $u = 0$ ist, so wird die Ellipse ein Kreis, dessen Radius $= r$, und ist $u = 90^0$, so wird die Projection eine gerade Linie, welche in die Axe der y fällt und $= r\sqrt{2}$ ist.

Jede Ellipse kann demnach als die plagiographische Projection eines Kreises betrachtet werden, dessen Ebene auf der Projections-Ebene senkrecht steht. Bezeichnen nämlich $2a$ und $2b$ resp. die grosse und kleine Axe dieser Ellipse, so hat man zur Bestimmung von u und r die beiden Gleichungen

$$a = r \operatorname{Cos}(45^0 - \frac{1}{2}u)\sqrt{2},$$

$$b = r \operatorname{Sin}(45^0 - \frac{1}{2}u)\sqrt{2};$$

also

$$\text{Tang}(45^0 - \tfrac{1}{2}u) = \frac{b}{a}, \text{ und}$$

$$r = \frac{a}{\text{Cos}(45^0 - \frac{1}{2}u)\sqrt{2}} = \frac{b}{\text{Sin}(45^0 - \frac{1}{2}u)\sqrt{2}},$$

oder auch

$$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}u = \frac{a-b}{a+b}, \quad r = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}};$$

welche beide Ausdrücke sich besonders für die Construction eignen.

Der Inhalt dieser Ellipse ergiebt sich gleich

$$r^2 \pi \,\text{Cos}\, u,$$

also gleich dem Inhalte derjenigen Ellipse, welche die orthographische Projection desselben gegen eine Projections-Ebene unter dem Winkel u geneigten Kreises ist. Man erhält also immer eine unserer Projection des gegebenen Kreises dem *Inhalte* nach gleiche Ellipse, wenn man denselben Kreis in unveränderter Lage auf die Ebene der x orthographisch projicirt.

Wenn wir die Bedingung aufheben, dass die parallelen Projectionsstrahlen mit der Projections-Ebene einen halben rechten Winkel machen, und annehmen, dass dieser Winkel allgemein $= i$ sei, so ergiebt sich, mit Beibehaltung der obigen Bezeichnungen, die Gleichung

$$\eta = y + z\,\text{Cot}\, i,$$

also

$$\eta = \varphi\xi + \text{Cot}\, i \,.\, \psi\xi,$$

und man erhält als Lösung der obigen Aufgabe

$$\eta = a\xi + \text{Cot}\, i \sqrt{r^2 - (1+a^2)\xi^2},$$

also

$$\eta^2 + (\text{Cot}\, i^2 + \frac{a^2}{\text{Sin}\, i^2})\,\xi^2 - 2a\,\eta\,\xi = r^2\,\text{Cot}\, i^2,$$

welches wieder die Gleichung einer Ellipse ist.

Führt man auch hier neue Coordinaten ξ' und η' ein, so dass wieder

$$\xi = \xi' \,\text{Sin}\,\varphi - \eta' \,\text{Cos}\,\varphi,$$
$$\eta = \xi' \,\text{Cos}\,\varphi + \eta' \,\text{Sin}\,\varphi$$

ird, und bestimmt den Winkel φ so, dass $\eta'\xi$ aus der Rechnung inausgeht, so wird

$$\text{Tang}\,2\varphi = \frac{2\,\text{Tang}\,u\,.\,\text{Sin}\,i^2}{\text{Cos}\,2i + \text{Tang}\,u^2},$$

nd die obige Gleichung verwandelt sich in folgende:

$$\xi'^2(\text{Sec}u^2 - \text{Cos}2\varphi(\text{Tang}u^2 + \text{Cos}2i) - 2\text{Tang}u\text{Sin}2\varphi.\text{Sin}i^2)$$
$$+\eta'^2(\text{Sec}u^2 + \text{Cos}2\varphi(\text{Tang}u^2 + \text{Cos}2i) + 2\text{Tang}u\text{Sin}2\varphi.\text{Sin}i^2) = 2r^2\text{Cos}i^2,$$

elche in ihrer einfachsten Gestalt so geschrieben werden kann:

$$\xi'^2 \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \text{Cos}\,u^2\text{Sin}2i^2)}}{2r^2\text{Cos}\,u^2\,\text{Cos}\,i^2} + \eta'^2 \cdot \frac{(1 + \sqrt{1 - \text{Cos}u^2\text{Sin}2i^2)}}{2r^2\,\text{Cos}u^2\text{Cos}i^2} = 1.$$

Die halben Axen der Ellipse sind demnach

$$\frac{r}{2\text{Sin}\,i} \cdot \sqrt{(1 + \sqrt{1 - \text{Cos}\,u^2\text{Sin}\,2i^2)} \cdot \sqrt{2}} \text{ und}$$

$$\frac{r}{2\text{Sin}\,i} \cdot \sqrt{(1 - \sqrt{1 - \text{Cos}\,u^2\text{Sin}\,2i^2)} \cdot \sqrt{2}}.$$

Der Inhalt dieser Ellipse ist also

$$r^2\pi\,\text{Cos}\,u\,.\,\text{Cot}\,i.$$

Setzt man $i = 45^0$, so ergeben sich die oben unter dieser Annahme gefundenen Ausdrücke für die halben Axen der Ellipse.

Setzt man $u = 0$, d. h. nimmt man den zu projicirenden Kreis s in der Ebene der xz liegend an, so wird die Projection eine llipse, deren halbe Axen

$$r\,\text{Cot}\,i \text{ und } r$$

nd.

Setzt man endlich $u = 0$ und $i = 45^0$, so wird die Projection n dem zu projicirenden gleicher Kreis.

Bezeichnen hier wieder $2a$ und $2b$ resp. die grosse und kleine xe der Ellipse, und setzt man

$$\text{Cos}\,u\,.\,\text{Sin}\,2i = \text{Cos}\,v,$$

wird, ähnlich wie in dem besondern Falle,

$$\text{Tang}\,(45^0 - \tfrac{1}{2}v) = \frac{b}{a},$$

$$r = \frac{a\,\text{Sin}\,i}{\text{Cos}\,(45^0 - \frac{1}{2}v)} = \frac{b\,\text{Sin}\,i}{\text{Sin}(45^0 - \frac{1}{2}v)};$$

oder auch

$$\text{Tang}\tfrac{1}{2}v = \frac{a-b}{a+b},\quad r = \text{Sin}\,i.\sqrt{a^2+b^2}.$$

Aus dieser Darstellung ersieht man, dass die beiden Meth den, welche Gregorius a St. Vincentio für die Construc der Ellipse mittelst des Kreises gegeben hat, indem er einmal von der Peripherie auf den Durchmesser des Kreises gefäll Perpendikel, von den Fusspunkten derselben aus, auf schräge p rallele gerade Linien aufträgt, dann aber auch diese Perpendi selbst in einem constanten Verhältnisse verändert, in unse plagiographischen Projection des Kreises ihre gemeinschaftlich Quelle haben Die erste jener Methoden ist nichts anderes, unsere Projection des Kreises, der auf der Ebene der xy, Projections-Ebene, senkrecht steht und mit den andern Coord naten-Ebenen einen beliebigen Winkel bildet; die andere ist ebe falls die Projection eines Kreises, welcher jedoch in der Eb xz liegt, nur bilden hier die Projectionsstrahlen mit der Pro tions-Ebene nicht einen Winkel von 45°, sondern einen beliebi Winkel, den wir oben durch i bezeichnet haben.

Wenn der zu projicirende Kreis wie vorhin auf der Projectio Ebene senkrecht steht, und sein Mittelpunkt im Anfangspunkte d Coordinaten liegt, so wird derselbe, während man ihm eine Dr hung um seinen in die Axe der z fallenden Durchmesser beile die Oberfläche einer Kugel beschreiben. Wenn man nun für liebige Drehungswinkel u, wo u, wie oben, den Winkel bedeut welchen die Ebene des Kreises mit der Coordinaten-Ebene macht, denselben projicirt, so entstehen dadurch Ellipsen, welc sämmtlich einen gemeinschaftlichen Durchmesser haben, der Durchmesser des Kreises gleich ist. Zieht man durch einen beiden Punkte, in welchen alle diese Ellipsen sich schneiden, zwei derselben Tangenten, so ist der Winkel, welchen diese schliessen, gleich dem Unterschiede der entsprechenden Drehun winkel des Kreises, oder, was dasselbe ist, gleich dem Wink welchen die Durchschnittslinien der Ebene des Kreises und Projections-Ebene xy einschliessen. Alle diese Ellipsen wer von einer und derselben Ellipse eingehüllt, deren Axen wir durc die folgenden Betrachtungen erhalten.

Aufgabe 2. Man sucht die plagiographische Pr jection einer Kugel.

Auflösung. Die Kugel wird von der Mantelfläche des C linders, welchen die Projectionsstrahlen bilden, in einem grösst Kreise berührt, dessen Lage gegen die Projections-Ebene le ermittelt werden kann. Legt man den Mittelpunkt der Kugel den Anfangspunkt der Coordinaten und nimmt wieder die Eb xy zur Projections-Ebene, auch die Projectionsstrahlen mit Ebene yz parallel an, so wird, da der Neigungswinkel des Ber rungskreises gegen die Projections-Ebene 45° beträgt,

$$y = \sqrt{\frac{r^2-x^2}{2}},\quad z = \sqrt{\frac{r^2-x^2}{2}};$$

r den Radius der Kugel bedeutet, und man erhält

$$\xi = x, \quad \eta = \sqrt{\frac{r^2-\xi^2}{2}} + \sqrt{\frac{r^2-\xi^2}{2}} = \sqrt{r^2-\xi^2}.\sqrt{2};$$

so

$$\frac{\eta^2}{2r^2} + \frac{\xi^2}{r^2} = 1,$$

e Gleichung einer Ellipse, deren halbe grosse Axe $r\sqrt{2}$ und eren halbe kleine Axe $= r$ ist.

Da man sich die Kugel durch Umdrehung des grössten Kreises n einen beliebigen festen Durchmesser entstanden denken kann, wollen wir annehmen, dass dieser in der Axe der z liege. ann ersieht man leicht, dass sämmtliche Ellipsen, welche in der origen Aufgabe als Projectionen des sich um diese Axe drehenen auf der Projections-Ebene senkrechten Kreises erscheinen, on einer Ellipse eingehüllt werden, deren halbe grosse Axe $r\sqrt{2}$ nd deren halbe kleine Axe r ist. Man erhält demnach folgenden Satz:

„Man ziehe in einem Kreise auf einen beliebigen Durchmesser eine Anzahl senkrechter Sehnen, und bemerke die Durchschnittspunkte mit demselben. Giebt man diesem Durchmesser eine drehende Bewegung um den Mittelpunkt, und lässt zugleich die Sehnen mit ihrer anfänglichen Richtung parallel sich fortbewegen, so liegen die Endpunkte derselben allemal in einer Ellipse. Auf diese Weise erhält man für jeden Drehungswinkel eine bestimmte Ellipse, und alle diese werden von einer Ellipse eingehüllt, deren halbe grosse Axe die Sehne eines Quadranten, und deren halbe kleine Axe der Radius dieses Kreises ist."

Wenn man die zu projicirende Kugel durch Ebenen parallel it der Projections-Ebene schneidet, und die dadurch entstehenen Kreise projicirt, so sind diese Projectionen wieder Kreise, nd zwar ist jeder derselben demjenigen gleich, dessen Projection r ist. Die Mittelpunkte dieser Kreise liegen sämmtlich in der xe der y, und sind vom Anfangspunkte der Coordinaten ebenoweit entfernt, als die in der Axe der z liegenden Mittelpunkte er ihnen entsprechenden, mit der Projections-Ebene parallelen reise. Von jenen Kreisen werden alle diejenigen, deren Radius cht kleiner als $\frac{r}{\sqrt{2}}$ ist, von der Projection der Kugelfläche einehüllt, von welcher wir gesehen haben, dass sie eine Ellipse t, welche die Sehne eines Quadranten des grössten Kreises zur alben grossen Axe und den Radius desselben zur halben kleinen xe hat. Wir erhalten demnach einen Satz, welchen Herr Prossor Steiner im dritten Bande des Crelle'schen Journals ür reine und angewandte Mathematik. S. 208., wie lgt, ausgesprochen hat:

„Zieht man in einem gegebenen Kreise Sehnen, d
sämmtlich parallel sind, beschreibt über jeder, a
Durchmesser genommen, einen Kreis, so wird jeder v
diesen Kreisen (wozu auch der gegebene gehört) v
einer bestimmten Ellipse eingeschlossen und in zw
Punkten berührt. Die Ellipse hat den mit den genannt
Sehnen parallelen Durchmesser AB des gegeben
Kreises zur kleinen Axe, deren Quadrat gerade d
Hälfte des Quadrats der grossen Axe ist. Diejenig
Kreise jedoch, deren Durchmesser kleiner sind a
$AB\sqrt{\frac{1}{2}}$ liegen innerhalb der Ellipse, ohne von ihr b
rührt zu werden“

Man ersieht aus diesen Beispielen, wie unsere Projectionsa
angewandt werden kann, um Sätze durch geometrische Anschauun
zu beweisen, welche man sonst auf analytischem Wege zu e
halten pflegt.

Wollte man den letzten Satz in Form einer Aufgabe an
sprechen, so könnte man ihn auf folgende Weise fassen:

„Ein Kreis, dessen Radius r ist, liege in der Ebe
xy und sein Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coo
dinaten. Lässt man nun den Mittelpunkt eines Kreise
mit veränderlichem Radius sich in der Axe der y bew
gen, und giebt diesem Radius jedesmal die Grösse
welche der Ordinate α des Mittelpunkts als Absciss
eines Punktes in der Peripherie jenes festen Kreise
angehört, so werden solche bewegliche Kreise v
einer krummen Linie eingehüllt, deren Gleichung ge
sucht wird.“

Auflösung. Die Gleichung des beweglichen Kreises i
irgend einer seiner Lagen ist

$$x^2 + (y-\alpha)^2 = r^2 - \alpha^2.$$

Differenziirt man dieselbe in Beziehung auf α, so ergiebt sich

$$y = 2\alpha,$$

und substituirt man diesen Werth in die obige Gleichung, so er
hält man

$$x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = r^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2,$$

oder

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r\sqrt{2}}\right)^2 = 1,$$

als Gleichung der gesuchten einhüllenden krummen Linie, welche
demnach eine Ellipse mit halber grosser Axe $r\sqrt{2}$ und halber
kleiner Axe r ist; übereinstimmend mit dem, was oben durch ganz
andere Betrachtungen gefunden wurde.

Aufgabe 3. Man sucht die plagiographische Projection eines Rotations-Sphäroids, dessen Rotationsaxe auf der Projections-Ebene senkrecht steht.

Auflösung. Schneidet man die Oberfläche durch Ebenen parallel mit der Projections-Ebene, so entstehen Kreise, welche in der Projection in ihrer wahren Grösse erscheinen. Die Mittelpunkte dieser Kreise, welche sämmtlich in der Rotations-Axe liegen, bleiben auch in der Projection in ihren wahren Entfernungen von einander, wie denn auch die Rotations-Axe selbst ihre Grösse beibehält. Aus dieser Betrachtung ergiebt sich, dass, wenn man die Ellipse, durch deren Rotation das Sphäroid entstanden ist, construirt, auf die Rotations-Axe beliebige rechtwinklige Ordinaten fällt, und mit denselben als Radien aus den Punkten, in welchen die Axe getroffen wird, Kreise beschreibt, diejenige krumme Linie, welche solche Kreise einhüllt, die Projection des Rotations-Sphäroids sein wird. Auf diese Weise wird man sich dieser krummen Linie mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit nähern können.

Um diese Linie genauer kennen zu lernen, stellen wir folgende Untersuchung an. Die halbe grosse Axe der Ellipse des abgeplatteten Sphäroids, durch deren Umdrehung dasselbe entstanden ist, sei a, die halbe kleine b. Zieht man mit der grossen Axe beliebige parallele Sehnen, und beschreibt aus den Punkten, in welchen die kleine Axe von diesen getroffen wird, mit den Hälften der entsprechenden Sehnen als Radien, Kreise, so kann die einhüllende krumme Linie auch auf folgende Weise bestimmt werden. Die Gleichung der Ellipse ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

und wenn man die Ordinate eines Mittelpunkts jener Kreise durch α bezeichnet, so ist das Quadrat des ihr entsprechenden Radius

$$a^2\left(1 - \frac{\alpha^2}{b^2}\right);$$

man hat demnach für jeden Kreis die Gleichung

$$x^2 + (y - \alpha)^2 = a^2\left(1 - \frac{\alpha^2}{b^2}\right).$$

Differenziirt man dieselbe in Beziehung auf α, so ergiebt sich

$$y - \alpha = \frac{\alpha a^2}{b^2},$$

also

$$\alpha = \frac{b^2 y}{a^2 + b^2},$$

welcher Werth, in die obige Gleichung substituirt, als Gleichung der einhüllenden krummen Linie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2+b^2} = 1$$

ergiebt. Diese ist demnach eine Ellipse, deren Axen leicht construirt werden können. Die halbe kleine Axe ist nämlich gleich der halben grossen Axe der gegebenen Ellipse, und die halbe grosse Axe gleich der Sehne eines Quadranten derselben Ellipse. Dieser Construction wird man offenbar den Vorzug vor der ersten mittelst der Kreise geben.

Wenn das Sphäroid ein längliches, also durch Umdrehung der Ellipse um ihre grosse Axe entstanden ist, und man die Sehnen parallel mit der kleinen Axe zieht, und aus den Punkten, in welchen die grosse Axe getroffen wird, mit den entsprechenden halben Sehnen Kreise beschreibt, so ist die Gleichung der dieselben einhüllenden krummen Linie:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2+b^2} = 1,$$

d. h. diese Linie ist eine Ellipse, deren halbe kleine Axe gleich der halben kleinen Axe der gegebenen Ellipse und deren halbe grosse Axe, wie vorhin, gleich der Sehne eines Quadranten derselben Ellipse ist.

In diesen beiden Sätzen ist, wie man leicht sieht, der Satz des Herrn Professor Steiner vom Kreise enthalten; man darf nur $a=b=r$ setzen, wo r den Radius des Kreises bedeutet.

Ferner ergeben sich durch Betrachtungen, welche den oben bei der Kugel angestellten ähnlich sind, folgende Sätze:

„Man ziehe in einer Ellipse mit einer Axe beliebige parallele Sehnen, und bemerke die Punkte, in welchen die andere getroffen wird. Giebt man dieser eine drehende Bewegung um den Mittelpunkt, und lässt zugleich die Sehnen mit ihrer anfänglichen Richtung parallel sich fortbewegen, so liegen die Endpunkte derselben allemal in einer Ellipse. Auf diese Weise erhält man für jeden Drehungswinkel eine bestimmte Ellipse, und alle diese werden von *einer* Ellipse eingehüllt, deren halbe grosse Axe die Sehne eines Quadranten und deren halbe kleine Axe die halbe grosse oder halbe kleine Axe der gegebenen Ellipse ist, jenachdem die Sehnen mit jener oder dieser parallel sind."

„Alle diese Ellipsen haben die beiden Endpunkte derjenigen Axe, mit welcher die Sehnen parallel sind, zu gemeinschaftlichen Schneidungspunkten, und die Winkel, welchen zwei Ellipsen in einem dieser Punkte mit einander bilden, ist immer dem entsprechenden Drehungswinkel gleich."

Aufgabe 4. Man sucht die plagiographische Projection eines Ellipsoids mit drei ungleichen Axen, wenn eine dieser Axen auf der Projections-Ebene senkrecht steht.

Auflösung. Wenn man das Ellipsoid parallel mit der Projections-Ebene durch Ebenen schneidet, so entstehen Ellipsen, welche in der Projection in ihrer wahren Grösse erscheinen. Die Mittelpunkte derselben liegen sämmtlich in der auf der Projectionsebene senkrechten Axe, welche in der Projection ihre wahre Grösse behält. Die Gleichung des zu projicirenden Ellipsoids sei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

und die Projections-Ebene, wie gewöhnlich, die Ebene der xy; auch sollen, wie bisher, die Projectionsstrahlen mit der Ebene z parallel sein und mit der Ebene xy einen Winkel von 45° bilden. Dann fallen die Projectionen der Mittelpunkte der mit der Ebene xy parallelen Ellipsen in die Axe der y, in dieselben Entfernungen vom Anfangspunkte der Coordinaten, welche sie in der Wirklichkeit haben, und in dieselbe Linie fallen auch sämmtliche Axen, welche mit der Axe $2b$ parallel sind, während die mit der Axe $2a$ parallelen auf jene Linie senkrecht zu stehen kommen. Aus dieser Betrachtung ergiebt sich nun folgende Construction:

„Man construire eine Ellipse, welche die Axen $2a$ und $2b$ hat, trage auf $2b$ nach beiden Seiten vom Mittelpunkte die halbe Axe c auf, construire die Ellipse, deren Axen $2a$ und $2c$ sind, trage auf $2a$ nach beiden Seiten vom Mittelpunkte die halbe Axe b auf, und construire eine dritte Ellipse, deren Axen $2b$ und $2c$ sind. Diese drei Ellipsen wollen wir resp. durch (a, b); (a, c); (b, c) bezeichnen. Zieht man nun mit $2a$ beliebige parallele Gerade, welche die Ellipsen (a, c) und (b, c) schneiden, und construirt über jeder dieser Sehnen Ellipsen, so dass die grössere von ihnen die grosse, die kleinere die kleine Axe wird, so ist die krumme Linie, welche diese Ellipsen einhüllt, die gesuchte Projection des Ellipsoids.“

Bezeichnet man durch α den Abstand einer der parallelen Sehnen von der Axe $2a$, so hat man für die Quadrate der halben Axen der entsprechenden Ellipse die Ausdrücke:

$$a^2\left(1-\frac{\alpha^2}{c^2}\right) \text{ und } b^2\left(1-\frac{\alpha^2}{c^2}\right),$$

also ist die Gleichung derselben

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-\alpha)^2}{b^2} = 1-\frac{\alpha^2}{c^2},$$

welche, in Bezug auf α differenziirt,

$$\alpha = \frac{c^2 y}{b^2 + c^2}$$

ergiebt. Substituirt man diesen Ausdruck in die obige Gleichung, so erhält man für diejenige krumme Linie, welche jene Ellipsen einhüllt, folgende Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2+c^2} = 1.$$

Diese krumme Linie ist also wieder eine Ellipse, deren halbe Axen a und $\sqrt{b^2+c^2}$ sind, aus welchem Umstande sich eine Construction unserer Aufgabe ergiebt, die ungleich einfacher als die oben angegebene ist.

Man sieht leicht, wie die Lösung der vorigen Aufgabe in dieser allgemeinen enthalten ist.

Wir können die vorhergehenden Aufgaben aber auch vollständig lösen, ohne dabei die Theorie der Enveloppen als bekannt vorauszusetzen, wenn wir die krumme Linie suchen, in welcher die zu projicirende Oberfläche von dem Strahlen-Cylinder berührt wird, und diese krumme Linie sodann projiciren. Auf diese Weise gelangt man durch plagiographische Projection zu Sätzen über einhüllende Curven.

Wenn die Gleichung der zu projicirenden Oberfläche zwischen den Coordinaten x, y, z,

$$U = 0,$$

gegeben ist, und die Gleichungen der erzeugenden Geraden eines Cylinders allgemein

$$x - az = \alpha, \quad y - bz = \varphi\alpha$$

sind, so findet man bekanntlich die Gleichung des Cylinders, welcher die gegebene Oberfläche berührt, wenn man aus der Gleichung $U = 0$ die partiellen Differenzialquotienten $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ und $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ bestimmt, die Ausdrücke für dieselben in die Gleichung des Cylinders

$$1 = a\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

substituirt, und aus diesen vier Gleichungen die drei Grössen x, y, z eliminirt, wodurch ein Ausdruck für $\varphi\alpha$ durch α gefunden wird. Setzt man in diesen die Ausdrücke für α und $\varphi\alpha$ durch x, y und z, so ist die dadurch entstehende Gleichung die gesuchte.

Aufgabe 5. Man sucht die plagiographische Projection einer Oberfläche, deren Gleichung $U = 0$ gegeben ist.

Auflösung. Für den Fall unserer Projection haben wir, wenn die Gerade, welche den Cylinder erzeugt, mit der Ebene yz

arallel ist, und mit der Projections-Ebene xy einen Winkel von 5° bildet, $a=0$, $b=1$; die vier Gleichungen, welche hier in Betracht kommen, sind demnach:

$$U = 0,$$
$$1 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$
$$x = \alpha,$$
$$y = z + \varphi\alpha.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die drei Grössen x, y, z, so erhält man einen Ausdruck für $\varphi\alpha$ durch α, und wenn man die Ausdrücke für $\varphi\alpha$ und α in diesen zurück substituirt, dann aber $=0$ setzt, so ergiebt sich eine Gleichung zwischen x und y, welche die der gesuchten Projection der gegebenen Oberfläche ist.

Diese Aufgabe und Aufgabe 1. enthalten die ganze analytische Theorie unserer Projectionsart.

Wenden wir die hier entwickelte allgemeine Theorie auf die Aufgabe 4. an, in welcher die Aufgabe 3. enthalten ist, so wird

$$U = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$
$$1 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -\frac{y}{z} \cdot \frac{c^2}{b^2},$$
$$x = \alpha,$$
$$y = z + \varphi\alpha.$$

Aus diesen vier Gleichungen ergiebt die Elimination der drei Grössen x, y, z die Gleichung

$$\left(1 - \frac{\alpha^2}{a^2}\right)(b^2 + c^2) = (\varphi\alpha)^2,$$

also ist, wenn man die Ausdrücke für $\varphi\alpha$ und α durch x, y, z in diese Gleichung zurück substituirt, und dann $z=0$ setzt,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2 + c^2} = 1$$

die Gleichung für die Projection des Ellipsoids, übereinstimmend mit der oben auf anderem Wege gefundenen. Für Aufgabe 3. ist $a=b$, und man hat

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 + c^2} = 1.$$

Aufgabe 6. Man sucht die plagiographische Projection eines Rotations-Paraboloids, dessen Axe auf der Projections-Ebene senkrecht steht.

Auflösung. Schneidet man den Körper parallel mit der Projections-Ebene, so entstehen Kreise, welche in der Projection in ihrer wahren Grösse erscheinen; daraus ergiebt sich folgende Construction:

„Man construire die Parabel, durch deren Umdrehung um ihre Axe der Körper entstanden ist, und ziehe beliebige auf der Axe senkrechte Sehnen. Die Durchschnittspunkte nehme man zu Mittelpunkten von Kreisen, deren Radien die Hälften dieser Sehnen sind, dann ist diejenige krumme Linie, welche alle diese Kreise einhüllt, die gesuchte Projection des Paraboloids."

Die Gleichung des zu projicirenden Körpers sei

$$x^2 + y^2 = p(a - z);$$

man hat also

$$U = x^2 + y^2 + pz - ap = 0,$$
$$1 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -\frac{2y}{p},$$
$$x = \alpha,$$
$$y = z + \varphi\alpha.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt die Elimination der Grössen x, y, z die Gleichung

$$\alpha^2 - \frac{p^2}{4} = ap + p\varphi\alpha,$$

also, wenn man die Ausdrücke für α und $\varphi\alpha$ zurück substituirt,

$$x^2 = p\left(\frac{p}{4} + a + y\right).$$

Die Projection ist also wieder eine Parabel, und kann hiernach mit Leichtigkeit construirt werden.

Aufgabe 7. Man sucht die plagiographische Projection eines Rotations-Hyperboloids, dessen Rotations-Axe auf der Projections-Ebene senkrecht steht.

Auflösung. Schneidet man den Körper durch Ebenen parallel mit der Projections-Ebene, so entstehen Kreise, welche in der Projection in ihrer wahren Grösse erscheinen, und man erhält demnach folgende Construction:

„Man construire die Hyperbel, durch deren Umdrehung der Körper entstanden ist. Auf die Rotations-Axe fälle man von beliebigen Punkten der Hyperbel Lothe, und construire mit denselben als Radien aus den entsprechenden Durchschnittspunkten der Axe Kreise. Diejenige krumme Linie, welche diese Kreise einhüllt, ist die gesuchte plagiographische Projection des Hyperboloids. Wenn der Körper ein Hyperboloid mit einem Fache ist, so hat man die Lothe auf die kleine Axe, wenn er ein Hyperboloid mit zwei Fächern ist, auf die grosse Axe zu fällen."

Wenn

$$U = a^2z^2 - c^2(y^2 + x^2) + a^2c^2 = 0$$

die Gleichung des Umdrehungs-Hyperboloids mit einem Fache ist, so hat man

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{c^2y}{a^2z} = 1,$$
$$x = \alpha,$$
$$y = z + \varphi\alpha,$$

also

$$z = \frac{c^2\varphi\alpha}{a^2 - c^2}, \quad y = \frac{a^2\varphi\alpha}{a^2 - c^2},$$

mithin, nach gehöriger Substitution, für die Gleichung der gesuchten Projection:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1,$$

die Gleichung einer Hyperbel.

Wenn

$$U = a^2z^2 - c^2(y^2 + x^2) - a^2c^2 = 0$$

die Gleichung des Umdrehungs-Hyperboloids mit zwei Fächern ist, so ergiebt sich für die Projection desselben

$$\frac{y^2}{c^2 - a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

woraus man sieht, dass dieselbe ebenfalls eine Hyperbel wird.

In sehr vielen Fällen, namentlich in solchen, wo der zu projicirende Körper von Ebenen begrenzt wird, ist es, um die plagiographische Projection zu erhalten, nicht nothwendig, zu den allgemeinen Betrachtungen zurückzugehen, ja man bedarf nicht einmal der Zeichnungen im Grund- und Aufrisse, sondern kann durch besondere Betrachtungen, welche sich auf die Gestalt des Körpers beziehen, die Projection erhalten. Dabei wird man Sätze, wie die folgenden, welche in dem Wesen der plagiographischen Projection begründet sind, anzuwenden Gelegenheit haben:

1. Alle gerade Linien, welche mit der Projections-Ebene parallel sind, erscheinen in der Projection in ihrer wahren Grösse.

2. Alle gerade Linien, welche auf der Projections-Ebene senkrecht stehen, behalten in der Projection ihre wahre Grösse.

3. Alle Winkel, deren Ebenen mit der Projections-Ebene parallel sind, erscheinen in dieser in ihrer wahren Grösse.

4. Alle mit einander parallele gerade Linien bleiben auch in der Projection mit einander parallel.

5. Alle ebene Figuren, welche mit der Projections-Ebene parallel sind, erscheinen in dieser in ihrer wahren Grösse und Form, d. h. als jenen congruente Figuren,

u. s. w.

Diese Projections-Art eignet sich ganz besonders, um beim Unterrichte in der Stereometrie angewandt zu werden, indem nicht nur die körperlichen Gebilde sich mittelst derselben in der Ebene sehr anschaulich darstellen lassen, sondern auch viele stereometrische Sätze mit überraschender Leichtigkeit bewiesen werden können.

XXII.

Ueber den Distanzmesser mit Parallelfäden.

Von dem

Herrn Professor Dr. G. W. v. Langsdorff

an der höheren Bürgerschule zu Mannheim.

Dieses Instrument besteht in einem um eine horizontale Axe drehbaren Fernrohr, bei welchem in der Ebene des Fadenkreuzes zwei horizontale Fäden in geringem Abstand (etwa 2 Linien) von einander gespannt sind. Visirt man mit dem Fernrohr in horizontaler Richtung nach einer entfernten in Zolle getheilten vertikalen Latte, so lässt sich aus dem beobachteten Lattenmaasse, d. h. aus der Anzahl von Zollen, welche sich zwischen jenen zwei Parallelfäden zeigen, die Entfernung der Latte vom Objektive (oder auch von der Axe) des Fernrohrs ziemlich genau bestimmen.

Da dieser Distanzmesser bei detaillirten Aufnahmen grosse Bequemlichkeit und bei bedeutender Verjüngung des Planes auch hinreichende Genauigkeit gewährt, so halte ich die Mittheilung folgender Bemerkungen über seinen Gebrauch um so weniger für

nutzlos, als ich mich selbst hie und da von der unrichtigen Behandlung desselben überzeugt habe.

Vor Allem ist die Beziehung zwischen der Distanz D (der Latte von dem Objektive), dem Lattenmaasse L und den durch die Einrichtung des Fernrohrs bedingten Konstanten durch eine Gleichung auszudrücken.

Ist das Fernrohr ein astronomisches mit Einem Okular, P die Brennweite des Objektives, B das durch das Objektiv erzeugte kleine Bild des Lattenmaasses, so ist bekanntlich

$$B = \frac{P}{D-P} \cdot L,$$

daher

$$L = \frac{B}{P} \cdot D - B.$$

Eine scharfe Pointirung erfordert aber, dass das Bild B mit den Parallelfäden in Einer Vertikalebene liege, weil sonst dieses Bild hinter oder vor den Fäden schwankt. Der Fehler, welcher durch Hin- und Herbewegen des Auges leicht erkannt wird, muss durch Verschieben der Okularröhre beseitigt werden, nachdem in dieser die der deutlichen Sehweite entsprechende Entfernung zwischen dem Okular und den Parallelfäden hergestellt ist. Bei Erfüllung dieser Forderung ist aber das Bild B des Lattenmaasses genau gleich der vertikalen gegenseitigen Entfernung F der Parallelfäden, daher

$$L = \frac{F}{P} \cdot D - F.$$

Durch Verschiebung des Okulars in der Okularröhre wird alsdann das Lattenmaass nicht verändert; das Lattenmaass ist also von der Beschaffenheit des Auges unabhängig.

Die Konstante F kann nun unmittelbar gemessen werden. Da sich nämlich F sehr leicht bis auf $\frac{1}{15}$ Linie genau messen, dagegen L bei einer bedeutenderen Distanz nicht wohl über $\frac{1}{10}$ Zoll genau beobachten lässt, so verdient der bei der unmittelbaren Messung von F begangene Fehler keine Berücksichtigung.

Man hat also nur noch die Konstante $\frac{F}{P}$ durch wiederholte Beobachtungen von L für eine genau gemessene Distanz D zu bestimmen.

Ist z. B. $F = 0{,}19''$ und ist für $D = 5000''$ das arithmetische Mittel der Werthe von L aus 10 Beobachtungen $= 88{,}1''$ gefunden worden, so hat man

$$\frac{F}{P} = \frac{L+F}{D} = \frac{88{,}1+0{,}19}{5000} = 0{,}01766,$$

daher die allgemeine Formel

$$L = 0{,}01766 \,.\, D - 0{,}19$$

und

$$D = 56{,}625 \,.\, L + 11.$$

Sollte die Formel den Werth von D nicht vom Objektiv aus, sondern von der Axe aus angeben, und betrüge die Entfernung der Axe vom Objektive 6″, so hätte man

$$D = 56{,}625 \,.\, L + 17.$$

Hat das Fernrohr mehrere Okulare (wie jedes terrestrische Fernrohr), so hängt das durch das vorletzte Okular erzeugte kleine Bild B (welches durch das letzte Okular wie durch eine Loupe betrachtet wird) nicht nur von D und von den konstanten Brennweiten der Linsen und den konstanten gegenseitigen Entfernungen der Okulare, sondern auch von der veränderlichen Entfernung E des Objektivs vom ersten Okular ab. Ist nun, zum Behuf der Herstellung des für die deutliche Sehweite S erforderlichen Abstandes zwischen dem Fadenkreuze (mit den Parallelfäden) und dem letzten Okular, dieses letztere in der Okularröhre verschiebbar und das Fadenkreuz fest, so ändert sich bei den Beobachtungen E nur mit D, und eine Veränderung von B kann nur von einer Veränderung von D herrühren. Ist dagegen in der Okularröhre das letzte Okular fest und das Fadenkreuz verschiebbar, so ändert sich E auch mit S, daher giebt alsdann eine und dieselbe Distanz D für verschiedene Augen verschiedene Bilder B eines und desselben Gegenstandes; wird also das Bild der Latte in die Ebene des Fadenkreuzes gerückt, so erscheinen verschiedenen Augen verschiedene Anzahlen von Zollen zwischen den Parallelfäden, d. h. das Lattenmaass L ist bei gleicher Distanz von der Sehweite S abhängig. Hat also das Fernrohr dieses Distanzmessers mehrere Okulare, so muss das Fadenkreuz in der Okularröhre fest sein.

Für jedes solche Fernrohr erhält man gleichfalls die Formel

$$D = a \,.\, L + b,$$

wo a und b für ein und dasselbe Instrument Konstanten sind, welche durch Beobachtungen bestimmt werden müssen.

Findet man z. B. für $D = 500''$ den mittleren Werth von L aus mehreren Beobachtungen $= 8{,}6''$ und für $D = 5000''$ den mittleren Werth von $L = 88{,}7''$, so hat man die zwei Gleichungen

$$500 = a \,.\, 8{,}6 + b,$$
$$5000 = a \,.\, 88{,}7 + b;$$

woraus sich $a = 56{,}14$ und $b = 17$, also allgemein

$$D = 56{,}14 \,.\, L + 17$$

ergeben würde.

n könnte auch für beliebig viele Werthe von D die zuge
Werthe von L beobachten, und die Konstanten f und g
ichung

$$L = f.D - g$$

er Methode der kleinsten Quadrate bestimmen, wodurch
e Rechnung ohne Nutzen verwickelt würde.

versteht sich, dass sich alle Distanzen D auf einen und
en Punkt des Instruments als Anfangspunkt beziehen müssen,
ss dieser Punkt bei der Messung einer Station jedesmal
iber dem einen Endpunkt der Station liegen muss, während
eren Endpunkt die Latte möglichst vertikal aufgestellt wird.

ch darf nicht übersehen werden, dass die Konstanten sich
müssen, wenn neue Parallelfäden eingezogen werden, dass
sdann diese Konstanten wieder von Neuem aus Beobach-
zu bestimmen sind.

her wurde die Visirlinie (optische Axe) als (wenigstens
orizontal vorausgesetzt. Ist sie unter dem Winkel α gegen
rizont geneigt, während bei vertikaler Stellung der Latte
ttenmaass L abgelesen wird, so würde das Lattenmaass,
die Latte senkrecht zur Visirlinie gehalten würde, nur
s α sein; daher ist die Entfernung des Punktes, in welchem
irlinie die Latte trifft, nur $= a.L.\cos\alpha + b$, folglich die
tale Projektion dieser Entfernung

$$D = (a.L.\cos\alpha + b).\cos\alpha,$$

ei kleinen Winkeln bis zu 10^0 ohne Bedenken

$$D = (a.L + b).\cos^2\alpha$$

werden kann. Für Winkel bis etwa 10^0 kann man aber,
in Graden gegeben ist, $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \alpha^2.\sin^2 1^0$
$^2.0{,}0003$ setzen, so dass man

$$D = aL + b - (aL + b).\alpha^2.0{,}0003$$

m den Winkel α bestimmen zu können, muss der Distanz-
mit einer Libelle und einem vertikalen Gradbogen versehen
Es ist hinreichend, wenn letzterer in Grade getheilt ist, wo
nn Viertelgrade noch sehr leicht schätzen lassen.

bequemeren Gebrauch wird man sich nach der Formel
$L + b$, nachdem man a und b bestimmt hat, eine Tabelle
en, worin man zu jedem beobachteten Lattenmaasse L die
chende Distanz D (für horizontale Visirlinie) aufsuchen kann.

rd der Distanzmesser als Kippregel auf dem Messtisch ge-
, so erleichtert man sich die Aufnahme sehr, wenn man
er festgesetzten Verjüngung des Planes einen Maassstab
, der für jedes Lattenmaass die entsprechende Distanz un-
ar giebt.

Ist z. B. $D=56{,}14 . L+17$ in Zollen, so hat man $D=17$ für $L=0$, und $D=5631$ für $L=100$. Trägt man nun auf einer Geraden von einem Anfangspunkt A aus nach dem verjüngten Maassstab 17 Zoll und 5631 Zoll in derselben Richtung ab, bezeichnet die bezüglichen Endpunkte durch 0 und 100, theilt den Zwischenraum zwischen 0 und 100 in 100 gleiche Theile und bezeichnet die Theilungspunkte durch 1, 2, 3....99, so ist die Gerade von A bis zum $m$ten Theilungspunkte die dem Lattenmaasse von m Zollen entsprechende Distanz in der festgesetzten Verjüngung. Auf ähnliche Weise wie beim sogenannten tausendtheiligen Maassstabe lassen sich auch die Distanzen für die Zehntelzolle hinzufügen.

Die anzunehmende Verjüngung hängt von der durch das Instrument zu erreichenden Genauigkeit ab. Ist z. B. $D=56{,}14 . L+17$ und lassen sich bei den grössten gemessenen Distanzen noch die Zehntelzolle des Lattenmaasses gut schätzen, so erhält man die Distanzen auf $56\times 0{,}1=5{,}6''$ genau. Da man nun der Erfahrung gemäss Linien mit dem Zirkel auf $\frac{1}{15}$ Linie ($\frac{1}{5}$ Millimeter) genau messen kann, so muss $\frac{1}{15}$ Linie des wahren Maassstabes wenigstens $5{,}6''=56'''$ des verjüngten betragen, also $1'''$ des wahren Maassstabes wenigstens $15\times 56=840'''$ des verjüngten; die Verjüngung müsste also in diesem Falle höchstens $\frac{1}{840}$, dürfte aber kleiner (z. B. $\frac{1}{1000}$) sein. Liessen sich bei den grössten gemessenen Distanzen nur noch Viertelzolle schätzen, so dürfte die Verjüngung höchstens $\frac{1}{2100}$ sein.

XXIII.

Ueber Distanzmesser.

Von

dem Herausgeber.

I.

Da der Distanzmesser mit der Distanzlatte, für welchen Herr Professor v. Langsdorff in dem vorhergehenden Aufsatze eine Theorie geliefert hat, ein in der Praxis jedenfalls sehr viele Bequemlichkeiten darbietender Apparat ist, so will ich mir erlauben,

die Theorie desselben in dem vorliegenden Aufsatze noch nach den Ansichten zu entwickeln, welche ich selbst über diesen Gegenstand der Praxis habe.

Wenn wir uns einen leuchtenden Punkt und von demselben auf die Axe eines Fernrohrs ein Perpendikel gefallt denken, die Entfernung des Fusspunktes dieses Perpendikels von dem ersten Elemente *) des Objectiv-Systems durch p, die gehörig als positiv oder als negativ betrachteten Entfernungen des leuchtenden Punktes und seines dem letzten Elemente des Ocular-Systems, von welchem die Strahlen unmittelbar in's Auge gelangen, entsprechenden Bildes aber respective durch q und Q bezeichnen; so ist, wenn A und B zwei constante, d. h. bloss von den unveränderlichen Bestimmungsstücken der Elemente des Objectiv-Systems und des Ocular-Systems und der unveränderlichen Lage derselben gegen einander in jedem dieser beiden Systeme einzeln genommen abhängende Grössen bezeichnen, unter der Voraussetzung einer genauen Einstellung des Fernrohrs zum deutlichen Sehen, für dasselbe Auge, und unter der Bedingung, dass man das Auge immer an dieselbe Stelle hinter dem letzten Elemente des Ocular-Systems hält, wenigstens mit grosser Annäherung:

$$1) \quad \frac{q}{Q} = A + Bp.$$

Wegen des allgemeinen Beweises dieses Satzes, welcher sich hier ohne Weitläufigkeit nicht geben lässt, muss ich mir erlauben auf den nach Verlauf von ein Paar Wochen erscheinenden, die allgemeine Theorie der Fernröhre und Mikroskope enthaltenden ersten Theil meiner Optischen Untersuchungen. Leipzig. 1846. S. 174. §. 23. Nro. 5. zu verweisen, indem ich hier nur bemerke, dass dieser Beweis sich hauptsächlich auf die auch in den beiden Aufsätzen Archiv. Theil VI. Nro. X. und Nro. LIV. entwickelten Formeln gründet.

Nach meiner Meinung wird der Distanzmesser am besten mit zwei in der Axe des Fernrohrs sich senkrecht durchschneidenden Fäden, von denen bei richtiger Aufstellung des Instruments sich der eine in horizontaler, der andere in vertikaler Lage befinden muss, und ausserdem mit noch zwei dem in Rede stehenden horizontalen Faden in möglichst genau gleichen Abständen von demselben parallelen Fäden versehen. Bei dem Gebrauche richtet man jederzeit die Axe des Fernrohrs genau nach dem Mittelpunkte oder überhaupt nach irgend einem bestimmten Punkte M der vertikal aufgestellten Distanzlatte, liest das zwischen dem mittleren horizontalen Faden und einem der beiden ihm parallelen Fäden enthaltene Lattenmaass ab, oder bedient sich dabei auch der beiden dem mittleren horizontalen Faden parallelen Fäden zugleich, wobei wir immer das dem über der nach dem Punkte M gerichteten Visirlinie des Fernrohrs liegenden Punkte der Latte entsprechende

*) Unter den Elementen eines Spiegel- und Linsen-Systems verstehe ich die einzelnen Spiegel und Linsen, aus denen dasselbe besteht, welche in dem Systeme immer eine unveränderliche Lage gegen einander haben.

Lattenmaass als positiv, das dem unter der nach dem Punkte M gerichteten Visirlinie des Fernrohrs liegenden Punkte der Latte entsprechende Lattenmaass als negativ betrachten wollen, und misst an einem zweckmässig angebrachten Höhenkreise den Neigungswinkel der nach dem Punkte M gerichteten Visirlinie des Fernrohrs gegen den Horizont, indem man denselben als positiv oder als negativ betrachtet, jenachdem die nach dem Punkte M gerichtete Visirlinie des Fernrohrs über oder unter der durch dessen Drehpunkt gehenden Horizontalen liegt. Dass alle nöthigen Hülfsmittel zur feinen Einstellung und genauen Aufstellung an dem Instrumente angebracht sein müssen, versteht sich von selbst.

Bezeichnen wir jetzt die Entfernung des Punktes M von dem Drehpunkte des Fernrohrs durch e, die constante Entfernung des ersten Elements des Objectiv-Systems von dem Drehpunkte des Fernrohrs durch Θ, den Neigungswinkel der nach dem Punkte M gerichteten Visirlinie des Fernrohrs gegen den Horizont durch i, das an einem der beiden dem mittleren horizontalen Faden parallelen Fäden abgelesene Lattenmaass durch λ; so erhellet aus Taf IV. Fig. 2. auch ohne weitere Erläuterung sogleich, dass in der Gleichung 1) in völliger Allgemeinheit

$$p = e - \Theta + \lambda \sin i, \quad q = \lambda \cos i$$

zu setzen ist, wodurch dieselbe die Gestalt

$$2) \quad \frac{\lambda \cos i}{Q} = A + B(e - \Theta + \lambda \sin i)$$

oder

$$3) \quad \lambda \cos i = AQ + BQ(e - \Theta + \lambda \sin i)$$

erhält. Weil nun aber für denselben dem mittleren horizontalen Faden parallelen Faden offenbar Q eine constante Grösse ist, so sind für denselben dem mittleren horizontalen Faden parallelen Faden auch AB und BQ constante Grössen, und wir können also

$$4) \quad G = AQ, \quad H = BQ;$$

wo G und H für denselben dem mittleren horizontalen Faden parallelen Faden constante Grössen sind, setzen, wodurch die Gleichung 3) in die folgende übergeht:

$$4) \quad \lambda \cos i = G + H(e - \Theta + \lambda \sin i).$$

Alles kommt nun zuvörderst auf die Bestimmung der beiden Constanten G und H an. Zu dem Ende messe man mit möglichster Genauigkeit eine Reihe von Werthen der Entfernung e, welche wir durch

$$E, E_1, E_2, E_3, E_4, \ldots\ldots$$

bezeichnen wollen, und bestimme die entsprechenden Werthe

$$L, L_1, L_2, L_3, L_4, \ldots\ldots$$

des Lattenmaasses λ, natürlich immer an demselben dem mittleren horizontalen Faden parallelen Faden, und die entsprechenden Werthe

$$J\,,\ J_1\,,\ J_2\,,\ J_3\,,\ J_4\,,\ \ldots\ldots$$

des Neigungswinkels i. Dann hat man zur Bestimmung der beiden Constanten G und H die folgende Reihe von Gleichungen:

$$5)\quad \begin{cases} L\cos J = G+(E-\Theta+L\sin J)H, \\ L_1\cos J_1 = G+(E_1-\Theta+L_1\sin J_1)H, \\ L_2\cos J_2 = G+(E_2-\Theta+L_2\sin J_2)H, \\ L_3\cos J_3 = G+(E_3-\Theta+L_3\sin J_3)H, \\ L_4\cos J_4 = G+(E_4-\Theta+L_4\sin J_4)H, \\ \qquad\qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

welche man nun einer vollständigen Behandlung nach der Methode der kleinsten Quadrate unterwirft, worüber hier natürlich nichts weiter zu sagen ist, da in den bekannten betreffenden Schriften alles Erforderliche in grosser Ausführlichkeit nachgesehen werden kann.

Hat man aber auf diese Weise die Constanten G und H bestimmt, so erhält man nach der Gleichung 4) die Entfernung e aus den beobachteten Werthen von λ und i und dem immer leicht durch unmittelbare Messung mit aller nöthigen Genauigkeit zu bestimmenden Θ mittelst der Formel

$$6)\quad e = \Theta - \lambda\sin i + \frac{\lambda\cos i - G}{H}.$$

Wenn wir die Fehler von

$$G,\ H,\ \lambda,\ i,\ e$$

respective durch

$$\partial G,\ \partial H,\ \partial\lambda,\ \partial i,\ \partial e$$

bezeichnen, und dieselben als Differentiale betrachten, so haben wir nach 4) eigentlich die Gleichung

$$(\lambda+\partial\lambda)\cos(i+\partial i) = G+\partial G+(H+\partial H)\{e+\partial e-\Theta+(\lambda+\partial\lambda)\sin(i+\partial i)\},$$

also, weil e aus der Gleichung

$$\lambda\cos i = G+H(e-\Theta+\lambda\sin i)$$

bestimmt worden ist, nach den Principien der Differentialrechnung, wie man leicht findet:

$$\cos i\,\partial\lambda - \lambda\sin i\,\partial i = \partial G + (e - \Theta + \lambda\sin i)\,\partial H + H(\partial e + \sin i\,\partial\lambda + \lambda\cos i\,\partial i),$$

d. i.

$$\cos i\,\partial\lambda - \lambda\sin i\,\partial i = \partial G + \frac{\lambda\cos i - G}{H}\,\partial H + H(\partial e + \sin i\,\partial\lambda + \lambda\cos i\,\partial i),$$

und folglich

$$7)\quad \partial e = (\cos i - H\sin i)\frac{\partial\lambda}{H} - \lambda(\sin i + H\cos i)\frac{\partial i}{H} - \frac{\partial G}{H} - \frac{\lambda\cos i - G}{H}\cdot\frac{\partial H}{H}.$$

Soll ∂i in Secunden ausgedrückt sein, so muss man in Gleichung $\sin 1''.\partial i$ für ∂i setzen, wodurch dieselbe die fo Gestalt erhält:

$$8)\quad \partial e = (\cos i - H\sin i)\frac{\partial\lambda}{H} - \lambda(\sin i + H\cos i)\sin 1''.\frac{\partial i}{H} - \frac{\partial G}{H} - \frac{\lambda\cos i - G}{H}\cdot\frac{\partial H}{H}.$$

Für $i=0$ ist

$$9)\quad \partial e = \frac{\partial\lambda}{H} - \lambda\sin 1''.\partial i - \frac{\partial G}{H} - \frac{\lambda - G}{H}\cdot\frac{\partial H}{H}.$$

Wenn man sich bei der Bestimmung der Constanten H der Methode der kleinsten Quadrate nicht bedienen wi reichen zwei der Gleichungen 5), etwa die beiden Gleichung

$$10)\quad \begin{cases} L\cos J = G + (E - \Theta + L\sin J)H, \\ L_1\cos J_1 = G + (E_1 - \Theta + L_1\sin J_1)H, \end{cases}$$

zur Bestimmung dieser beiden Constanten hin. Mittelst ge licher algebraischer Elimination erhält man nämlich ohne Sc rigkeit:

$$\begin{cases} G = -\dfrac{L(E_1-\Theta+L_1\sin J_1)\cos J - L_1(E-\Theta+L\sin J)\cos J_1}{E-E_1+L\sin J-L_1\sin J_1}, \\ H = \dfrac{L\cos J - L_1\cos J_1}{E-E_1+L\sin J-L_1\sin J_1} \end{cases}$$

er

$$\begin{cases} G = -\dfrac{L(E_1-\Theta)\cos J - L_1(E-\Theta)\cos J_1 - LL_1\sin(J-J_1)}{E-E_1+L\sin J-L_1\sin J_1}, \\ H = \dfrac{L\cos J - L_1\cos J_1}{E-E_1+L\sin J-L_1\sin J_1}. \end{cases}$$

Zur Bestimmung von ∂G und ∂H hat man aber nach 10), wenn e früher auch jetzt $\partial\Theta = 0$ gesetzt wird, was jedenfalls ver- ttet ist, die beiden folgenden Gleichungen:

$$(\cos J - H\sin J)\partial L - L(\sin J + H\cos J)\partial J - H\partial E = \partial G + (E-\Theta+L\sin J)\partial H,$$

$$(\cos J_1 - H\sin J_1)\partial L_1 - L_1(\sin J_1 + H\cos J_1)\partial J_1 - H\partial E_1 = \partial G + (E_1-\Theta+L_1\sin J_1)\partial H.$$

Setzen wir aber der Kürze wegen

$$13) \quad \begin{cases} U = \cos J - H\sin J, \\ V = L(\sin J + H\cos J), \\ W = E-\Theta+L\sin J \end{cases}$$

d

$$14) \quad \begin{cases} U_1 = \cos J_1 - H\sin J_1, \\ V_1 = L_1(\sin J_1 + H\cos J_1), \\ W_1 = E_1-\Theta+L_1\sin J_1; \end{cases}$$

werden diese Gleichungen:

$$15) \quad \begin{cases} U\partial L - V\partial J - H\partial E = \partial G + W\partial H, \\ U_1\partial L_1 - V_1\partial J_1 - H\partial E_1 = \partial G + W_1\partial H; \end{cases}$$

führen mittelst leichter Elimination zu den beiden folgenden drücken:

$$16) \quad \partial G = -\frac{UW_1}{W-W_1}\partial L + \frac{U_1W}{W-W_1}\partial L_1 + \frac{VW_1}{W-W_1}\partial J - \frac{V_1W}{W-W_1}\partial J_1 + \frac{HW_1}{W-W_1}\partial E - \frac{HW}{W-W_1}\partial E_1$$

und

$$17)\quad \partial H = \frac{U}{W-W_1}\partial L - \frac{U_1}{W-W_1}\partial L_1 - \frac{V}{W-W_1}\partial J + \frac{V_1}{W-W_1}\partial J_1 - \frac{H}{W-W_1}\partial E + \frac{H}{W-W_1}\partial E_1.$$

Sollen ∂J und ∂J_1 in Secunden ausgedrückt sein, so w diese Gleichungen:

$$18)\quad \partial G = -\frac{UW_1}{W-W_1}\partial L + \frac{U_1 W}{W-W_1}\partial L_1 + \frac{VW_1 \sin 1''}{W-W_1}\partial J - \frac{V_1 W \sin 1''}{W-W_1}\partial J_1 + \frac{HW_1}{W-W_1}\partial E - \frac{HW}{W-W_1}\partial E_1$$

und

$$19)\quad \partial H = \frac{U}{W-W_1}\partial L - \frac{U_1}{W-W_1}\partial L_1 - \frac{V \sin 1''}{W-W_1}\partial J + \frac{V_1 \sin 1''}{W-W_1}\partial J_1 - \frac{H}{W-W_1}\partial E + \frac{H}{W-W_1}\partial E_1.$$

Wir wollen jetzt annehmen, dass man das Lattenmaa den beiden dem mittleren horizontalen Faden parallelen I beobachtet habe, und dass die Gleichung 2) für den über der M gerichteten Visirlinie des Fernrohrs liegenden Punkt der

$$20)\quad \frac{\lambda \cos i}{Q} = A + B(e - \Theta + \lambda \sin i),$$

für den unter der nach M gerichteten Visirlinie des Fern liegenden Punkt der Latte dagegen

$$21)\quad \frac{\lambda' \cos i}{Q'} = A + B(e - \Theta + \lambda' \sin i)$$

sei; so haben wir die beiden Gleichungen

$$22)\quad \begin{cases} \lambda \cos i = AQ + BQ\,(e - \Theta + \lambda \sin i), \\ \lambda' \cos i = AQ' + BQ'(e - \Theta + \lambda' \sin i); \end{cases}$$

aus denen sich durch Subtraction die Gleichung

$$23)\quad (\lambda-\lambda')\cos i = A(Q-Q') + B(Q-Q')(e-\Theta) + B(\lambda Q-\lambda' Q')\sin i$$

ergiebt. Sind nun die beiden Fäden, an denen das Lattenmaass beobachtet wird, gleich weit von dem mittleren horizontalen Faden entfernt, so ist $Q'=-Q$, also $Q-Q'=2Q$, und die vorhergehende Gleichung wird:

$$24)\quad (\lambda-\lambda')\cos i = 2AQ + 2BQ(e-\Theta) + BQ(\lambda+\lambda')\sin i,$$

oder, wenn wir

$$25)\quad \mathfrak{A}=2AQ,\quad \mathfrak{B}=2BQ$$

setzen, wo natürlich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Constanten sind:

$$26)\quad (\lambda-\lambda')\cos i = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\{e-\Theta+\tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda')\sin i\}.$$

Weil aber nach den oben gemachten Voraussetzungen λ positiv, dagegen λ' negativ ist, so ist offenbar $\lambda-\lambda'$ das zwischen den beiden dem mittleren horizontalen Faden parallelen Fäden enthaltene Lattenmaass, und folglich, wenn wir dieses durch l bezeichnen:

$$27)\quad l\cos i = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\{e-\Theta+\tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda')\sin i\},$$

wo es nun wieder zuvörderst auf die Bestimmung der Constanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ankommt.

Zu dem Ende messe man mit möglichster Genauigkeit eine Reihe von Werthen der Entfernung e, welche wir durch

$$E,\ E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4,\ \ldots.$$

bezeichnen wollen, und bestimme die entsprechenden Werthe

$$\begin{array}{l} \mathfrak{L},\ \mathfrak{l},\ \mathfrak{l}';\\ \mathfrak{L}_1,\ \mathfrak{l}_1,\ \mathfrak{l}'_1;\\ \mathfrak{L}_2,\ \mathfrak{l}_2,\ \mathfrak{l}'_2;\\ \mathfrak{L}_3,\ \mathfrak{l}_3,\ \mathfrak{l}'_3;\\ \mathfrak{L}_4,\ \mathfrak{l}_4,\ \mathfrak{l}'_4;\\ \text{u. s. w.} \end{array}$$

der Lattenmaasse

$$l,\ \lambda,\ \lambda'$$

und die entsprechenden Werthe

$$J,\ J_1,\ J_2,\ J_3,\ J_4,\ \ldots.$$

des Neigungswinkels i. Dann hat man zur Bestimmung der Constanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die folgende Reihe von Gleichungen:

$$28)\quad \begin{cases} \varrho\cos J = \mathfrak{A} + \{E - \Theta + \frac{1}{2}(l+l')\sin J\}\mathfrak{B}, \\ \varrho_1\cos J_1 = \mathfrak{A} + \{E_1 - \Theta + \frac{1}{2}(l_1+l'_1)\sin J_1\}\mathfrak{B}, \\ \varrho_2\cos J_2 = \mathfrak{A} + \{E_2 - \Theta + \frac{1}{2}(l_2+l'_2)\sin J_2\}\mathfrak{B}, \\ \varrho_3\cos J_3 = \mathfrak{A} + \{E_3 - \Theta + \frac{1}{2}(l_3+l'_3)\sin J_3\}\mathfrak{B}, \\ \varrho_4\cos J_4 = \mathfrak{A} + \{E_4 - \Theta + \frac{1}{2}(l_4+l'_4)\sin J_4\}\mathfrak{B}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

welche man einer vollständigen Behandlung nach der Methode der kleinsten Quadrate unterwerfen muss.

Hat man also auf diese Weise die Constanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gefunden, so ergiebt sich e nach 27) mittelst der Formel

$$29)\quad e = \Theta - \tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda')\sin i + \frac{l\cos i - \mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}.$$

Kann man das Glied $\frac{1}{2}(\lambda+\lambda')\sin i$, wo, was wohl zu beachten ist, λ und λ' entgegengesetzte Vorzeichen haben, ohne merklichen Fehler als verschwindend betrachten, so werden die vorhergehenden Formeln etwas einfacher, was hier einer weiteren Ausführung nicht bedarf, indem die betreffenden Formeln mit der grössten Leichtigkeit aus den vorhergehenden allgemeinen Formeln sogleich abgeleitet werden können.

Durch Differentiation erhält man aus der Gleichung 27) auf gewöhnliche Weise

$$\cos i\,\partial l - l\sin i\,\partial i = \partial\mathfrak{A} + \{e - \Theta + \tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda')\sin i\}\partial\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\{\partial e + \tfrac{1}{2}\sin i(\partial\lambda+\partial\lambda') + \tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda')\cos i\partial i\}$$

oder

$$\cos i\,\partial l - l\sin i\,\partial i = \partial\mathfrak{A} + \frac{l\cos i - \mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}\partial\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\{\partial e + \tfrac{1}{2}\sin i(\partial\lambda+\partial\lambda') + \tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda')\cos i\partial i\},$$

und folglich

$$30)\quad \begin{aligned} \partial e = {} & \cos i\frac{\partial l}{\mathfrak{B}} - \tfrac{1}{2}\sin i(\partial\lambda+\partial\lambda') \\ & + \{l\sin i + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(\lambda+\lambda')\cos i\}\frac{\partial i}{\mathfrak{B}} \\ & - \frac{\partial\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \\ & - \frac{l\cos i - \mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}\cdot\frac{\partial\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}, \end{aligned}$$

oder, wenn ∂i in Secunden ausgedrückt sein soll, auf ähnliche Art wie im Obigen:

$$31)\quad \partial e = \cos i\,\frac{\partial l}{\mathfrak{B}} - \tfrac{1}{2}\sin i\,(\partial\lambda + \partial\lambda') - \{l\sin i + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(\lambda+\lambda')\cos i\}\sin 1''.\frac{\partial i}{\mathfrak{B}} - \frac{\partial\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} - \frac{l\cos i - \mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}\cdot\frac{\partial\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}.$$

Für $i=0$ ist

$$32)\quad \partial e = \frac{\partial l}{\mathfrak{B}} - \tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda')\sin 1''.\partial i - \frac{\partial\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} - \frac{l-\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}\cdot\frac{\partial\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}.$$

Will man sich bei der Bestimmung der Constanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ der Methode der kleinsten Quadrate nicht bedienen, so reichen zwei der Gleichungen 28), etwa die beiden Gleichungen

$$33)\quad \begin{cases} \mathfrak{L}\cos J = \mathfrak{A} + \{E - \Theta + \tfrac{1}{2}(l+l')\sin J\}\mathfrak{B}, \\ \mathfrak{L}_1\cos J_1 = \mathfrak{A} + \{E_1 - \Theta + \tfrac{1}{2}(l_1+l'_1)\sin J_1\}\mathfrak{B}, \end{cases}$$

zur Bestimmung dieser Constanten hin. Auf dem Wege gewöhnlicher algebraischer Elimination erhält man nämlich ohne Schwierigkeit:

$$34)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = -\dfrac{\mathfrak{L}\{E_1 - \Theta + \frac{1}{2}(l_1+l'_1)\sin J_1\}\cos J - \mathfrak{L}_1\{E - \Theta + \frac{1}{2}(l+l')\sin J\}\cos J_1}{E - E_1 + \frac{1}{2}(l+l')\sin J - \frac{1}{2}(l_1+l'_1)\sin J_1}, \\ \mathfrak{B} = \dfrac{\mathfrak{L}\cos J - \mathfrak{L}_1\cos J_1}{E - E_1 + \frac{1}{2}(l+l')\sin J - \frac{1}{2}(l_1+l'_1)\sin J_1}. \end{cases}$$

Durch Differentiation erhält man aus den Gleichungen 33) leicht die beiden folgenden Gleichungen:

$$\cos J\,\partial\mathfrak{L} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\sin J\,(\partial l + \partial l') - \{\mathfrak{L}\sin J + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(l+l')\cos J\}\partial J - \mathfrak{B}\,\partial E = \partial\mathfrak{A} + \{E - \Theta + \tfrac{1}{2}(l+l')\sin J\}\partial\mathfrak{B},$$

$$\cos J_1\,\partial\mathfrak{L}_1 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\sin J_1\,(\partial l_1 + \partial l'_1) - \{\mathfrak{L}_1\sin J_1 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(l_1+l'_1)\cos J_1\}\partial J_1 - \mathfrak{B}\,\partial E_1 = \partial\mathfrak{A} + \{E_1 - \Theta + \tfrac{1}{2}(l_1+l'_1)\sin J_1\}\partial\mathfrak{B};$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$35)\quad \begin{cases} \mathfrak{T} = \cos J, \\ \mathfrak{U} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\sin J, \\ \mathfrak{V} = \mathfrak{L}\sin J + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(l+l')\cos J, \\ \mathfrak{W} = E - \Theta + \tfrac{1}{2}(l+l')\sin J \end{cases}$$

$$36)\quad \begin{cases} \mathfrak{T}_1 = \cos J_1, \\ \mathfrak{U}_1 = \frac{1}{2}\mathfrak{B}\sin J_1, \\ \mathfrak{V}_1 = \mathfrak{L}_1 \sin J_1 + \frac{1}{2}\mathfrak{B}(l_1+l'_1)\cos J_1, \\ \mathfrak{W}_1 = E_1 - \Theta + \frac{1}{2}(l_1+l'_1)\sin J_1 \end{cases}$$

setzen:

$$37)\quad \begin{cases} \mathfrak{T}\,\partial\mathfrak{L} - \mathfrak{U}\,(\partial l+\partial l') - \mathfrak{V}\,\partial J - \mathfrak{B}\partial E = \partial\mathfrak{A} + \mathfrak{W}\partial\mathfrak{B}, \\ \mathfrak{T}_1\partial\mathfrak{L}_1 - \mathfrak{U}_1(\partial l_1+\partial l'_1) - \mathfrak{V}_1\partial J_1 - \mathfrak{B}\partial E_1 = \partial\mathfrak{A} + \mathfrak{W}_1\partial\mathfrak{B}. \end{cases}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich:

$$\begin{aligned} 38)\quad \partial\mathfrak{A} = &-\frac{\mathfrak{T}\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial\mathfrak{L} + \frac{\mathfrak{T}_1\mathfrak{W}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial\mathfrak{L}_1 \\ &+\frac{\mathfrak{U}\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}(\partial l+\partial l') - \frac{\mathfrak{U}_1\mathfrak{W}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}(\partial l_1+\partial l'_1) \\ &+\frac{\mathfrak{V}\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial J - \frac{\mathfrak{V}_1\mathfrak{W}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial J_1 \\ &+\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial E - \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{W}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial E_1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 39)\quad \partial\mathfrak{B} = &\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial\mathfrak{L} - \frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial\mathfrak{L}_1 \\ &-\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}(\partial l+\partial l') + \frac{\mathfrak{U}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}(\partial l_1+\partial l'_1) \\ &-\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial J + \frac{\mathfrak{V}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial J_1 \\ &-\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial E + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial E_1 \end{aligned}$$

oder, wenn ∂J und ∂J_1 in Secunden ausgedrückt sein sollen:

$$\begin{aligned} 40)\quad \partial\mathfrak{A} = &-\frac{\mathfrak{T}\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial\mathfrak{L} + \frac{\mathfrak{T}_1\mathfrak{W}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial\mathfrak{L}_1 \\ &+\frac{\mathfrak{U}\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}(\partial l+\partial l') - \frac{\mathfrak{U}_1\mathfrak{W}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}(\partial l_1+\partial l'_1) \\ &+\frac{\mathfrak{V}\mathfrak{W}_1\sin 1''}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial J - \frac{\mathfrak{V}_1\mathfrak{W}\sin 1''}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial J_1 \\ &+\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial E - \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{W}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial E_1 \end{aligned}$$

und

$$41)\quad \partial\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_1}\partial\mathfrak{L} - \frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_1}\partial\mathfrak{L}_1$$
$$- \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_1}(\partial\mathfrak{l}+\partial\mathfrak{l}') + \frac{\mathfrak{U}_1}{\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_1}(\partial\mathfrak{l}_1+\partial\mathfrak{l}'_1)$$
$$- \frac{\mathfrak{B}\sin 1''}{\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_1}\partial J + \frac{\mathfrak{B}_1\sin 1''}{\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_1}\partial J_1$$
$$- \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_1}\partial E + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_1}\partial E_1.$$

II.

Ich will nun noch die Idee zu einem anderen Distanzmesser angeben, werde mich aber für jetzt durchaus nur auf die Darlegung derselben ganz im Allgemeinen beschränken, ohne mich auf Untersuchungen über die Genauigkeit, welche dieses Instrument etwa zu gewähren im Stande sein möchte, einzulassen, weil ich dabei eine grössere Anzahl dioptrischer Sätze in Anwendung zu bringen, und zu öfteren Verweisungen auf meine oben erwähnte, in diesem Augenblicke noch nicht erschienene Schrift genöthigt sein würde. Bemerken will ich jedoch, dass ich diese Untersuchung für um so nöthiger halte, weil ich mir keineswegs verhehle, dass die Ausführung des im Folgenden anzugebenden Instruments allerdings nicht geringen praktischen Schwierigkeiten unterliegen dürfte.

Wir denken uns zwei mit einander verbundene Fernröhre von sehr verschiedener Vergrösserung, deren optische Axen einander parallel sind, auf einem passenden, mit allen nöthigen Vorrichtungen zur groben und feinen Bewegung versehenen Stative aufgestellt, und verbinden mit denselben einen mikrometrischen Apparat, durch welchen die linearen Grössen der Bilder der Objecte mit grosser Genauigkeit gemessen werden können, wobei es jedenfalls am vortheilhaftesten sein wird, wenn sich die Einrichtung so treffen lässt, dass derselbe mikrometrische Apparat bei beiden Fernröhren zur Messung der linearen Grössen der Bilder gebraucht werden kann. Auch wird ein Höhenkreis zur Messung des Neigungswinkels der einander parallelen optischen Axen der beiden Fernröhre gegen den Horizont angebracht, wovon der Zweck leicht von selbst in die Augen fallen wird, wenn wir auch im Folgenden dieser Einrichtung nicht weiter Erwähnung thun werden, da es uns, wie gesagt, für jetzt nur auf die Darlegung der Idee ganz im Allgemeinen ankommt.

Eine gerade Linie, etwa ein Durchmesser eines beliebigen Objects, deren Entfernung von dem Drehpunkte des Instruments p und deren Länge q sein mag, stehe nun auf den einander parallelen optischen Axen der beiden Fernröhre senkrecht. Sind dann die mit dem mikrometrischen Apparate gemessenen linearen Grössen der Bilder dieser Linie in den beiden Fernröhren Q und Q', und bezeichnen i und i' die Entfernungen der Objectivgläser der beiden Fernröhre von dem Drehpunkte des Instruments; so hat man, wie leicht erhellen wird, nach I. 1) für die beiden Fernröhre die folgenden Gleichungen:

$$1)\quad \frac{q}{Q} = A + B(p-i),\quad \frac{q}{Q'} = A' + B'(p-i');$$

wo A, B und A', B' Constanten sind. Durch Elimination von q ergiebt sich aus diesen beiden Gleichungen:

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{A + B(p-i)}{A' + B'(p-i')},$$

und folglich

$$2)\quad p = -\frac{(A-Bi)\,Q - (A'-B'i')\,Q'}{BQ - B'Q'},$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$3)\quad \mathfrak{A} = -\frac{A-Bi}{B},\quad \mathfrak{B} = \frac{A'-B'i'}{B},\quad \mathfrak{C} = \frac{B'}{B}$$

setzt:

$$4)\quad p = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\frac{Q'}{Q}}{1 - \mathfrak{C}\frac{Q'}{Q}},$$

mittelst welcher Formel, wenn die Constanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bekannt sind, die Entfernung p aus dem durch Messung von Q und Q' bestimmten Werthe von $\frac{Q'}{Q}$ berechnet werden kann.

Aus der Gleichung 4) ergiebt sich die Gleichung

$$5)\quad \mathfrak{A} + \frac{Q'}{Q}\mathfrak{B} + p\frac{Q'}{Q}\mathfrak{C} = p.$$

Hat man nun durch wirkliche Messungen eine Reihe zusammengehörender Werthe von p und $\frac{Q'}{Q}$ ermittelt, so erhält man eine Reihe von Gleichungen von der Form:

$$6)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} + \frac{Q'}{Q}\mathfrak{B} + p\,\frac{Q'}{Q}\mathfrak{C} = p, \\ \mathfrak{A} + \frac{Q'_1}{Q_1}\mathfrak{B} + p_1\frac{Q'_1}{Q_1}\mathfrak{C} = p_1, \\ \mathfrak{A} + \frac{Q'_2}{Q_2}\mathfrak{B} + p_2\frac{Q'_2}{Q_2}\mathfrak{C} = p_2, \\ \mathfrak{A} + \frac{Q'_3}{Q_3}\mathfrak{B} + p_3\frac{Q'_3}{Q_3}\mathfrak{C} = p_3, \end{cases}$$

u. s. w.

welche in Bezug auf $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ als unbekannte Grössen vom ersten Grade sind. Hat man drei Gleichungen dieser Art, welches die geringste erforderliche Anzahl derselben ist, so erhält man die Constanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ auf dem Wege gewöhnlicher algebraischer Elimination. Hat man dagegen mehr als drei Gleichungen von der obigen Form, so findet man die Constanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ mittelst der Methode der kleinsten Quadrate.

Hat man Gelegenheit zwei Paare zusammengehörender Werthe von p und q zu messen, so hat man nach 1) zur Bestimmung von A und B zwei Gleichungen von der Form:

$$A + (p-i)B = \frac{q}{Q}, \quad A + (p_1-i)B = \frac{q_1}{Q_1};$$

und zur Bestimmung von A' und B' zwei Gleichungen von der Form:

$$A' + (p-i')B = \frac{q}{Q'}, \quad A' + (p_1-i')B' = \frac{q_1}{Q'_1}.$$

Hat man aber mittelst dieser Gleichungen die Constanten A, B und A', B' gefunden, so ergeben sich die Constanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ mittelst der Formeln 3), und man kann dann zuerst p mittelst der Formel 4), und hierauf auch q mittelst einer der beiden unmittelbar aus 1) fliessenden Formeln

$$7) \quad q = \{A + B(p-i)\}Q, \quad q = \{A' + B'(p-i')\}Q'$$

berechnen.

Bemerken wollen wir endlich noch, dass man, so wie vorher q, aus den beiden Gleichungen 1) auch p eliminiren, und sich ähnliche Vorschriften wie vorher zur unmittelbaren Bestimmung von p auch zur unmittelbaren Bestimmung von q bilden könnte, welches weiter auszuführen wir jedoch füglich dem Leser überlassen können.

Mit diesen allgemeinen Andeutungen über den vorliegenden Gegenstand müssen wir uns jetzt vorläufig begnügen.

XXIV.

Kriterium der Stabilität schwimmender Körper.

von

Herrn R. Hoppe,

Lehrer der Mathematik in Keilhau bei Rudolstadt.

Das Gleichgewicht eines schwimmenden Körpers hängt bekanntlich von zwei Bedingungen ab: erstlich muss seine Gesammtschwere dem Drucke der Flüssigkeit, zweitens die Theile des Körpers einander das Gleichgewicht halten. Es giebt für jeden Körper mehr als eine Lage, und zwar im Allgemeinen eine bestimmte Anzahl derselben, für welche jene zwei Bedingungen erfüllt sind. Diese Lagen sind wieder zweierlei Art: entweder bringt jede kleine Verrückung des Körpers aus derselben Rückkehr hervor, dieselbe zur Folge, oder nicht. Im erstern Falle heisst sie stabil, und das Gleichgewicht sicher, im andern heisst dieses unsicher. Um beiderlei Lagen zu unterscheiden, hätte man demzufolge auf der Lage des Gleichgewichts noch andere benachbarte Lagen zu betrachten, was, im Einzelnen vollzogen, eine verhältnissmäßig weitläufige Rechnung erfordern würde. Der gegenwärtige Aufsatz soll nun zeigen, wie sich aus der Lage des Gleichgewichts allein das Kriterium der Stabilität entnehmen, und auf zwei, auch anderweitig häufig gebrauchte, und leicht zu findende Grössen zurückführen lässt. Da sich die Untersuchung, mit alleiniger Voraussetzung der bekanntesten Principien der Mechanik, ohne Hülfe der Differenzialrechnung führen lässt, so wollen wir die elementare Form wählen, zumal sich die analytische ohne Schwierigkeit daraus entnehmen lässt.

Die Masse eines schwimmenden Körpers sei $=m$, das verdrängte Volum der Flüssigkeit v, das specifische Gewicht des letztern $=\alpha$, die positive oder negative Höhe des Schwerpunkts von m über dem Niveau $=z$, die jederzeit positive Tiefe des Schwerpunkts von v unter dem Niveau $=z'$. Alsdann lassen sich alle wirkenden Kräfte in zwei zusammensetzen: eine $=m$, welche längs z abwärts, und eine $=\alpha v$, welche längs z' aufwärts wirkt. Zwei entgegengesetzt gerichtete Kräfte sind aber nur dann im Gleichgewicht, wenn sie gleich sind und in einer Linie wir-

Hieraus ergeben sich die zwei bekannten Bedingungen des Gleichgewichts schwimmender Körper: 1) dass $m = \alpha v$ oder das Gewicht des Körpers gleich dem der verdrängten Flüssigkeit sei; 2) dass z und z' in eine Linie fallen, oder dass die Schwerpunkte der genannten Massen auf einer Verticale liegen.

Denkt man sich nun, dass der Körper um eine beliebige Axe eine Drehung um den unendlich kleinen Winkel ε erleide, dass aber die ihn umgebende Flüssigkeit diese Bewegung mitmache: so werden die zwei Schwerpunkte ihre Lage zum Körper, und die zwei resultirenden Kräfte m und αv ihre Grösse nicht ändern; dagegen ihre Richtungen mit der Geraden $z + z'$ den Winkel ε einschliessen. Es entsteht demnach ein Kräftepaar von der Breite $(z+z')\sin\varepsilon$ und dem Momente $m(z+z')\sin\varepsilon$; dieses Paar hat die Tendenz, den Körper von seiner anfänglichen Lage zu entfernen.

Lässt man jetzt das Niveau in seine horizontale Lage zurückkehren, so werden beide Ebenen, die erste und zweite Lage, einen Winkel $= \varepsilon$ einschliessen und aus dem Körper zwei Keile herausschneiden, von denen der auftauchende dem Volum nach $= k$, der untertauchende $= k'$ sei. Wir wollen jetzt untersuchen, wie die obengenannte Drehungsaxe liegen muss, damit das Gleichgewicht des Körpers mit der Flüssigkeit bei der Drehung ungestört bleibt. Es seien f und f' die vom Niveau, respective im ersten und zweiten Zustande gebildeten, Schnitte des Körpers, l ihre Durchschnittslinie oder die Drehungsaxe: so lässt sich zeigen, dass l durch den Schwerpunkt von f gehen muss. Beschreibt man nämlich über f als Grundfläche ein senkrechtes Prisma C von der Höhe h, so bildet f' mit dessen zweiter Endfläche ein schräg geschnittenes Prisma C'. Ein solches ist bekanntlich gleich dem Producte aus der Grundfläche und dem Höhenperpendikel im Schwerpunkte derselben h', also

$$C = fh; \quad C' = fh'.$$

Für ein unendlich kleines ε fällt f' in den schrägen Schnitt des Prismas und deckt ihn, so dass

$$C' = C \pm (k - k')$$

wird. Damit nun v unverändert bleibt, muss $k = k'$ sein, folglich ist $C' = C$ oder $h' = h$, d. h. der Schwerpunkt von f liegt zugleich in f', und l geht durch denselben.

Durch das Zurücktreten der Flüssigkeit ist ein neues Kräftepaar entstanden: der auftauchende Theil des Körpers hat ein Gewicht $= \alpha k$ gewonnen, der untertauchende ebensoviel nämlich $\alpha k'$ verloren. Die zwei resultirenden gleichen und entgegengesetzten Kräfte werden durch die Schwerpunkte von k und k' gehen, daher die Breite des Paares gleich der Entfernung beider sein. Diese steht im Allgemeinen nicht senkrecht auf l, also wirkt das neue Paar dem alten nicht direct entgegen, sondern nur diejenige Composante desselben, welche man durch Projection jener Entfernung auf eine auf l senkrechte Ebene erhält, d. i. deren Breite die Summe der Entfernungen jener Schwerpunkte von l ist. Nennen wir die Entfernungen der Schwerpunkte von k und k' von l respective

b und b', so ist das Moment desjenigen Kräftepaars, welches den Körper in seine alte Lage direct zurückzuführen strebt, $= \alpha k(b+b')$.

Es sei jetzt e ein Element des zu k gehörigen Theiles f_0 der Fläche f, e' ein Element des zu k' gehörigen, f_1; x und x' deren Entfernungen von l. Errichtet man auf e und e' Prismen bis sie von f' als zweite Endfläche geschnitten werden, so ist deren Höhe $x \sin\varepsilon$ und $x' \sin\varepsilon$; demnach $ex \sin\varepsilon$ ein Element von k, $e'x' \sin\varepsilon$ ein solches von k'. Multiplicirt man jedes Element mit seiner Entfernung von l, und summirt alle Elemente bis man k und k' vollständig erhält, so ist die Summe respective kb und $k'b'$; folglich

$$kb = Sex^2 \sin\varepsilon, \quad kb' = Se'x'^2 \sin\varepsilon;$$
$$k(b+b') = (Sex^2 + Se'x'^2) \sin\varepsilon;$$

d. i. die Summe aller Elemente von f, jedes mit dem Quadrat seiner Entfernung multiplicirt, oder das Trägheitsmoment der Fläche f in Bezug auf die Axe l, das wir durch M bezeichnen wollen, mit $\sin\varepsilon$ multiplicirt. Mithin ist das Moment des zweiten Paares $= \alpha M \sin\varepsilon$. Setzt man beide Paare zusammen, so resultirt das Moment

$$p \sin\varepsilon = (\alpha M - m(z+z')) \sin\varepsilon.$$

Ist p positiv, so wird demnach der Körper in seine alte Lage zurückkehren, ist es negativ, sich davon entfernen, unter der Voraussetzung, dass er sich allein um l drehen kann.

Wäre der Körper nach der entgegengesetzten Seite gedreht worden, so hätte sich nur das Zeichen von ε, also auch nur das des resultirenden Moments geändert; es wäre demnach die entgegengesetzte Bewegung mit gleicher Kraft erfolgt, d. h. für positive p in die alte Lage zurück, für negative von derselben hinweg.

Damit nun die Lage des Körpers stabil sei, wird erfordert, dass p für jede Richtung von l in der Ebene f positiv sei. Da von dieser Richtung allein M abhängt, so wird p stets positiv sein, wenn es für das Minimum von M positiv ist. Bekanntlich ist das Trägheitsmoment einer Ebene überhaupt am kleinsten für eine Axe, die in derselben durch ihren Schwerpunkt geht. Daher kann man den gewonnenen Satz so aussprechen:

Das Gleichgewicht eines schwimmenden Körpers ist sicher oder unsicher, jenachdem das Product des specifischen Gewichts der Flüssigkeit in das kleinste Trägheitsmoment des vom Niveau gebildeten Schnittes des Körpers grösser oder kleiner ist als das Product der Körpermasse in die Höhe ihres Schwerpunkts über dem des verdrängten Volums.

Dieser Satz lässt gleichwohl noch den Fall $p=0$ unberücksichtigt, in welchem die Stabilität nicht mehr von M und $z+z'$ allein abhängt. Hier würden die unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung, die wir vernachlässigt haben, in Betracht kommen, und die Neigungen der Oberfläche gegen das Niveau in der Nähe desselben in die Untersuchung zu ziehen sein, was einen besondern Gegenstand für diese bilden würde.

Als Beispiel wollen wir ein homogenes rechtwinkliges Parallelepipedon wählen, welches offenbar im Gleichgewicht schwimmt, wenn zwei Flächen dem Niveau parallel sind, und die Bedingung der Stabilität dieser Lage suchen. Es sei a die verticale Kante, b und c die horizontalen, und zwar $b \geqq c$; ferner β das specifische Gewicht, das der Flüssigkeit $=1$ gesetzt. Das kleinste Trägheitsmoment des Schnittes bc ist (was wir als anderweitig bekannt voraussetzen) $=\frac{1}{12} bc^3$. Die Masse $m = v = \beta abc$, also die Höhe von $v = \beta a$. Hieraus ergiebt sich sehr leicht die Lage der Schwerpunkte; man wird finden

$$z = \frac{1}{2} a - \beta a, \quad z' = \frac{1}{2} \beta a;$$

$$z + z' = \frac{1}{2} a(1-\beta);$$

folglich

$$p = M - m(z+z') = \frac{1}{12} bc^3 - \frac{1}{2} \beta(1-\beta) a^2 bc.$$

Demnach ist die Bedingung der Stabilität

$$\frac{1}{6} c^2 - \beta(1-\beta) a^2 > 0,$$

$$\frac{c}{a} > \sqrt{6\beta(1-\beta)};$$

oder, wenn man β entwickelt:

$$\beta < \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{c^2}{6a^2}} \text{ und } \beta > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{c^2}{6a^2}}.$$

Das Maximum von $\sqrt{6\beta(1-\beta)}$ ist (für $\beta = \frac{1}{2}$) $= \sqrt{\frac{3}{2}}$; ist also

$$\frac{c}{a} > \sqrt{\frac{3}{2}},$$

so ist die genannte Lage für jedes specifische Gewicht stabil.

XXV.

Das Binomialtheorem, die Exponentialreihe, die logarithmische Reihe, die Reihen für den Sinus und Cosinus und die Reihe für den durch seine Tangente bestimmten Arcus, zusammenhängend im Geiste der neueren Analysis dargestellt.

Von
dem Herausgeber.

---

§. 1.

Ich werde in dieser Abhandlung, in welcher ich übrigens durchaus nicht überall Neues zu geben die Absicht habe, alle Reihen, welche für die gesammte Mathematik von der grössten Wichtigkeit, und namentlich als unentbehrlich für alle Untersuchungen über die Functionen anzusehen sind, nämlich die Binomialreihe, die Exponentialreihe, die logarithmische Reihe, die Reihen für den Sinus und Cosinus, und die Reihe für den durch seine Tangente bestimmten Arcus, zusammenhängend im Geiste der neueren Analysis darzustellen suchen, und bemerke hierbei vorläufig, dass ich bei dieser Darstellung als deren Hauptfundament die Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen als bekannt voraussetze, mir aber vorbehalte, auch diese so höchst wichtige Lehre in dem Archive bald einmal mit möglichster Vollständigkeit zu entwickeln. In der vorliegenden Abhandlung werden übrigens nur solche Sätze aus derselben zur Anwendung kommen, welche ganz mit demselben Rechte, wie etwa die bekannten Elementarsätze von der Addition, Subtraction, Multiplication und Division als Haupt- und Fundamentalsätze der gemeinen Arithmetik zu betrachten sind, als Haupt- und Fundamentalsätze der Analysis angesehen werden müssen, und daher, wie hier geschieht, allerdings füglich als einem Jeden, der überhaupt der neueren Analysis ein sorgfältiges und einigermaassen umfassendes Studium gewidmet hat, hinreichend bekannt vorausgesetzt werden dürfen. Vorzüg-

bemühen werde ich mich in dieser Abhandlung, das Binomialtheorem mit möglichster Vollständigkeit und Allgemeinheit darzustellen, und als natürliche und unmittelbare Fortsetzung werde ich derselben bald eine zweite Abhandlung folgen lassen, welche die Erweiterung der in der Abhandlung Archiv. Thl. I. Nro. XL. S. 295. in ihren Grundelementen entwickelten Lehre von den imaginären Grössen zum Zweck hat.

§. 2.

Zuerst stellen wir uns die Aufgabe, die Reihe

$$1,\ \alpha_1(a+b\sqrt{-1}),\ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2,\ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3,\ \ldots$$

wo a, b und α sämmtlich endliche völlig bestimmte reelle Grössen sind, und

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ \ldots.$$

wie gewöhnlich die Binomial-Coefficienten für den Exponenten α nach der Ordnung bezeichnen, in allen den Fällen, wo dieselbe convergirt und also auch bloss einer Summation fähig ist, zu summiren. Weil man aber bekanntlich (Archiv. Thl. I. S. 297.)

$$a+b\sqrt{-1} = \varrho(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}),$$

wo ϱ positiv ist und, wie bekannt, der Modulus der imaginären Grösse $a+b\sqrt{-1}$ genannt wird, also nach dem Moivre'schen Theoreme (a. a. S. 301.)

$$(a+b\sqrt{-1})^n = \varrho^n(\cos n\Theta + \sin n\Theta\sqrt{-1}),$$

wo n eine positive ganze Zahl bezeichnen soll, setzen kann; so lässt sich die obige Reihe jederzeit auf die Form

$$\begin{aligned}
&1,\\
&\alpha_1\varrho\ (\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}),\\
&\alpha_2\varrho^2(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}),\\
&\alpha_3\varrho^3(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}),\\
&\alpha_4\varrho^4(\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1}),\\
&\qquad\text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

bringen, und kann daher immer summirt werden, wenn man diese letztere Reihe zu summiren im Stande ist, weshalb wir uns jetzt zuvörderst, indem wir, um die Untersuchung etwas zu verallgemeinern, x eine beliebige positive oder negative Grösse bedeuten lassen, mit der Summirung der Reihe

$$1,$$
$$\alpha_1 x\,(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\alpha_2 x^2(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\alpha_3 x^3(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\alpha_4 x^4(\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1}),$$
u. s. w.

in allen den Fällen, wo dieselbe überhaupt möglich ist, beschäftigen, und dabei die Summe dieser Reihe, wenn es nämlich eine Summe derselben giebt, durch $F(\alpha)$ bezeichnen wollen.

§. 3.

Wenn zuerst α eine positive ganze Zahl ist, so bricht wegen der vom $(\alpha+1)$sten an verschwindenden Binomial-Coefficienten die zu summirende Reihe mit dem $(\alpha+1)$sten Gliede ab, und ist also in diesem Falle als eine endliche Reihe stets einer Summation fähig.

In der im vorhergehenden Paragraphen eingeführten Bezeichnung ist nun

$$1)\quad F(\alpha) = 1 + \alpha_1 x\,(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) + \alpha_2 x^2(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}) + \alpha_3 x^3(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}) \quad \ldots\ldots\ldots + \alpha_\alpha x^\alpha(\cos\alpha\Theta + \sin\alpha\Theta\sqrt{-1}),$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung mit

$$1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})$$

multiplicirt:

$$\{1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\}F(\alpha) = 1 + (1+\alpha_1)x\,(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) + (\alpha_1+\alpha_2)x^2(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}) + (\alpha_2+\alpha_3)x^3(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1})$$
u. s. w.
$$+ (\alpha_{\alpha-1}+\alpha_\alpha)x^\alpha(\cos\alpha\Theta + \sin\alpha\Theta\sqrt{-1}) + \alpha_\alpha x^{\alpha+1}(\cos(\alpha+1)\Theta + \sin(\alpha+1)\Theta\sqrt{-1}).$$

Also ist nach ein Paar bekannten Sätzen von den Binomial-Coefficienten:

$$\begin{aligned}
&\{1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\}F(\alpha)\\
&= 1 + (\alpha+1)_1 x\,(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\\
&\quad + (\alpha+1)_2 x^2(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1})\\
&\quad + (\alpha+1)_3 x^3(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1})\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\\
&\quad + (\alpha+1)_{\alpha+1} x^{\alpha+1}(\cos(\alpha+1)\Theta + \sin(\alpha+1)\Theta\sqrt{-1}),
\end{aligned}$$

. i. weil der Analogie nach die Summe der Reihe auf der rechten eite des Gleichheitszeichens offenbar durch $F(\alpha+1)$ zu be eichnen ist:

$$2)\quad F(\alpha+1) = \{1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\}F(\alpha).$$

Weil nun wegen der Gleichung 1) augenscheinlich

$$F(1) = 1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})$$

t, so ist nach der Gleichung 2) successive:

$$\begin{aligned}
F(1) &= 1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}),\\
F(2) &= \{1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\}F(1)\\
&= \{1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\}^2,\\
F(3) &= \{1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\}F(2)\\
&= \{1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\}^3,\\
F(4) &= \{1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\}F(3)\\
&= \{1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\}^4,
\end{aligned}$$

u. s. w.

nd folglich offenbar allgemein:

$$3)\quad F(\alpha) = \{1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\}^\alpha,$$

wobei aber natürlich immer vorausgesetzt wird, dass α eine po itive ganze Zahl ist.

Setzt man

$$\{1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\}^\alpha = \varrho(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}),$$

hat man zur Bestimmung des positiven Modulus ϱ und des ogens φ die beiden Gleichungen:

$$\varrho\cos\varphi = 1 + x\cos\Theta,\quad \varrho\sin\varphi = x\sin\Theta;$$

aus denen sich, wenn man auf beiden Seiten quadrirt und addirt, leicht

$$\varrho^2 = 1 + 2x\cos\Theta + x^2,$$

also

$$4)\quad \varrho = (1 + 2x\cos\Theta + x^2)^{\frac{1}{2}};$$

und

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{x\sin\Theta}{1 + x\cos\Theta},$$

also

$$5)\quad \varphi = \operatorname{Arc\,tang}\frac{x\sin\Theta}{1 + x\cos\Theta}$$

ergiebt, wo aber, da ϱ positiv sein soll, und die Erfüllung beiden Gleichungen

$$\varrho\cos\varphi = 1 + x\cos\Theta,\quad \varrho\sin\varphi = x\sin\Theta$$

zugleich erfordert wird, der Bogen φ so genommen werden n dass er sich im ersten Quadranten endigt, wenn $1 + x\cos\Theta$ auch $x\sin\Theta$ positiv ist: dagegen muss sich φ im zweiten dranten endigen, wenn $1 + x\cos\Theta$ negativ und $x\sin\Theta$ positiv im dritten Quadranten muss sich φ endigen, wenn $1 + x\cos$ gativ und auch $x\sin\Theta$ negativ ist; im vierten Quadranten en muss sich φ endigen, wenn $1 + x\cos\Theta$ positiv und $x\sin$ gativ ist.

Wenn also α eine positive ganze Zahl ist, und der Boge

$$\varphi = \operatorname{Arc\,tang}\frac{x\sin\Theta}{1 + x\cos\Theta}$$

den vorher angegebenen Bedingungen gemäss genommen wird ist nach dem Obigen

$$6)\quad F(\alpha) = (1 + 2x\cos\Theta + x^2)^{\frac{\alpha}{2}}(\cos\alpha\varphi + \sin\alpha\varphi\sqrt{-1}),$$

oder, vollständig entwickelt:

$$7)\quad F(\alpha) =$$

$$(1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\cos\alpha\operatorname{Arctg}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta} + \sin\alpha\operatorname{Arctg}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}\cdot\sqrt{-\right.$$

Wenn α keine positive ganze Zahl ist, so läuft die zu s mirende Reihe

$$1,$$
$$\alpha_1 x\,(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\alpha_2 x^2(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\alpha_3 x^3(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\alpha_4 x^4(\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1}),$$

u. s. w.

Unendliche fort, und erfordert daher, bevor wir zu ihrer mation schreiten können, eine besondere Untersuchung rücktlich ihrer Convergenz und Divergenz.

Weil nun nach der Theorie der Binomial-Coefficienten

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n \cdot \frac{\alpha - n}{n+1},$$

folglich

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\alpha - n}{n+1} = -1 + \frac{\alpha+1}{n+1}$$

so nähert sich der Bruch

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n},$$

n n wächst, der Gränze -1, und kann derselben beliebig gebracht werden, wenn man nur n gross genug annimmt. er wird sich aber, wie sogleich in die Augen fällt, eine Grösse solcher Beschaffenheit angeben lassen, dass für jedes diese se übersteigende n der Bruch

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = -1 + \frac{\alpha'+1}{n+1}$$

tiv, und folglich

$$1 - \frac{\alpha+1}{n+1}$$

absolute Werth dieses Bruches ist. Wenn nun n nur erst e Grösse überstiegen hat und dann fernerhin wächst, so nähert offenbar der absolute Werth des Bruchs

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$$

Einheit immer mehr und mehr und kann derselbe beliebig nahe acht werden, wenn man nur n gross genug annimmt, woraus nach einem bekannten Satze der Lehre von der Convergenz Divergenz der Reihen ergiebt, dass die zu summirende Reihe

für jedes zwischen den Gränzen -1 und $+1$ liegende x convergirt, für jedes ausserhalb dieser Gränzen liegende x dagegen divergirt. Weil ferner der absolute Werth von $\alpha_n x^n$ offenbar der Modulus des allgemeinen Gliedes

$$\alpha_n x^n (\cos n\Theta + \sin n\Theta \sqrt{-1})$$

unserer Reihe ist, so bilden nach einem bekannten Satze aus der Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen für jedes zwischen den Gränzen -1 und $+1$ liegende x auch die Moduli der einzelnen Glieder unserer Reihe eine convergirende Reihe.

Nehmen wir jetzt immer an, dass x zwischen den Gränzen -1 und $+1$ liegt, so ist in der eingeführten Bezeichnung für jedes α und β

$$\begin{aligned} 8)\quad F(\alpha) = 1 &+ \alpha_1 x\,(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ \alpha_2 x^2(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ \alpha_3 x^3(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ \alpha_4 x^4(\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 9)\quad F(\beta) = 1 &+ \beta_1 x\,(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ \beta_2 x^2(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ \beta_3 x^3(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ \beta_4 x^4(\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

und folglich nach bekannten Sätzen aus der Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen und aus der Lehre von den imaginären Grössen, weil, was man nicht zu übersehen hat, auch die Moduli der einzelnen Glieder der beiden vorhergehenden convergirenden Reihen unter den gemachten Voraussetzungen convergirende Reihen bilden:

$$\begin{aligned} 10)\quad F(\alpha).F(\beta) = 1 &+ (\alpha_1+\beta_1)x\,(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ (\alpha_2+\alpha_1\beta_1+\beta_2)x^2(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ (\alpha_3+\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_2+\beta_3)x^3(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ (\alpha_4+\alpha_3\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_1\beta_3+\beta_4)x^4(\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

also nach dem in der Abhandlung Archiv. Thl. I. Nr. X. S. 72. bewiesenen merkwürdigen Satze von den Binomial-Coefficienten:

$$11)\quad F(\alpha).F(\beta) = 1 + (\alpha+\beta)_1 x\,(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) + (\alpha+\beta)_2 x^2(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}) + (\alpha+\beta)_3 x^3(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}) + (\alpha+\beta)_4 x^4(\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1}) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d. i. in der eingeführten Bezeichnung:

$$12)\quad F(\alpha).F(\beta) = F(\alpha+\beta).$$

Durch successive Anwendung dieser Relation erhält man aber leicht

$$13)\quad F(\alpha).F(\beta).F(\gamma)\ldots F(\mu) = F(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\mu).$$

Wenn $\alpha=\beta=\gamma=\ldots=\mu$ gesetzt und die Anzahl dieser Grössen durch n bezeichnet wird, so erhält man die für jedes positive ganze n geltende Relation

$$14)\quad \{F(\alpha)\}^n = F(n\alpha).$$

Setzt man in der Gleichung 12) die Grösse $\beta=-\alpha$, also $\alpha+\beta=0$, so erhält man

$$15)\quad F(\alpha).F(-\alpha) = F(0),$$

und folglich, weil nach dem Obigen offenbar $F(0)=1$ ist:

$$16)\quad F(\alpha).F(-\alpha) = 1$$

oder

$$17)\quad F(-\alpha) = \frac{1}{F(\alpha)} = \{F(\alpha)\}^{-1}.$$

Ist nun α eine positive ganze Zahl, so ist nach 3)

$$F(\alpha) = \{1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\}^{\alpha},$$

und folglich nach 17)

$$18)\quad F(-\alpha) = \{1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\}^{-\alpha}.$$

Ist ferner $\alpha=\frac{\lambda}{\mu}$, wo λ eine positive oder negative, μ eine positive ganze Zahl sein soll, so ist nach 14)

$$\{F(\tfrac{\lambda}{\mu})\}^{\mu} = F(\mu\tfrac{\lambda}{\mu}) = F(\lambda),$$

und folglich nach 3) und 18):

$$19)\quad \{F(\tfrac{\lambda}{\mu})\}^{\mu} = \{1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\}^{\lambda}.$$

Setzen wir jetzt wieder

$$1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) = \varrho(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}),$$

wo ϱ eine positive Grösse ist, so haben wir zur Bestimmung von ϱ und φ wie oben die beiden Gleichungen

$$\varrho\cos\varphi = 1 + x\cos\Theta,\quad \varrho\sin\varphi = x\sin\Theta;$$

aus denen auf gewöhnliche Weise

$$20)\quad \varrho = (1 + 2x\cos\Theta + x^2)^{\frac{1}{2}}$$

folgt. Ferner erhält man aus diesen beiden Gleichungen durch Division

$$21)\quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{x\sin\Theta}{1 + x\cos\Theta},$$

also

$$22)\quad \varphi = \operatorname{Arc\,tang}\frac{x\sin\Theta}{1 + x\cos\Theta}.$$

Weil jetzt nach der Voraussetzung x zwischen -1 und $+1$ liegt, und folglich offenbar

$$\cos\varphi = \frac{1 + x\cos\Theta}{\varrho}$$

stets positiv ist, so werden wir den beiden obigen Gleichungen auf die einfachste Weise genügen, wenn wir für φ den zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegenden Bogen nehmen, dessen Tangente die Grösse

$$\frac{x\sin\Theta}{1 + x\cos\Theta}$$

ist. Dies vorausgesetzt, ist nach dem Vorgehenden

$$1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$= (1 + 2x\cos\Theta + x^2)^{\frac{1}{2}}(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}),$$

und folglich nach 19):

$$23)\quad \{F(\tfrac{\lambda}{\mu})\}^{\mu} = (1 + 2x\cos\Theta + x^2)^{\frac{\lambda}{2}}(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^{\lambda},$$

oder nach dem Moivre'schen Satze:

$$24)\quad |F(\tfrac{\lambda}{\mu})|^{\mu} = (1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\lambda}{2}}(\cos\lambda\varphi+\sin\lambda\varphi\sqrt{-1}).$$

Also ist nach der Lehre von den imaginären Grössen (Archiv. Th. I. S. 302.), wenn k eine ganze Zahl bezeichnet:

$$25)\quad F(\tfrac{\lambda}{\mu}) =$$

$$(1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\lambda}{2\mu}}(\cos\frac{\lambda\varphi+2k\pi}{\mu}+\sin\frac{\lambda\varphi+2k\pi}{\mu}\sqrt{-1}),$$

wo es nun auf die Bestimmung von k ankommt.

Es erhellet aber leicht, dass k nicht von x abhängig sein kann. So lange nämlich x zwischen -1 und $+1$ liegt, und folglich die Reihe convergirt, ändert sich $F(\frac{\lambda}{\mu})$, und folglich auch

$$(1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\lambda}{2\mu}}(\cos\frac{\lambda\varphi+2k\pi}{\mu}+\sin\frac{\lambda\varphi+2k\pi}{\mu}\sqrt{-1}),$$

stetig, wenn x sich stetig ändert. Also muss sich offenbar auch

$$\frac{\lambda\varphi+2k\pi}{\mu}$$

stetig ändern, wenn x zwischen den Gränzen -1 und $+1$ sich stetig ändert. Da nun aber

$$\varphi = \text{Arc tang}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

sich stetig ändert, wenn x zwischen den Gränzen -1 und $+1$ sich stetig ändert, so muss k offenbar entweder von x unabhängig sein, oder sich stetig ändern, wenn x zwischen den Gränzen -1 und $+1$ sich stetig ändert. Letzteres ist aber, weil k eine ganze Zahl ist, nicht möglich, und k muss folglich von x unabhängig sein, wie behauptet wurde. Kann man also k für irgend einen besondern Werth von x bestimmen, so wird k im Allgemeinen bestimmt sein. Setzt man nun in der Gleichung 22) die Grösse $x=0$, so ist auch der zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmende Bogen $\varphi=0$, und folglich nach 25)

$$1 = \cos\frac{2k\pi}{\mu}+\sin\frac{2k\pi}{\mu}\sqrt{-1},$$

also

$$\cos\frac{2k\pi}{\mu}=1,\quad \sin\frac{2k\pi}{\mu}=0.$$

Folglich ist offenbar, wenn k_1 eine ganze Zahl bezeichnet,

$$\frac{2k\pi}{\mu} = 2k_1\pi,$$

also nach 25)

$$F(\tfrac{\lambda}{\mu}) = (1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\lambda}{2\mu}}\{\cos(\tfrac{\lambda}{\mu}\varphi+2k_1\pi)+\sin(\tfrac{\lambda}{\mu}\varphi+2k_1\pi)\sqrt{-1}\},$$

und folglich, weil nach bekannten goniometrischen Formeln

$$\cos(\tfrac{\lambda}{\mu}\varphi+2k_1\pi) = \cos\tfrac{\lambda}{\mu}\varphi,\ \sin(\tfrac{\lambda}{\mu}\varphi+2k_1\pi) = \sin\tfrac{\lambda}{\mu}\varphi$$

ist:

$$26)\quad F(\tfrac{\lambda}{\mu}) = (1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\lambda}{2\mu}}(\cos\tfrac{\lambda}{\mu}\varphi+\sin\tfrac{\lambda}{\mu}\varphi\sqrt{-1}).$$

Fasst man jetzt alles Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich überhaupt Folgendes.

Wenn α eine positive ganze Zahl ist, so ist für jedes x

$$\begin{aligned}27)\quad &(1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}(\cos\alpha\varphi+\sin\alpha\varphi\sqrt{-1})\\ &= 1+\alpha_1 x\,(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\\ &\quad+\alpha_2 x^2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})\\ &\quad+\alpha_3 x^3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})\\ &\quad+\alpha_4 x^4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})\\ &\quad+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

wo

$$\varphi = \text{Arc tang}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

ist, und sich im ersten, zweiten, dritten, vierten Quadranten endigen muss, jenachdem $1+x\cos\Theta$ positiv und $x\sin\Theta$ positiv, $1+x\cos\Theta$ negativ und $x\sin\Theta$ positiv, $1+x\cos\Theta$ negativ und $x\sin\Theta$ negativ, $1+x\cos\Theta$ positiv und $x\sin\Theta$ negativ ist. Sollten Zähler und Nenner des Bruchs

$$\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

verschwinden, so ist, wie aus dem Vorhergehenden von selbst erhellet, die Summe

$$(1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}(\cos\alpha\varphi+\sin\alpha\varphi\sqrt{-1})$$

jederzeit als verschwindend zu betrachten. Auch hat man zu bemerken, dass in diesem Falle die Grösse

$$1+2x\cos\Theta+x^2=(1+x\cos\Theta)^2+x^2\sin\Theta^2$$

verschwindet.

Wenn α keine positive ganze Zahl ist, so ist für jedes zwischen -1 und $+1$ liegende x

$$\begin{aligned}28)\quad (1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}(\cos\alpha\varphi+\sin\alpha\varphi\sqrt{-1})\\ =1+\alpha_1 x\,(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\\ +\alpha_2 x^2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})\\ +\alpha_3 x^3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})\\ +\alpha_4 x^4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

wo

$$\varphi=\operatorname{Arc\,tang}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

ist, und immer zwischen den Gränzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden muss.

Für jedes ausserhalb der Gränzen -1 und $+1$ liegende x divergirt in dem Falle, wenn α keine positive ganze Zahl ist, die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der Gleichung 28), und hat daher keine Summe.

Hieraus ergeben sich nun auch unmittelbar die beiden folgenden wichtigen Gleichungen:

$$\begin{aligned}29)\quad (1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}\cos\alpha\varphi\\ =1+\alpha_1 x\cos\Theta+\alpha_2 x^2\cos 2\Theta+\alpha_3 x^3\cos 3\Theta+\ldots.,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}30)\quad (1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}\sin\alpha\varphi\\ =\alpha_1 x\sin\Theta+\alpha_2 x^2\sin 2\Theta+\alpha_3 x^3\sin 3\Theta+\ldots.;\end{aligned}$$

für jedes x, wenn α eine positive ganze Zahl ist, und für jedes zwischen den Gränzen -1 und $+1$ liegende x, wenn α keine positive ganze Zahl ist. Im ersten Falle ist

$$\varphi=\operatorname{Arc\,tang}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

und muss sich im ersten, zweiten, dritten, vierten Quadranten endigen, jenachdem $1+x\cos\Theta$ positiv und $x\sin\Theta$ positiv, $1+x\cos\Theta$ negativ und $x\sin\Theta$ positiv, $1+x\cos\Theta$ negativ und $x\sin\Theta$ negativ, $1+x\cos\Theta$ positiv und $x\sin\Theta$ negativ ist. Im zweiten Falle ist

$$\varphi = \text{Arc tang}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

und muss immer zwischen den Gränzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden.

§. 4.

Die Reihe

$$1,\ \alpha_1(a+b\sqrt{-1}),\ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2,\ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3,\ \ldots.$$

kann nun leicht summirt werden.

Zu dem Ende setze man

$$a+b\sqrt{-1} = \varrho(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}),$$

so erhält man

$$\varrho = \sqrt{a^2+b^2},\ \cos\Theta = \frac{a}{\varrho},\ \sin\Theta = \frac{b}{\varrho};$$

und die gegebene Reihe wird:

$$1,$$
$$\alpha_1\varrho\ (\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\alpha_2\varrho^2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1}).$$
$$\alpha_3\varrho^3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\alpha_4\varrho^4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\text{u. s. w.}$$

Die Summe dieser letzteren Reihe ist nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$(1+2\varrho\cos\Theta+\varrho^2)^{\frac{\alpha}{2}}(\cos\alpha\varphi+\sin\alpha\varphi\sqrt{-1}),$$

wo

$$\varphi = \text{Arc tang}\frac{\varrho\sin\Theta}{1+\varrho\cos\Theta} = \text{Arc tang}\frac{b}{1+a}$$

ist, für jedes positive $\varrho = \sqrt{a^2+b^2}$, d. i. für jedes a und b, wenn α eine positive ganze Zahl ist, und für $\varrho < 1$, d. i. für $\sqrt{a^2+b^2} < 1$, wenn α keine positive ganze Zahl ist. Im ersten Falle, wenn nämlich α eine positive ganze Zahl ist, muss der Bogen φ so genommen werden, dass er sich im ersten, zweiten, dritten, vierten Quadranten endigt, jenachdem $1+a$ positiv und b positiv, $1+a$ negativ und b positiv, $1+a$ negativ und b negativ, $1+a$ positiv

d b negativ ist. Im zweiten Falle, wenn nämlich α keine posi-
e ganze Zahl ist, hat man den Bogen φ immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$
d $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen.

Weil nun

$$1+2\varrho\cos\Theta+\varrho^2=1+2a+a^2+b^2=(1+a)^2+b^2$$

t, so ist

$$\text{l)}\quad \{(1+a)^2+b^2\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos(\alpha\,\mathrm{Arctang}\frac{b}{1+a})+\sin(\alpha\,\mathrm{Arctang}\frac{b}{1+a})\sqrt{-1}\}$$

$$=1+\alpha_1(a+b\sqrt{-1})+\alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2+\alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3+\alpha_4(a+b\sqrt{-1})^4+\ldots\ldots\ldots$$

ir jedes a und b, wenn α eine positive ganze Zahl ist, und für
$\sqrt{a^2+b^2}<1$, wenn α keine positive ganze Zahl ist. Für $\sqrt{a^2+b^2}>1$
t die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens
ach dem Obigen offenbar divergent, wenn α keine positive ganze
ahl ist.

Der Bogen

$$\mathrm{Arc\,tang}\frac{b}{1+a}$$

uss, wenn α eine positive ganze Zahl ist, sich im ersten, zwei
n, dritten, vierten Quadranten endigen, jenachdem $1+a$ positiv
d b positiv, $1+a$ negativ und b positiv, $1+a$ negativ und b
gativ, $1+a$ positiv und b negativ ist. Sollten Zähler und Nenner
es Bruchs

$$\frac{b}{1+a}$$

erschwinden, so hat man nach dem Vorhergehenden die Summe

$$\{(1+a)^2+b^2\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos(\alpha\,\mathrm{Arc\,tang}\frac{b}{1+a})+\sin(\alpha\,\mathrm{Arc\,tang}\frac{b}{1+a})\sqrt{-1}\}$$

ls verschwindend zu betrachten. Auch hat man zu bemerken,
ass in diesem Falle die Grösse $(1+a)^2+b^2$ verschwindet.

Wir wollen nun den Fall, wenn $b=0$ ist, noch besonders
betrachten.

Zuerst sei α eine positive ganze Zahl.

Wenn $1+a$ positiv ist, so muss sich nach dem Vorherge-
henden, da man $b=0$ sowohl als positiv, als auch als negativ

betrachten kann, $\text{Arc tang}\frac{b}{1+a}$ im ersten oder im vierten Quadranten endigen, welche zwei Fälle unter der gemachten Voraussetzung offenbar in der Gleichung

$$\text{Arc tang}\frac{b}{1+a} = 2k\pi,$$

wo k eine ganze Zahl bezeichnet, die auch Null sein kann, zusammengefasst werden können. Also ist

$$\cos(\alpha\,\text{Arc tang}\frac{b}{1+a}) = \cos 2\alpha k\pi = +1,$$

$$\sin(\alpha\,\text{Arc tang}\frac{b}{1+a}) = \sin 2\alpha k\pi = 0;$$

und folglich nach 31)

$$\{(1+a)^2\}^{\frac{\alpha}{2}} = 1+\alpha_1 a+\alpha_2 a^2+\alpha_3 a^3+\alpha_4 a^4+\ldots.$$

Weil aber nach dem Obigen die Quadratwurzel

$$\{(1+a)^2\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

natürlich immer positiv genommen werden muss, und nach der Voraussetzung $1+a$ positiv ist, so ist offenbar

$$\{(1+a)^2\}^{\frac{\alpha}{2}} = (1+a)^{\alpha},$$

also nach dem Vorhergehenden

$$(1+a)^{\alpha} = 1+\alpha_1 a+\alpha_2 a^2+\alpha_3 a^3+\alpha_4 a^4+\ldots.$$

Wenn $1+a$ negativ ist, so muss sich nach dem Vorhergehenden, da man $b=0$ sowohl als positiv, als auch als negativ betrachten kann, $\text{Arc tang}\frac{b}{1+a}$ im zweiten oder dritten Quadranten endigen, welche zwei Fälle unter der gemachten Voraussetzung offenbar in der Gleichung

$$\text{Arc tang}\frac{b}{1+a} = (2k+1)\pi,$$

wo k eine ganze Zahl bezeichnet, die auch Null sein kann, zusammengefasst werden können. Also ist

$$\cos(\alpha\,\text{Arc tang}\frac{b}{1+a}) = \cos\alpha(2k+1)\pi = \pm 1,$$

$$\sin(\alpha\,\text{Arc tang}\frac{b}{1+a}) = \sin\alpha(2k+1)\pi = 0;$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem α eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Folglich ist nach 31) immer mit derselben Bestimmung wegen des Zeichens:

$$\pm\{(1+a)^2\}^{\frac{\alpha}{2}} = 1+\alpha_1 a+\alpha_2 a^2+\alpha_3 a^3+\alpha_4 a^4+\ldots,$$

wo die Quadratwurzel

$$\{(1+a)^2\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

nach dem Obigen bekanntlich immer positiv genommen werden muss. Hält man aber dies und die vorher wegen des Zeichens gegebene Beslimmung fest, so wird leicht erhellen, dass allgemein

$$\pm\{(1+a)^2\}^{\frac{\alpha}{2}} = (1+a)^{\alpha},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden auch in diesem Falle wieder

$$(1+a)^{\alpha} = 1+\alpha_1 a+\alpha_2 a^2+\alpha_3 a^3+\alpha_4 a^4+\ldots.$$

ist.

Wenn also α eine positive ganze Zahl ist, so ist für jedes a:

$$(1+a)^{\alpha} = 1+\alpha_1 a+\alpha_2 a^2+\alpha_3 a^3+\alpha_4 a^4+\ldots.$$

Wenn α keine positive ganze Zahl und a zwischen den Gränzen -1 und $+1$ enthalten ist, so muss man nach dem Vorhergehenden $\text{Arctang}\frac{b}{1+a}$ immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ nehmen, woraus sich ergiebt, dass im vorliegenden Falle immer

$$\text{Arctang}\frac{b}{1+a} = 0$$

gesetzt werden muss, und daher nach 31)

$$(1+a)^{\alpha} = 1+\alpha_1 a+\alpha_2 a^2+\alpha_3 a^3+\alpha_4 a^4+\ldots.$$

ist, wenn man nur beachtet, dass im vorliegenden Falle nach dem Obigen offenbar $(1+a)^{\alpha}$ immer positiv zu nehmen ist.

Wenn α keine positive ganze Zahl ist und a ausserhalb der Gränzen -1 und $+1$ liegt, so ist nach dem Obigen die Reihe

$$1,\ \alpha_1 a,\ \alpha_2 a^2,\ \alpha_3 a^3,\ \alpha_4 a^4,\ \ldots.$$

offenbar divergent.

Fasst man das Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich Folgendes.

Es ist

32) $(1+a)^{\alpha} = 1+\alpha_1 a+\alpha_2 a^2+\alpha_3 a^3+\alpha_4 a^4+\cdot$

für jedes a, wenn α eine positive ganze Zahl ist, und für jedes zwischen -1 und $+1$ liegende a, wenn α keine positive ganze Zahl ist, unter der Bedingung, dass man in diesem letzteren Falle $(1+a)^\alpha$ immer positiv nimmt. Wenn α keine positive ganze Zahl ist und a ausserhalb der Gränzen -1 und $+1$ liegt, so ist die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der obigen Gleichung divergent.

§. 5.

Im vorhergehenden Paragraphen sind in dem Falle, wenn α keine positive ganze Zahl ist, bloss die beiden Fälle, wenn

$$\sqrt{a^2+b^2} < 1 \text{ und } \sqrt{a^2+b^2} > 1$$

ist, betrachtet worden, so dass uns also jetzt noch die Betrachtung des Falls, wenn

$$\sqrt{a^2+b^2} = 1$$

ist, obliegt, wobei wir die drei folgenden Fälle unterscheiden werden:

$$-\infty < \alpha \lessgtr -1,$$
$$-1 < \alpha < 0,$$
$$0 < \alpha < +\infty.$$

1. Es sei

$$-\infty < \alpha \lessgtr -1.$$

In diesem Falle kann

$$\alpha = -1-\delta,$$

wo $\delta \gtrless 0$ ist, gesetzt werden.

Durch diese Substitution erhält man

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n \cdot \frac{\alpha-n}{n+1} = -\alpha_n \cdot \frac{\delta+n+1}{n+1}.$$

Weil nun natürlich n nur eine positive ganze Zahl sein kann, und folglich für jedes n

$$\frac{\delta+n+1}{n+1} \gtrless 1$$

ist, so ergiebt sich hieraus, dass der absolute Werth von α_n entweder für jedes n der Einheit gleich ist, oder fortwährend

mit n zugleich wächst, woraus unmittelbar hervorgeht, dass in diesem Falle die Reihe

$$1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \ldots.$$

divergent ist. Weil aber

$$(\alpha_n)^2 = (\alpha_n \cos n\Theta)^2 + (\alpha_n \sin n\Theta)^2$$

ist, so ist auch der Werth von

$$(\alpha_n \cos n\Theta)^2 + (\alpha_n \sin n\Theta)^2$$

entweder für jedes n der Einheit gleich, oder wächst fortwährend zugleich mit n. Sollten nun die Reihen

$$1, \alpha_1 \cos\Theta, \alpha_2 \cos 2\Theta, \alpha_3 \cos 3\Theta, \alpha_4 \cos 4\Theta, \ldots.;$$
$$\alpha_1 \sin\Theta, \alpha_2 \sin 2\Theta, \alpha_3 \sin 3\Theta, \alpha_4 \sin 4\Theta, \ldots.$$

beide convergent sein; so müsste sich jedenfalls, wenn n wächst, sowohl der absolute Werth von $\alpha_n \cos n\Theta$, als auch der absolute Werth von $\alpha_n \sin n\Theta$, der Null nähern, und müsste derselben beliebig nahe gebracht werden können, wenn man nur n gross genug nimmt. Also müsste sich offenbar auch

$$(\alpha_n \cos n\Theta)^2 + (\alpha_n \sin n\Theta)^2$$

der Null nähern, wenn n wächst, und derselben beliebig nahe gebracht werden können, wenn man nur n gross genug nimmt. Da dies mit dem Obigen in offenbarem Widerspruch steht, so können in diesem Falle die Reihen

$$1, \alpha_1 \cos\Theta, \alpha_2 \cos 2\Theta, \alpha_3 \cos 3\Theta, \alpha_4 \cos 4\Theta, \ldots.$$
$$\alpha_1 \sin\Theta, \alpha_2 \sin 2\Theta, \alpha_3 \sin 3\Theta, \alpha_4 \sin 4\Theta, \ldots.$$

nie beide convergent sein, und es muss folglich immer mindestens eine derselben divergiren, woraus sich nach dem bekannten Begriffe der Divergenz imaginärer Reihen unmittelbar ergiebt, dass im vorliegenden Falle die Reihe

$$1,$$
$$\alpha_1 (\cos\Theta + \sin\Theta \sqrt{-1}),$$
$$\alpha_2 (\cos 2\Theta + \sin 2\Theta \sqrt{-1}),$$
$$\alpha_3 (\cos 3\Theta + \sin 3\Theta \sqrt{-1}),$$
$$\alpha_4 (\cos 4\Theta + \sin 4\Theta \sqrt{-1}),$$
$$\text{u. s. w.}$$

jederzeit divergent ist. Weil nun aber, wenn wir wie im vorhergehenden Paragraphen

$$a + b\sqrt{-1} = \varrho(\cos\Theta + \sin\Theta \sqrt{-1})$$

setzen, wegen der gemachten Voraussetzung

$$\varrho = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$$

ist, so kann die Reihe

$$1,\ \alpha_1(a+b\sqrt{-1}),\ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2,\ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3,\ \ldots.$$

offenbar immer auf die Form der obigen Reihe gebracht werde woraus sich ergiebt, dass im vorliegenden Falle die Reihe

$$1,\ \alpha_1(a+b\sqrt{-1}),\ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2,\ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3,\ \ldots.$$

jederzeit divergent ist.

II. Es sei

$$0 < \alpha < +\infty.$$

Man setze der Kürze wegen $\alpha + 1 = \varepsilon$, und nehme $n > \varepsilon$, so i

$$n > 1,\ \frac{1}{n} < 1$$

und folglich nach 32)

$$\begin{aligned}(1+\tfrac{1}{n})^{-\varepsilon} = 1 &- \frac{\varepsilon}{1}\cdot\frac{1}{n} \\ &+ \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)}{1.2}\cdot\frac{1}{n^2} \\ &- \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{n^3} \\ &+ \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)}{1.2.3.4}\cdot\frac{1}{n^4} \\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

also, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned}(1+\tfrac{1}{n})^{-\varepsilon} = 1 &- \frac{\varepsilon}{n} \\ &+ \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)}{1.2}\left\{1-\frac{\varepsilon+2}{3n}\right\}\cdot\frac{1}{n^2} \\ &+ \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)}{1.2.3.4}\left\{1-\frac{\varepsilon+4}{5n}\right\}\cdot\frac{1}{n^4} \\ &+ \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)(\varepsilon+4)(\varepsilon+5)}{1.2.3.4.5.6}\left\{1-\frac{\varepsilon+6}{7n}\right\}\cdot\frac{1}{n^6} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Weil nun, wenn k eine positive ganze Zahl bezeichnet, da ach der Voraussetzung $n > \varepsilon$ ist,

$$n + kn > \varepsilon + k, \text{ d. i. } (k+1)n > \varepsilon + k$$

it, so ist

$$\frac{\varepsilon + k}{(k+1)n} < 1,$$

nd folglich

$$1 - \frac{\varepsilon + k}{(k+1)n} > 0.$$

Also ist nach dem Obigen offenbar

$$(1 + \frac{1}{n})^{-\varepsilon} > 1 - \frac{\varepsilon}{n},$$

. i.

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\alpha-1} > \frac{n-\alpha-1}{n},$$

nd folglich

$$-\frac{\alpha-n+1}{n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha+1}.$$

Also ist, wenn die positive ganze Zahl $i > \varepsilon$ ist,

$$-\frac{\alpha-i-n+1}{i+n} < \left(\frac{i+n}{i+n+1}\right)^{\alpha+1}$$

ür $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$. Setzt man nun nach und nach

$$n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots n;$$

o erhält man:

$$-\frac{\alpha-i}{i+1} < \left(\frac{i+1}{i+2}\right)^{\alpha+1},$$

$$-\frac{\alpha-i-1}{i+2} < \left(\frac{i+2}{i+3}\right)^{\alpha+1},$$

$$-\frac{\alpha-i-2}{i+3} < \left(\frac{i+3}{i+4}\right)^{\alpha+1},$$

u. s. w.

$$-\frac{\alpha-i-n+2}{i+n-1} < \left(\frac{i+n-1}{i+n}\right)^{\alpha+1},$$

$$-\frac{\alpha-i-n+1}{i+n} < \left(\frac{i+n}{i+n+1}\right)^{\alpha+1};$$

und folglich durch Multiplication auf beiden Seiten der Zeich
wobei man nur nicht zu übersehen hat, dass die Grössen auf
linken Seite eben so wie die Grössen auf der rechten Seite säm
lich positiv sind:

$$(-1)^n \cdot \frac{(\alpha-i)(\alpha-i-1)..(\alpha-i-n+1)}{(i+1)(i+2)..(i+n)} < \left(\frac{i+1}{i+n+1}\right)^{\alpha+1}.$$

Nach der Theorie der Binomial-Coefficienten ist nun,
leicht erhellet:

$$\alpha_{i+n} = \alpha_i \cdot \frac{(\alpha-i)(\alpha-i-1)..(\alpha-i-n+1)}{(i+1)(i+2)..(i+n)},$$

und folglich, wenn überhaupt der absolute Werth von α_n du
(α_n) bezeichnet wird:

$$(\alpha_{i+n}) = (\alpha_i) \cdot (-1)^n \cdot \frac{(\alpha-i)(\alpha-i-1)..(\alpha-i-n+1)}{(i+1)(i+2)..(i+n)}.$$

Also ist nach dem Obigen offenbar

$$(\alpha_{i+n}) < (\alpha_i) \cdot \left(\frac{i+1}{i+n+1}\right)^{\alpha+1}$$

für $n > 0$. Hieraus ergiebt sich:

$$(\alpha_i) = (\alpha_i) \cdot \left(\frac{i+1}{i+1}\right)^{\alpha+1},$$

$$(\alpha_{i+1}) < (\alpha_i) \cdot \left(\frac{i+1}{i+2}\right)^{\alpha+1},$$

$$(\alpha_{i+2}) < (\alpha_i) \cdot \left(\frac{i+1}{i+3}\right)^{\alpha+1},$$

$$(\alpha_{i+3}) < (\alpha_i) \cdot \left(\frac{i+1}{i+4}\right)^{\alpha+1},$$

u. s. w.

$$(\alpha_{i+n}) < (\alpha_i) \cdot \left(\frac{i+1}{i+n+1}\right)^{\alpha+1};$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten addirt und der Kür
wegen wieder ε für $\alpha+1$ schreibt:

$$33) \quad (\alpha_i) + (\alpha_{i+1}) + (\alpha_{i+2}) + (\alpha_{i+3}) + \ldots + (\alpha_{i+n})$$
$$< (\alpha_i) \cdot (i+1)^{\varepsilon} \left\{\frac{1}{(i+1)^{\varepsilon}} + \frac{1}{(i+2)^{\varepsilon}} + \frac{1}{(i+3)^{\varepsilon}} + \ldots + \frac{1}{(i+n+1)^{\varepsilon}}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen $i > 1$ ist, so ist

$$i+n+1 > 1, \quad \frac{1}{i+n+1} < 1$$

für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, und folglich nach 32):

$$\left(1-\frac{1}{i+n+1}\right)^{-\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1}\cdot\frac{1}{i+n+1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\cdot\frac{1}{(i+n+1)^2} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{(i+n+1)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

also

$$\left(\frac{i+n}{i+n+1}\right)^{-\alpha} > 1 + \frac{\alpha}{i+n+1}$$

oder

$$\left(\frac{i+n+1}{i+n}\right)^{\alpha} > 1 + \frac{\alpha}{i+n+1},$$

und folglich

$$\frac{1}{\alpha(i+n)^{\alpha}} > \frac{1}{\alpha(i+n+1)^{\alpha}} + \frac{1}{(i+n+1)^{\alpha+1}}$$

oder

$$\frac{1}{(i+n+1)^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{(i+n)^{\alpha}} - \frac{1}{(i+n+1)^{\alpha}}\right\}.$$

Also ist, wenn man

$$n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots n$$

setzt:

$$\frac{1}{(i+1)^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{i^{\alpha}} - \frac{1}{(i+1)^{\alpha}}\right\}.$$

$$\frac{1}{(i+2)^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{(i+1)^{\alpha}} - \frac{1}{(i+2)^{\alpha}}\right\}.$$

$$\frac{1}{(i+3)^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{(i+2)^{\alpha}} - \frac{1}{(i+3)^{\alpha}}\right\},$$

u. s. w.

$$\frac{1}{(i+n)^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{(i+n-1)^{\alpha}} - \frac{1}{(i+n)^{\alpha}}\right\},$$

$$\frac{1}{(i+n+1)^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{(i+n)^{\alpha}} - \frac{1}{(i+n+1)^{\alpha}}\right\};$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten addirt und der Kürze wegen wieder ε für $\alpha+1$ schreibt:

$$\frac{1}{(i+1)^\varepsilon}+\frac{1}{(i+2)^\varepsilon}+\frac{1}{(i+3)^\varepsilon}+\ldots+\frac{1}{(i+n+1)^\varepsilon} < \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{i^\alpha}-\frac{1}{(i+n+1)^\alpha}\right\},$$

also um so mehr:

$$34)\quad \frac{1}{(i+1)^\varepsilon}+\frac{1}{(i+2)^\varepsilon}+\frac{1}{(i+3)^\varepsilon}+\ldots+\frac{1}{(i+n+1)^\varepsilon} < \frac{1}{\alpha i^\alpha}.$$

Hieraus und aus 33) ergiebt sich nun unmittelbar

$$(\alpha_i)+(\alpha_{i+1})+(\alpha_{i+2})+\ldots+(\alpha_{i+n}) < (\alpha_i).\frac{(i+1)^{\alpha+1}}{\alpha i^\alpha},$$

so dass also, wie gross auch n werden mag, die Summe

$$(\alpha_i)+(\alpha_{i+1})+(\alpha_{i+2})+\ldots+(\alpha_{i+n})$$

doch immer kleiner als die von n ganz unabhängige positive Grösse

$$(\alpha_i).\frac{(i+1)^{\alpha+1}}{\alpha i^\alpha}$$

bleibt. Da nun die Summe

$$(\alpha_i)+(\alpha_{i+1})+(\alpha_{i+2})+\ldots+(\alpha_{i+n})$$

fortwährend wächst, wenn n wächst, so muss es offenbar eine bestimmte Grösse geben, welcher sich diese Summe bei wachsendem n immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähert, und diese Grösse ist augenscheinlich entweder die Grösse

$$(\alpha_i).\frac{(i+1)^{\alpha+1}}{\alpha i^\alpha}$$

selbst oder kleiner als diese letztere Grösse, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass die Reihe

$$(\alpha_i),\ (\alpha_{i+1}),\ (\alpha_{i+2}),\ (\alpha_{i+3}),\ldots,$$

und folglich natürlich auch die Reihe

$$1,\ (\alpha_1),\ (\alpha_2),\ (\alpha_3),\ (\alpha_4),\ (\alpha_5),\ldots$$

eine Summe hat, also convergirt. Folglich sind nach einem bekannten Satze aus der Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen auch die beiden Reihen

$$1, (\alpha_1)(\cos\Theta), (\alpha_2)(\cos 2\Theta), (\alpha_3)(\cos 3\Theta), (\alpha_4)(\cos 4\Theta), \ldots;$$
$$(\alpha_1)(\sin\Theta), (\alpha_2)(\sin 2\Theta), (\alpha_3)(\sin 3\Theta), (\alpha_4)(\sin 4\Theta), \ldots;$$

wo

$$(\cos\Theta), (\cos 2\Theta), (\cos 3\Theta), (\cos 4\Theta), \ldots;$$
$$(\sin\Theta), (\sin 2\Theta), (\sin 3\Theta), (\sin 4\Theta), \ldots$$

die absoluten Werthe von

$$\cos\Theta, \cos 2\Theta, \cos 3\Theta, \cos 4\Theta, \ldots;$$
$$\sin\Theta, \sin 2\Theta, \sin 3\Theta, \sin 4\Theta, \ldots$$

bezeichnen, convergent, woraus sich ferner gleichfalls nach bekannten Sätzen aus der Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen ergiebt, dass auch die Reihen

$$1, \alpha_1\cos\Theta, \alpha_2\cos 2\Theta, \alpha_3\cos 3\Theta, \alpha_4\cos 4\Theta, \ldots;$$
$$\alpha_1\sin\Theta, \alpha_2\sin 2\Theta, \alpha_3\sin 3\Theta, \alpha_4\sin 4\Theta, \ldots;$$

und daher auch die Reihe

$$1,$$
$$\alpha_1(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\alpha_2(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\alpha_3(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\alpha_4(\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\text{u. s. w.}$$

oder, was dasselbe ist,

$$1, \alpha_1(a + b\sqrt{-1}), \alpha_2(a + b\sqrt{-1})^2, \alpha_3(a + b\sqrt{-1})^3, \ldots,$$

convergent sind.

III. Es sei nun endlich

$$-1 < \alpha < 0.$$

Da $\alpha + 1 > 0$ ist, so ist ganz wie im vorigen Falle, wenn $i > \alpha + 1$ ist,

$$(\alpha_{i+n}) < (\alpha_i) \cdot \left(\frac{i+1}{i+n+1}\right)^{\alpha+1}$$

für $n > 0$, woraus man sieht, dass (α_{i+n}) sich, wenn n wächst, der Null fortwährend nähert und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug nimmt. Setzen wir nun der Kürze wegen

$$
\begin{aligned}
f(\alpha, n) = \; & 1 \\
& + \alpha_1 (\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) \\
& + \alpha_2 (\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}) \\
& + \alpha_3 (\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}) \\
& \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \alpha_n (\cos n\Theta + \sin n\Theta\sqrt{-1}),
\end{aligned}
$$

so ist, wenn man auf beiden Seiten mit

$$1 + \cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}$$

multiplicirt, nach einem bekannten Satze von den imaginäre Grössen

$$
\begin{aligned}
& (1 + \cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\, f(\alpha, n) \\
= \; & 1 \\
& + (1 + \alpha_1)(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) \\
& + (\alpha_1 + \alpha_2)(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}) \\
& + (\alpha_2 + \alpha_3)(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}) \\
& \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + (\alpha_{n-1} + \alpha_n)(\cos n\Theta + \sin n\Theta\sqrt{-1}) \\
& \quad + \alpha_n (\cos(n+1)\Theta + \sin(n+1)\Theta\sqrt{-1}),
\end{aligned}
$$

d. i. nach einem sehr bekannten Satze von den Binomial-Coefficienten:

$$
\begin{aligned}
& (1 + \cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\, f(\alpha, n) \\
= \; & 1 \\
& + (\alpha+1)_1 (\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) \\
& + (\alpha+1)_2 (\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}) \\
& + (\alpha+1)_3 (\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}) \\
& \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + (\alpha+1)_n (\cos n\Theta + \sin n\Theta\sqrt{-1}) \\
& \quad + \alpha_n (\cos(n+1)\Theta + \sin(n+1)\Theta\sqrt{-1}),
\end{aligned}
$$

und folglich

$$
\begin{aligned}
& (1 + \cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\, f(\alpha, n) \\
= \; & f(\alpha+1, n) + \alpha_n (\cos(n+1)\Theta + \sin(n+1)\Theta\sqrt{-1}).
\end{aligned}
$$

Weil $\alpha+1>0$ ist, so nähert sich $f(\alpha+1, n)$ nach II., wenn n wächst, einer gewissen bestimmten Gränze, die wir durch S bezeichnen wollen, bis zu jedem beliebigen Grade. Ferner nähert sich nach dem Vorhergehenden offenbar α_n der Null, wenn n wächst, bis zu jedem beliebigen Grade. Folglich nähert sich offenbar auch

$$\alpha_n(\cos(n+1)\Theta+\sin(n+1)\Theta\sqrt{-1}),$$

wenn n wächst, der Null bis zu jedem beliebigen Grade. Also nähert sich

$$(1+\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\,f(\alpha, n)$$

der Gränze S bis zu jedem beliebigen Grade, wenn n wächst. Hieraus ergiebt sich, dass, wenn nicht

$$1+\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}=0$$

ist, $f(\alpha, n)$ sich der Gränze

$$\frac{S}{1+\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}}$$

bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn n wächst, also die Reihe

$$1,$$
$$\alpha_1(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\alpha_2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\alpha_3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\alpha_4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\text{u. s. w.}$$

convergent ist. Folglich convergirt, wenn nicht

$$1+a+b\sqrt{-1}=0$$

ist, auch die Reihe

$$1,\ \alpha_1(a+b\sqrt{-1}),\ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2,\ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3,\ \ldots$$

Wenn

$$1+a+b\sqrt{-1}=0$$

ist, so ist $1+a=0$, also $a=-1$, und $b=0$. Daher geht in diesem Falle die Reihe

$$1,\ \alpha_1(a+b\sqrt{-1}),\ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2,\ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3,\ \ldots$$

in die Reihe

$$1, -\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_4, \ldots.$$

über. Setzen wir nun, da α negativ ist, $\alpha = -\varepsilon$, wo $\varepsilon > 0$ so erhält die Reihe

$$1, -\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_4, \ldots.$$

die Form

$$1, \frac{\varepsilon}{1}, \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)}{1.2}, \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)}{1.2.3}, \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)}{1.2.3.4}, \ldots.$$

Da $\varepsilon > 0$ ist, so sind die Glieder der Reihe

$$\frac{\varepsilon+1}{1.2}, \frac{(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)}{1.2.3}, \frac{(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)}{1.2.3.4}, \ldots.$$

grösser als die gleichstelligen Glieder der Reihe

$$\frac{1}{1.2}, \frac{1.2}{1.2.3}, \frac{1.2.3}{1.2.3.4}, \frac{1.2.3.4}{1.2.3.4.5}, \ldots.,$$

d. i. grösser als die gleichstelligen Glieder der Reihe

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots.;$$

und da nun diese Reihe bekanntlich eine divergente Reihe ist, ist um so mehr die Reihe

$$\frac{\varepsilon+1}{1.2}, \frac{(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)}{1.2.3}, \frac{(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)}{1.2.3.4}, \ldots.;$$

also auch die Reihe

$$\frac{\varepsilon(\varepsilon+1)}{1.2}, \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)}{1.2.3}, \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)}{1.2.3.4}, \ldots.;$$

und folglich auch die Reihe

$$1, \frac{\varepsilon}{1}, \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)}{1.2}, \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)}{1.2.3}, \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)}{1.2.3.4}, \ldots.;$$

d. i. die Reihe

$$1, -\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_4, \ldots.$$

divergent. Wenn also

$$1 + a + b\sqrt{-1} = 0$$

ist, so ist die Reihe

$1, \alpha_1(a+b\sqrt{-1}), \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2, \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3, \ldots.$

vergent.

Der vorhergehende Beweis zeigt, dass die Reihe

$$1, -\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_4, \ldots.$$

berhaupt jederzeit divergirt, wenn α negativ ist.

Für $-1<x<+1$ ist nun bekanntlich nach §. 3.

$$(1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos(\alpha\operatorname{Arctg}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta})+\sin(\alpha\operatorname{Arctg}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta})\sqrt{-1}\}$$

$$= 1 + \alpha_1 x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}) + \alpha_2 x^2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1}) + \alpha_3 x^3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1}) + \alpha_4 x^4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1}) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

wo

$$\operatorname{Arc\,tang}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

wischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist.

Also ist nach einem bekannten Satze aus der Lehre von der onvergenz und Divergenz der Reihen

$$5)\quad \{2(1+\cos\Theta)\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos(\alpha\operatorname{Arctg}\frac{\sin\Theta}{1+\cos\Theta})+\sin(\alpha\operatorname{Arctg}\frac{\sin\Theta}{1+\cos\Theta})\sqrt{-1}\}$$

$$= 1 + \alpha_1(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}) + \alpha_2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1}) + \alpha_3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1}) + \alpha_4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1}) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

wo

$$\operatorname{Arc\,tang}\frac{\sin\Theta}{1+\cos\Theta}$$

zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist, in allen den Fällen, wo die Grösse auf der linken Seite des Gleichheitszeichens einen endlichen völlig bestimmten Werth hat und die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens convergirt.

Für $\varrho = \sqrt{a^2+b^2} = 1$ ist $\cos\Theta = a$ und $\sin\Theta = b$; folglich nach 35):

$$36)\quad \{2(1+a)\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos(\alpha\,\mathrm{Arctang}\,\frac{b}{1+a}) + \sin(\alpha\,\mathrm{Arctang}\,\frac{b}{1+a})\sqrt{-1}\}$$
$$= 1$$
$$+ \alpha_1(a+b\sqrt{-1})$$
$$+ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2$$
$$+ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3$$
$$+ \alpha_4(a+b\sqrt{-1})^4$$
$$+ \ldots\ldots\ldots,$$

wo

$$\mathrm{Arctang}\,\frac{b}{1+a}$$

zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist, in allen den Fällen, wo die Grösse auf der linken Seite des Gleichheitszeichens einen endlichen völlig bestimmten Werth hat und die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens convergirt.

§. 6.

Nimmt man jetzt alles Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich überhaupt das folgende für die gesammte Analysis in jeder Beziehung höchst wichtige Theorem.

Binomialtheorem.

A. Wenn α eine positive ganze Zahl ist, so ist für jedes a und b

$$\{(1+a)^2+b^2\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos(\alpha\,\mathrm{Arctang}\,\frac{b}{1+a}) + \sin(\alpha\,\mathrm{Arctang}\,\frac{b}{1+a})\sqrt{-1}\}$$
$$= 1 + \alpha_1(a+b\sqrt{-1})$$
$$+ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2$$
$$+ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3$$
$$+ \alpha_4(a+b\sqrt{-1})^4$$
$$+ \ldots\ldots\ldots,$$

wo

$$\mathrm{Arctang}\,\frac{b}{1+a}$$

sich im ersten, zweiten, dritten, vierten Quadranten endigen muss, jenachdem $1+a$ positiv und b positiv, $1+a$ negativ und b positiv, $1+a$ negativ und b negativ, $1+a$ positiv und b negativ ist. Sollten Zähler und Nenner des Bruchs

$$\frac{b}{1+a}$$

beide verschwinden, so würde man die Summe

$$\{(1+a)^2+b^2\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos(\alpha\,\mathrm{Arctang}\,\frac{b}{1+a})+\sin(\alpha\,\mathrm{Arctang}\,\frac{b}{1+a})\sqrt{-1}\}$$

selbst als verschwindend zu betrachten haben, und hat auch zu bemerken, dass in diesem Falle $\{(1+a)^2+b^2\}^{\frac{\alpha}{2}}$ verschwindet.

B. Wenn α keine positive ganze Zahl ist, so muss man die folgenden Fälle unterscheiden.

I. $\sqrt{a^2+b^2}<1$.

In diesem Falle ist

$$\{(1+a)^2+b^2\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos(\alpha\,\mathrm{Arctang}\,\frac{b}{1+a})+\sin(\alpha\,\mathrm{Arctang}\,\frac{b}{1+a})\sqrt{-1}\}$$

$$= 1+\alpha_1(a+b\sqrt{-1})$$
$$+\alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2$$
$$+\alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3$$
$$+\alpha_4(a+b\sqrt{-1})^4$$
$$+\ldots\ldots\ldots,$$

und der Bogen

$$\mathrm{Arctang}\,\frac{b}{1+a}$$

muss immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden.

II. $\sqrt{a^2+b^2}=1$.

1. Wenn $-\infty<\alpha\leqq-1$ ist, so ist die Reihe

$$1,\ \alpha_1(a+b\sqrt{-1}),\ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2,\ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3,\ldots.$$

divergent, und hat folglich keine Summe.

2. Wenn $-1<\alpha<0$ und nicht

$$1+a+b\sqrt{-1}=0$$

ist, so ist

$$\{(1+a)^2+b^2\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos(\alpha\,\mathrm{Arctang}\,\tfrac{b}{1+a})+\sin(\alpha\,\mathrm{Arctang}\,\tfrac{b}{1+a})\sqrt{-1}\}$$
$$=1+\alpha_1(a+b\sqrt{-1})+\alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2+\alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3+\alpha_4(a+b\sqrt{-1})^4+\ldots\ldots\ldots,$$

und der Bogen

$$\mathrm{Arctang}\,\frac{b}{1+a}$$

muss immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden.

Wenn $-1<\alpha<0$ und

$$1+a+b\sqrt{-1}=0$$

ist, so ist die Reihe

$$1,\ \alpha_1(a+b\sqrt{-1}),\ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2,\ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3,\ldots.$$

divergent, und hat folglich keine Summe.

3. Wenn $0<\alpha<\infty$ ist, so ist

$$\{(1+a)^2+b^2\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos(\alpha\,\mathrm{Arctang}\,\tfrac{b}{1+a})+\sin(\alpha\,\mathrm{Arctang}\,\tfrac{b}{1+a})\sqrt{-1}\}$$
$$=1+\alpha_1(a+b\sqrt{-1})+\alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2+\alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3+\alpha_4(a+b\sqrt{-1})^4+\ldots\ldots\ldots,$$

und der Bogen

$$\mathrm{Arctang}\,\frac{b}{1+a}$$

muss zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden. Sollten Zähler und Nenner des Bruchs

$$\frac{b}{1+a}$$

beide verschwinden und also $\{(1+a)^2+b^2\}^{\frac{a}{2}}=0$ sein, so erhellet aus dem Obigen leicht, dass dann die Summe

$$\{(1+a)^2+b^2\}^{\frac{a}{2}}\{\cos(\alpha\,\mathrm{Arctang}\frac{b}{1+a})+\sin(\alpha\,\mathrm{Arctang}\frac{b}{1+a})\sqrt{-1}\}$$

selbst als verschwindend zu betrachten ist.

III. $\sqrt{a^2+b^2}>1$.

In diesem Falle ist die Reihe

$$1,\ \alpha_1(a+b\sqrt{-1}),\ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2,\ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3,\ \ldots.$$

divergent, und hat folglich keine Summe.

Auf diese Weise muss nach meiner Ansicht das Binomialtheorem oder der Binomische Lehrsatz im Geiste der neueren, vor der älteren sich jedenfalls durch wahre, an die in der Geometrie von den Griechen uns hinterlassenen trefflichen bis jetzt unübertroffenen Muster lebhaft erinnernde *) mathematische Strenge und Evidenz auf das vortheilhafteste auszeichnenden Analysis ausgesprochen werden, und nur innerhalb der durch das Obige von selbst gesteckten Gränzen darf man dieses wichtige Theorem an-

*) Weshalb ich denn auch fortwährend die feste Ueberzeugung habe, dass es namentlich auch für das Studium der neueren Analysis keine bessere Vorbereitung giebt, als das Studium der Geometrie ganz in der strengen Weise der Griechen, und es durchaus nicht billigen kann, wenn man bei dem geometrischen Unterrichte auf höheren Lehranstalten, die zunächst und vorzugsweise eine formelle geistige Bildung ihrer Schüler bezwecken, diesen Weg zuweilen auf ziemlich leichtsinnige Weise verlässt. Für das gesammte weitere mathematische Studium ist diese strenge Beschäftigung mit der Geometrie von einem ganz unberechenbarem Werthe, wie nur die gehörig zu beurtheilen und zu würdigen im Stande sind, welche die Mathematik in ihrem ganzen Umfange, und insbesondere auch die strenge Begründung kennen, welche der Analysis durch die Bemühungen einiger neueren Mathematiker zu Theil geworden ist, wodurch freilich sehr Vieles, was man früher für in grosser Allgemeinheit gültig hielt, über den Haufen geworfen und in seine gehörigen Schranken zurückgewiesen worden ist. Möchten nur erst alle Theile der Analysis sich einer so strengen und gesunden Ansichten über diese Dinge völlig entsprechenden Behandlungsweise erfreuen, wie sie jetzt vorzugsweise einigen zu Theil geworden ist! Denn dass noch Vieles zu thun übrig ist, werden die am wenigsten in Abrede zu stellen geneigt sein, welche sich vorzugsweise bei dieser neueren Bearbeitung der Analysis betheiligt haben. Ob es übrigens nicht einen gewissen Mittelweg zwischen der älteren und neueren Behandlungsweise giebt, der am besten zum Ziele führen dürfte, worauf schon bei einigen Gelegenheiten von mir hingewiesen worden ist: darüber lässt sich jetzt noch nichts mit nur einiger Bestimmtheit sagen, und die Acten über alle diese Dinge dürfen bis jetzt gewiss noch keineswegs als geschlossen betrachtet werden.

wenden, wenn man sich vor Fehlschlüssen sichern und nicht zu ungereimten Resultaten führen lassen will, was an Beispielen noch besonders nachzuweisen unnütze Weitläufigkeit sein würde, da sich dergleichen Beispiele einem Jeden leicht von selbst darbieten werden. Bemerken will ich nur ganz im Allgemeinen, dass es gar nicht schwer hält, durch die unerlaubte, d. h. nicht in den gehörigen Gränzen eingeschlossene Anwendung des Binomischen Lehrsatzes zu Gleichungen zu gelangen, in denen eine positive Grösse einer negativen Grösse, oder eine reelle einer imaginären Grösse gleich gesetzt ist, und dass es überhaupt ausserordentlich leicht ist, sich auf diesem Wege zu jeder nur denkbaren mathematischen Ungereimtheit führen zu lassen, deren Grund in etwas Anderem als in der unerlaubten Anwendung des Satzes zu suchen, oder wie man wohl hin und wieder sagen hört, auf andere Weise erklären zu wollen, völlig unnützes und fruchtloses Bemühen ist.

Den Fall, wenn $b=0$ ist, wollen wir nun noch besonders in Betrachtung ziehen.

A. Wenn α eine positive ganze Zahl ist, so ist für jedes a

$$(1+a)^\alpha = 1 + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \alpha_3 a^3 + \alpha_4 a^4 + \ldots.$$

B. Wenn α keine positive ganze Zahl ist, so muss man die folgenden Fälle unterscheiden.

I. $-1 < a < +1.$

In diesem Falle ist

$$(1+a)^\alpha = 1 + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \alpha_3 a^3 + \alpha_4 a^4 + \ldots,$$

wenn man nur berücksichtigt, dass $(1+a)^\alpha$ immer positiv zu nehmen ist.

II. $a = -1.$

1. Wenn $-\infty < \alpha < 0$ ist, so ist die Reihe

$$1, -\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_4, \ldots.$$

divergent, und hat folglich keine Summe.

2. Wenn $\alpha > 0$ ist, so ist

$$0 = 1 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \ldots.$$

III. $a = +1.$

1. Wenn $-\infty < \alpha \leqq -1$ ist, so ist die Reihe

$$1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots.$$

divergent und hat folglich keine Summe.

2. Wenn $\alpha > -1$ ist, so ist

$$2^{\alpha} = 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots\ldots,$$

wobei 2^{α} immer positiv zu nehmen ist.

IV. $a^2 > 1$.

In diesem Falle, wo der absolute Werth von a grösser als die Einheit ist, divergirt die Reihe

$$1,\ \alpha_1 a,\ \alpha_2 a^2,\ \alpha_3 a^3,\ \alpha_4 a^4,\ \ldots\ldots,$$

und hat folglich keine Summe.

Aus den im Obigen bewiesenen Sätzen lassen sich nun verschiedene wichtige Folgerungen herleiten, wie jetzt in den folgenden Paragraphen gezeigt werden soll.

§. 7.

Zuerst wollen wir uns mit der Summirung der merkwürdigen und wichtigen Reihe

$$1,$$
$$\frac{x}{1}(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\frac{x^2}{1.2}(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\frac{x^3}{1.2\,3}(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\frac{x^4}{1\ldots4}(\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1}),$$

u. s. w.

beschäftigen.

Aus 28) ergiebt sich, wenn $\alpha = \frac{1}{\varepsilon}$ und εx für x gesetzt wird, wie man leicht findet:

$$37)\quad (1+2\varepsilon x\cos\Theta+\varepsilon^2x^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}}(\cos\frac{\varphi}{\varepsilon}+\sin\frac{\varphi}{\varepsilon}\sqrt{-1})$$
$$= 1$$
$$+\frac{x}{1}(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{x^2}{2}(1-\varepsilon)(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{x^3}{3}(1-\varepsilon)(\tfrac{1}{2}-\varepsilon)(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{x^4}{4}(1-\varepsilon)(\tfrac{1}{2}-\varepsilon)(\tfrac{1}{3}-\varepsilon)(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

für jedes zwischen

$$-\frac{1}{\varepsilon} \text{ und } +\frac{1}{\varepsilon}$$

liegende x, wobei bekanntlich

$$\varphi = \text{Arc tang} \frac{\varepsilon x \sin \Theta}{1 + \varepsilon x \cos \Theta}$$

ist, und immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden muss. Lässt man nun den absoluten Werth von ε sich der Null nähern, und bezeichnet die Gränze, welcher sich unter dieser Voraussetzung die Grösse

$$(1 + 2\varepsilon x \cos \Theta + \varepsilon^2 x^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}} (\cos \frac{\varphi}{\varepsilon} + \sin \frac{\varphi}{\varepsilon} \sqrt{-1})$$

nähert, insofern es eine solche Gränze giebt, was nachher besonders untersucht werden wird, durch

$$\text{Lim}\{(1 + 2\varepsilon x \cos \Theta + \varepsilon^2 x^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}} (\cos \frac{\varphi}{\varepsilon} + \sin \frac{\varphi}{\varepsilon} \sqrt{-1})\},$$

so erhält man aus der Gleichung 37), wenn man auf beiden Seiten derselben die Gränzen nimmt, die Gleichung:

$$\begin{aligned} 38)\quad \text{Lim}\{(1 + 2\varepsilon x \cos \Theta + \varepsilon^2 x^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}} (\cos \frac{\varphi}{\varepsilon} + \sin \frac{\varphi}{\varepsilon} \sqrt{-1})\} \\ = 1 \\ + \frac{x}{1} (\cos \Theta + \sin \Theta \sqrt{-1}) \\ + \frac{x^2}{1.2} (\cos 2\Theta + \sin 2\Theta \sqrt{-1}) \\ + \frac{x^3}{1.2.3} (\cos 3\Theta + \sin 3\Theta \sqrt{-1}) \\ + \frac{x^4}{1...4} (\cos 4\Theta + \sin 4\Theta \sqrt{-1}) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

für jedes zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegende x, wo es nun vorzüglich auf die Bestimmung der Grösse

$$\text{Lim}\{(1 + 2\varepsilon x \cos \Theta + \varepsilon^2 x^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}} (\cos \frac{\varphi}{\varepsilon} + \sin \frac{\varphi}{\varepsilon} \sqrt{-1})\}$$

ankommt.

Zu dem Ende setze man

$$2\varepsilon x \cos \Theta + \varepsilon^2 x^2 = \Delta,$$

ı ist

$$\frac{1}{2\varepsilon} = \frac{1}{\Delta}(x\cos\Theta + \frac{\varepsilon x^2}{2}),$$

nd folglich

$$(1+2\varepsilon x\cos\Theta+\varepsilon^2x^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}} = \{(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}\}^{x\cos\Theta+\frac{\varepsilon x^2}{2}}.$$

Weil ferner

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\varepsilon x\sin\Theta}{1+\varepsilon x\cos\Theta}$$

st, so ist

$$\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\varepsilon} = \frac{x\sin\Theta}{1+\varepsilon x\cos\Theta}, \quad \frac{\varphi}{\varepsilon} = \frac{\varphi}{\operatorname{tang}\varphi}\cdot\frac{x\sin\Theta}{1+\varepsilon x\cos\Theta}$$

oder

$$\frac{\varphi}{\varepsilon} = \frac{\cos\varphi}{\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)}\cdot\frac{x\sin\Theta}{1+\varepsilon x\cos\Theta}.$$

Wenn nun ε sich der Null nähert, so nähern sich offenbar uch Δ und φ, welches letztere bekanntlich zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist, der Null, und können derselben beliebig nahe ebracht werden, wenn man nur ε nahe genug bei Null annimmt. Also nähert sich $\cos\varphi$ der Einheit, wenn ε sich der Null nähert, nd kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur nahe genug bei Null annimmt, woraus sich nach dem Obigen

$$\operatorname{Lim}\frac{\varphi}{\varepsilon} = \frac{x\sin\Theta}{\operatorname{Lim}\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)}$$

giebt. Weil φ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt, so haben

$$\sin\varphi,\ \varphi,\ \operatorname{tang}\varphi$$

eiche Vorzeichen, und rücksichtlich der absoluten Werthe ist

$$\sin\varphi < \varphi < \operatorname{tang}\varphi.$$

lso ist

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi} > \frac{\sin\varphi}{\varphi} > \frac{\sin\varphi}{\operatorname{tang}\varphi},$$

. i.

$$1 > \frac{\sin\varphi}{\varphi} > \cos\varphi,$$

so dass also $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ zwischen 1 und $\cos\varphi$ liegt. Weil sich n
$\cos\varphi$ der Einheit nähert, wenn φ sich der Null nähert, und d
Einheit beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur φ nah
genug bei Null annimmt, so nähert sich offenbar um so mel
auch $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ der Einheit, wenn φ sich der Null nähert, und kan
der Einheit beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur φ nah
genug bei Null annimmt. Also ist

$$\mathrm{Lim}\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right) = 1,$$

und folglich nach dem Obigen

$$\mathrm{Lim}\,\frac{\varphi}{\varepsilon} = x\sin\Theta.$$

Weil nun ferner nach dem Obigen offenbar

$$\mathrm{Lim}.(1+2\varepsilon x\cos\Theta+\varepsilon^2x^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}} = \{\mathrm{Lim}.(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}\}^{x\cos\Theta}$$

ist, so ergiebt sich aus der Gleichung 38) augenscheinlich die
Gleichung

$$\begin{aligned}39)\quad \{\mathrm{Lim}.(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}\}^{x\cos\Theta}\{\cos(x\sin\Theta)+\sin(x\sin\Theta).\sqrt{-1}\} &= 1\\ &+\frac{x}{1}(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\\ &+\frac{x^2}{1.2}(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})\\ &+\frac{x^3}{1.2.3}(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})\\ &+\frac{x^4}{1\ldots4}(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

für jedes x zwischen $-\infty$ und $+\infty$, wobei man zu beachten
hat, dass

$$\mathrm{Lim}.(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}$$

die Gränze bezeichnet, welcher

$$(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}$$

sich bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn man Δ si
Null bis zu jedem beliebigen Grade nähern lässt.

Setzt man in der vorstehenden Gleichung $\Theta = 0$, so erhält man

$$\{\mathrm{Lim}.(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}\}^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1...4} + \cdots,$$

für jedes x zwischen $-\infty$ und $+\infty$, und folglich für $x = 1$:

$$40)\quad \mathrm{Lim}.(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1...4} + \cdots.$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$41)\quad e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1...4} + \cdots,$$

so ist

$$42)\quad \mathrm{Lim}.(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}} = e,$$

und folglich nach 39):

$$\begin{aligned} 43)\quad & e^{x\cos\Theta}\{\cos(x\sin\Theta) + \sin(x\sin\Theta).\sqrt{-1}\} \\ &= 1 + \frac{x}{1}(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) \\ &\quad + \frac{x^2}{1.2}(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}) \\ &\quad + \frac{x^3}{1.2.3}(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}) \\ &\quad + \frac{x^4}{1...4}(\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1}) \\ &\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

für jedes x zwischen $-\infty$ und $+\infty$, wodurch also die Summe der zu summirenden Reihe gefunden ist.

Für $\Theta = 0$ ergiebt sich aus der vorhergehenden Gleichung:

$$44)\quad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1...4} + \cdots.$$

für jedes x zwischen $-\infty$ und $+\infty$.

Vergleicht man die reellen und imaginären Theile der Gleichung 43) mit einander, so erhält man die beiden folgenden für jedes x zwischen $-\infty$ und $+\infty$ geltenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} & 45)\quad e^{x\cos\Theta}\cos(x\sin\Theta) \\ &= 1 + \frac{x}{1}\cos\Theta + \frac{x^2}{1.2}\cos 2\Theta + \frac{x^3}{1.2.3}\cos 3\Theta + \frac{x^4}{1...4}\cos 4\Theta + \cdots. \end{aligned}$$

und

$$46)\quad e^{x\cos\Theta}\sin(x\sin\Theta)$$
$$=\frac{x}{1}\sin\Theta+\frac{x^2}{1.2}\sin 2\Theta+\frac{x^3}{1.2.3}\sin 3\Theta+\frac{x^4}{1...4}\sin 4\Theta+\ldots.$$

Setzt man in diesen beiden Gleichungen $\Theta=\frac{1}{2}\pi$, so erh man, weil

$$\cos\frac{1}{2}\pi=0,\quad \sin\frac{1}{2}\pi=+1;$$
$$\cos\frac{2}{2}\pi=-1,\quad \sin\frac{2}{2}\pi=0;$$
$$\cos\frac{3}{2}\pi=0,\quad \sin\frac{3}{2}\pi=-1;$$
$$\cos\frac{4}{2}\pi=+1,\quad \sin\frac{4}{2}\pi=0;$$
$$\cos\frac{5}{2}\pi=0,\quad \sin\frac{5}{2}\pi=+1;$$
$$\cos\frac{6}{2}\pi=-1,\quad \sin\frac{6}{2}\pi=0;$$

u. s. w.

ist, die beiden folgenden höchst wichtigen und merkwürdig für jedes x zwischen $-\infty$ und $+\infty$, d. h. für jedes reelle x tenden Gleichungen:

$$47)\quad \cos x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1...4}-\frac{x^6}{1...6}+\frac{x^8}{1...8}-\ldots.$$

und

$$48)\quad \sin x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1...5}-\frac{x^7}{1...7}+\frac{x^9}{1...9}-\ldots.$$

Wenn man

$$a+b\sqrt{-1}=\varrho(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})$$

und folglich

$$\varrho\cos\Theta=a,\quad \varrho\sin\Theta=b$$

setzt, so ergiebt sich aus 43) auch, wenn man in dieser Gleichung was nach dem Obigen verstattet ist, $x=\varrho$ setzt, die für jede reelle a und b geltende Gleichung:

$$49)\quad e^a(\cos b + \sin b\sqrt{-1}) = 1 + \frac{a+b\sqrt{-1}}{1} + \frac{(a+b\sqrt{-1})^2}{1.2} + \frac{(a+b\sqrt{-1})^3}{1.2.3} + \frac{(a+b\sqrt{-1})^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots\ldots$$

§. 8.

Ferner wollen wir uns jetzt mit der Summirung der wichtigen eihe

$$\frac{x}{1}(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}),$$
$$-\frac{x^2}{2}(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\frac{x^3}{3}(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}),$$
$$-\frac{x^4}{4}(\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\frac{x^5}{5}(\cos 5\Theta + \sin 5\Theta\sqrt{-1}),$$

u. s. w.

eschäftigen.

Bezeichnen wir die Logarithmen, deren Basis die aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannte Grösse e ist *), durch den Buchstaben l, so ist nach dem allgemeinen Begriffe der Logarithmen

$$(1 + 2x\cos\Theta + x^2)^{\frac{1}{2}\alpha} = e^{\frac{1}{2}\alpha l(1+2x\cos\Theta+x^2)},$$

und folglich nach 28) für jedes zwischen -1 und $+1$ liegende x:

*) Welche auch natürliche oder hyperbolische Logarithmen genannt werden.

$$50)\quad e^{\frac{1}{2}\alpha l(1+2x\cos\Theta+x^2)}(\cos\alpha\varphi+\sin\alpha\varphi\sqrt{-1})$$
$$= 1$$
$$+\frac{\alpha}{1}x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}x^2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}x^3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.3.4}x^4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder

$$51)\quad e^{\frac{1}{2}\alpha l(1+2x\cos\Theta+x^2)}(\cos\alpha\varphi+\sin\alpha\varphi\sqrt{-1})$$
$$= 1$$
$$+\alpha x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$-\frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)x^2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{1}{3}\alpha(1-\alpha)(1-\frac{1}{2}\alpha)x^3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})$$
$$-\frac{1}{4}\alpha(1-\alpha)(1-\frac{1}{2}\alpha)(1-\frac{1}{3}\alpha)x^4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

wo

$$\varphi = \text{Arc tang}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

ist, und immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden mu

Also ist nach 49), wenn man in der dortigen Gleichung, w verstattet ist, weil dieselbe für jedes reelle a und b gilt,

$$a = \frac{1}{2}\alpha l(1+2x\cos\Theta+x^2),\ b = \alpha\varphi$$

setzt:

$$1$$
$$+\alpha x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$-\frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)x^2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{1}{3}\alpha(1-\alpha)(1-\frac{1}{2}\alpha)x^3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})$$
$$-\frac{1}{4}\alpha(1-\alpha)(1-\frac{1}{2}\alpha)(1-\frac{1}{3}\alpha)x^4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= 1$$
$$+ \left\{\frac{1}{2}l(1+2x\cos\Theta+x^2)+\varphi\sqrt{-1}\right\}\frac{\alpha}{1}$$
$$+ \left\{\frac{1}{2}l(1+2x\cos\Theta+x^2)+\varphi\sqrt{-1}\right\}^2\frac{\alpha^2}{1.2}$$
$$+ \left\{\frac{1}{2}l(1+2x\cos\Theta+x^2)+\varphi\sqrt{-1}\right\}^3\frac{\alpha^3}{1.2.3}$$
$$+ \left\{\frac{1}{2}l(1+2x\cos\Theta+x^2)+\varphi\sqrt{-1}\right\}^4\frac{\alpha^4}{1...4}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

er, wenn man die Einheit auf beiden Seiten abzieht und dann rch α dividirt:

$$x\,(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$-\frac{1}{2}(1-\alpha)x^2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{1}{3}(1-\alpha)(1-\frac{1}{2}\alpha)x^3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})$$
$$-\frac{1}{4}(1-\alpha)(1-\frac{1}{2}\alpha)(1-\frac{1}{3}\alpha)x^4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2}l(1+2x\cos\Theta+x^2)+\varphi\sqrt{-1}$$
$$+ \left\{\frac{1}{2}l(1+2x\cos\Theta+x^2)+\varphi\sqrt{-1}\right\}^2\frac{\alpha^2}{1.2}$$
$$+ \left\{\frac{1}{2}l(1+2x\cos\Theta+x^2)+\varphi\sqrt{-1}\right\}^3\frac{\alpha^3}{1.2.3}$$
$$+ \left\{\frac{1}{2}l(1+2x\cos\Theta+x^2)+\varphi\sqrt{-1}\right\}^4\frac{\alpha^4}{1...4}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ir jedes zwischen -1 und $+1$ liegende x.

Lässt man nun α sich der Null nähern, geht auf beiden eiten der obigen Gleichungen zu den Gränzen über, und setzt ugleich für φ seinen obigen Werth, so erhält man die folgende erkwürdige für jedes zwischen -1 und $+1$ liegende x geltende leichung:

$$52)\quad \frac{1}{2}l(1+2x\cos\Theta+x^2)+\operatorname{Arctang}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}\cdot\sqrt{-1}$$
$$= x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$-\frac{x^2}{2}(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{x^3}{3}(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})$$
$$-\frac{x^4}{4}(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{x^5}{5}(\cos 5\Theta+\sin 5\Theta\sqrt{-1})$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

in welcher nach dem Obigen bekanntlich

$$\operatorname{Arctang}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden muss.

Setzt man

$$a+b\sqrt{-1}=\varrho(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}),$$

so ist

$$\varrho=\sqrt{a^2+b^2},\quad \varrho\cos\Theta=a,\quad \varrho\sin\Theta=b$$

und

$$1+2\varrho\cos\Theta+\varrho^2=1+2a+a^2+b^2=(1+a)^2+b^2.$$

Weil nun nach 52) für $\varrho<1$

$$\frac{1}{2}l(1+2\varrho\cos\Theta+\varrho^2)+\operatorname{Arctang}\frac{\varrho\sin\Theta}{1+\varrho\cos\Theta}\cdot\sqrt{-1}$$
$$=\frac{\varrho}{1}(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}$$
$$-\frac{\varrho^2}{2}(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{\varrho^3}{3}(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})$$
$$-\frac{\varrho^4}{4}(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{\varrho^5}{5}(\cos 5\Theta+\sin 5\Theta\sqrt{-1})$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\text{Arc tang}\frac{\varrho \sin \Theta}{1+\varrho \cos \Theta}$$

schen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden muss, ist; so ist für

$$\sqrt{a^2+b^2} < 1$$

wenn man

$$\text{Arc tang}\frac{b}{1+a}$$

schen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ nimmt:

$$53)\quad \frac{1}{2}l\{(1+a)^2+b^2\}+\text{Arc tang}\frac{b}{1+a}\cdot\sqrt{-1}$$

$$+b\sqrt{-1}-\frac{1}{2}(a+b\sqrt{-1})^2+\frac{1}{3}(a+b\sqrt{-1})^3-\frac{1}{4}(a+b\sqrt{-1})^4+\ldots$$

Durch Vergleichung der reellen und imaginären Theile in der ichung 52) mit einander erhält man die beiden folgenden für es x zwischen -1 und $+1$ geltenden Gleichungen:

$$54)\quad \frac{1}{2}l(1+2x\cos\Theta+x^2)$$

$$=\frac{x}{1}\cos\Theta-\frac{x^2}{2}\cos 2\Theta+\frac{x^3}{3}\cos 3\Theta-\frac{x^4}{4}\cos 4\Theta+\ldots$$

$$55)\quad \text{Arc tang}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

$$=\frac{x}{1}\sin\Theta-\frac{x^2}{2}\sin 2\Theta+\frac{x^3}{3}\sin 3\Theta-\frac{x^4}{4}\sin 4\Theta+\ldots,$$

$$\text{Arc tang}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

schen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist.

Für $\Theta=0$ erhält man aus 54) die für jedes x zwischen -1 $+1$ geltende Gleichung:

$$56)\quad l(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots,$$

für $\Theta=\frac{1}{2}\pi$ ergiebt sich aus 55) die ebenfalls für jedes x schen -1 und $+1$ geltende Gleichung:

$$57)\quad \text{Arc tang } x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots,$$

in welcher Arc tang x zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist.

Weil aber die Reihen

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots$$

und

$$\pm 1, \mp\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{5}, \mp\frac{1}{7}, \pm\frac{1}{9}, \ldots,$$

da in denselben die absoluten Werthe der Glieder fortwährend abnehmen und die Zeichen wechseln, nach einem bekannten Satze aus der Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen convergiren, und $l2$ und Arc tang (± 1) endliche völlig bestimmte Grössen sind, so ist man nach einem andern bekannten Satze aus der Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen zu schliessen berechtigt, dass die Gleichung 56) auch noch für $x=1$, die Gleichung 57) auch noch für $x=\pm 1$ gilt, wodurch wir in Verbindung mit dem Obigen unter Anwendung einer gewiss durch sich selbst sogleich verständlichen Bezeichnung zu den beiden folgenden Gleichungen geführt werden:

$$58)\quad l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots.$$
$$\{-1 < x = +1\}$$

und

$$59)\quad \text{Arc tang } x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \ldots.$$
$$\{-1 = x = +1\}$$

wo Arc tang x immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden muss.

Für $x=-1$ geht die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der Gleichung 58) in die Reihe

$$-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots.$$

über, und da dies nach einem bekannten auch schon oben in §. 5. III. angewandten Satze aus der Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen eine divergente Reihe ist, so ist ersichtlich, dass für $x=-1$ die Gleichung 58) ihre Gültigkeit verliert, worauf man auch schon durch die sogleich zu machende Bemerkung, dass $l(1-1) = l0$ keinen endlichen völlig bestimmten Werth mehr hat, hätte geführt werden können.

Für $x = 1$ erhält man aus der Gleichung 58):

$$60) \quad l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots,$$

und für denselben Werth von x ergiebt sich aus der Gleichung 59), in welcher bekanntlich Arctang x immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist:

$$61) \quad \frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots.$$

Indem ich diese Abhandlung hiermit schliesse, wiederhole ich die schon im Eingange gemachte Bemerkung, dass ich in derselben durchaus nicht die Absicht gehabt habe, bloss Neues zu geben. Vielmehr schliesst sich dieselbe an frühere bekannte Muster an, die ich hier wohl nicht erst noch besonders namhaft zu machen brauche. Ich bezwecke mit derselben hauptsächlich nur, eine zusammenhängende im Geiste der neueren Analysis durchgeführte Entwickelung aller derjenigen Reihen zu geben, welche gewissermassen als Elementar-Reihen zu betrachten sind, weil von denselben die meisten übrigen Untersuchungen über die Reihen und die Functionen ihren Auslauf nehmen müssen, so wie denn auch auf denselben lediglich die Construction der Tafeln beruhet, welche in der gesammten Mathematik die häufigste und allgemeinste Anwendung finden. Namentlich habe ich aber in dieser Abhandlung auch eine vollständige Darstellung des Binomischen Lehrsatzes, insbesondere eine gehörige Unterscheidung aller der Fälle von einander, in welchem die betreffende Reihe convergirt oder divergirt, der Satz also gültig oder ungültig ist, zu geben versucht, da in der That die Darstellung dieses wichtigen Theorems, wie dieselbe seit der Zeit des Flors der combinatorischen Analysis ganz in der nämlichen veralteten Weise auch selbst in vielen neueren Lehrbüchern der sogenannten Analysis des Endlichen oder der algebraischen Analysis zum Ueberdruss immer wieder erscheint, den Ansprüchen, welche man nach den neueren Fortschritten der Analysis zu machen berechtigt ist, doch zu wenig genügt, wobei ich natürlich nur Lehrbücher, die sich als eine höhere wissenschaftliche Tendenz verfolgend ankündigen, nicht solche, die bloss für den Elementar-Unterricht in der allgemeinen Arithmetik bestimmt sind oder eine mehr praktische Richtung einschlagen, im Auge habe. Ich wünsche daher durch diese Abhandlung zur grösseren Verbreitung der neueren Ansichten in der Analysis beizutragen, welches dem Zwecke des Archivs durchaus nicht widerspricht, sondern demselben vielmehr völlig gemäss ist. Zugleich soll dieselbe einer anderen in ähnlicher Weise gehaltenen, nächstens folgenden Abhandlung über die imaginären Grössen zur Vorbereitung dienen.

XXVI.

Beitrag zu der Lehre von den Farben.

Von dem

Herrn Doctor Botzenhart,

Assistenten der Physik am k. k. polytechnischen Institut zu Wien.

(Durch Herrn Director v. Littrow dem Herausgeber gütigst zur Aufnahme in das Archiv mitgetheilt.)

Eine vollkommene allen Anforderungen entsprechende Theorie der Farben der Körper ist noch immer eine Aufgabe der Physik, zu deren Lösung eine von mir vor Kurzem gemachte Beobachtung Einiges beitragen dürfte.

Wenn man das von gefärbten Körpern durch Reflexion uns zugesendete Licht mittelst der in Poggendorff's Annalen Bd. LXV. S. 4. beschriebenen dichroscopischen Loupe analysirt, so sieht man bei einer gewissen Schiefe der Incidenz des auf den farbigen Körper fallenden Lichtes und wenn die Ebene des Hauptschnittes des Kalkspathrhomboids mit der Einfallsebene der zum Auge gelangenden Strahlen parallel ist, oder auf ihr senkrecht steht, zwei Bilder, von denen das eine nahe vollkommen weiss, das andere aber mit derselben Farbe wie der untersuchte Körper erscheint. Am deutlichsten zeigt sich die Erscheinung an ziemlich gut reflectirenden gefärbten Flächen, namentlich gefärbter Papiere, farbiger Gläser, Flüssigkeiten, Krystalle etc. Wenn die Fläche nur einigermassen spiegelt, und man unter dem gehörigen Winkel, den man durch den Versuch leicht ausmitteln kann, gegen die Fläche hinsieht, so ist die Sonderung des weissen und farbigen Bildes eine vollkommene.

Bei minder gut reflectirenden Flächen, wie auch bei farbigen Pulvern und unter andern Incidenzwinkeln der Strahlen ist die Sonderung minder vollkommen und geht bis zur völligen Gleichheit beider Bilder.

Wenn man auf die früher angegebene Weise die vollkommene Sonderung erhalten hat und hält zwischen den farbigen Körper und die Loupe eine parallel zur Axe geschnittene Turmalinplatte so, dass ihr Hauptschnitt dem des Kalkspathes parallel ist, oder auf ihm senkreht steht, so verschwindet das eine oder das andere

Bild vollkommen. Das weisse Bild charakterisirt sich als in der Einfallsebene der Strahlen polarisirt, das farbige ist senkrecht darauf polarisirt.

Da nun gewöhnliches Licht auf eine Fläche auffallend durch Reflexion immer nur in der Einfallsebene polarisirt wird, so kann das von der farbigen Fläche kommende auf der Einfallsebene senkrecht polarisirte Licht nicht durch Reflexion an der Oberfläche des Körpers entstehen, sondern ist durchgelassenes (daher senkrecht zur Einfallsebene polarisirtes) und aus dem Innern des Körpers reflectirtes Licht.

Aus dieser von mir beobachteten Erscheinung gehen zunächst mit grosser Wahrscheinlichkeit folgende zwei Sätze hervor:

1) Das auf die Körper auffallende weisse Licht wird auch als solches reflectirt.

Der öfters aufgestellte Satz, dass farbige Körper von dem auf ihre Oberfläche auffallenden weissen Lichte einige farbige Strahlen zurücksenden, andere in sich eindringen lassen, scheint nach obiger Beobachtung unrichtig.

2) Das von den Körpern uns zugesendete farbige Licht kommt nicht von ihrer Oberfläche, sondern aus ihrem Innern durch Reflexion nach vorausgegangener Transmission.

Dies im Kurzen die von mir gemachte Beobachtung und die daraus zunächst sich ergebenden Folgerungen. Ich habe Versuche mit homogenem Lichte, eben so mit weissem polarisirten Lichte gemacht, welche mir obige zwei Sätze zu bestätigen scheinen.

Da ich über diesen Gegenstand, der mit vielen andern Erscheinungen, als z. B. mit den Farben glühender Körper, der elliptischen Polarisation durch Reflexion von Metalloberflächen etc. im innigsten Zusammenhange zu stehen scheint, noch eine ausgedehnte Reihe von Versuchen anstellen werde, und selbe noch viele Zeit in Anspruch nehmen dürften, so hielt ich es für zweckmässig, das Hauptergebniss meiner Untersuchung vorläufig im Archive mitzutheilen, und behalte mir vor, das Endresultat meiner Untersuchungen späterhin im Detail in dieser Zeitschrift bekannt zu machen.

XXVII.

Ueber ein neues logisches Gesetz und seine Anwendung auf die Begründung der Parallelentheorie.

Von dem

Herrn Dr. Wilh. Matzka,

Professor der Mathematik zu Tarnow in Galizien.

I.

1. *Schwierigkeiten der Parallelentheorie.*

Die Lehre von den parallelen Geraden hat allbekanntlich die hinderliche Eigenheit, dass man, wie man es auch immer anfangen mag, doch jedesmal auf einen Satz stösst, der sich nicht in der gewöhnlichen Weise aus seinen Vorläufern, oder aus der Natur der in ihm verbundenen geometrischen Begriffe erweisen lässt. Die Ursache dieser unangenehmen Unterbrechung des innigsten Zusammenhanges und der folgerechten Reihung aller Sätze der Geometrie liegt in der Unmöglichkeit, die einfachen Begriffe „Lage und Richtung" weder erklären, noch auch nur durch zureichende Grundmerkmale charakterisiren zu können.

2. *Abhilfen.*

Als erste Abhilfe hat man nun vielerhand Erklärungen der Parallellinien versucht. Allein da es sich hier nicht um eine Sach-, sondern nur um eine Worterklärung, d. h. eigentlich um Angabe des Grundes für die Wahl einer Benennung einer bereits erkannten Eigenschaft zweier unbegrenzten geraden Linien handelt, und da naturgemäss derlei Benennungen aus den üblichen Namen der einzelnen Merkmale solcher Eigenschaften zusammengesetzt zu werden pflegen, so kann man die griechische Benennung παραλληλαι, weil sie aus παρα, bedeutend (mit dem Dativ auf die Frage wo?) bei, neben, längs, juxta, und ἀλληλους, einander zusammengesetzt, und daher durch nebeneinanderisch zu verdeutschen ist, nur dadurch erläutern — wie auch bereits Euklid gethan — dass die also benamseten Gegenstände in ihrer ganzen Ausdehnung entweder im Raume oder auf einer

Fläche, neben einander, d. i. jeder auf nur Einer Seite des anderen liegen, und (nicht wie manche sich berührende Raumdinge) keinen Punkt gemein haben, oder nirgends zusammentreffen, sondern überall getrennt (separat) bleiben. Sind diese räumlichen Gegenstände insbesondere gerade, und zugleich in einerlei Ebene befindliche Linien, so lässt sich von ihnen nachweisen: 1) dass jedwede Richtung der einen als einer Richtung der anderen gleich angesehen werden dürfe, mithin insofern beide Geraden gleichgerichtet (äquidirect) oder gleichlaufend (gleichläufig) heissen können, und 2) dass sämmtliche Punkte einer jeden Geraden von der anderen gleiche (senkrechte) Abstände haben, folglich beide Geraden von einander gleichabständig (äquidistant) sind. Diese Gleichabständigkeit besteht auch, wenn eine Gerade neben einer Ebene oder zwei Ebenen neben einander liegen also nebeneinanderisch, oder im obigen Sinne parallel sind. Allein dies berechtiget keineswegs zu der, in vielen neueren Lehrbüchern der Geometrie beliebten Erklärung: „Parallel (nebeneinanderisch) heisst ein räumlicher Gegenstand zu einem anderen (insbesondere zwei Geraden oder Ebenen zu einander, oder eine Gerade zu einer Ebene) wenn jeder Punkt des ersteren gleichweit von dem letzteren (Gegenstande) entfernt ist.“ Eine solche Erklärung klingt wie etwa folgende: „Ein gleichseitiges oder ein gleichwinkeliges Dreieck ist ein solches, dessen Spitzen von den gegenüberliegenden Seiten gleichweit abstehen,“ oder wie folgende: „Ein gleichseitiges Viereck ist ein solches, in welchem die Diagonalen sich winkelrecht halbiren.“ Nichts ist widernatürlicher, als solche, erst absonderlich zu erweisende, Lehrsätze in Erklärungen umzuformen.

3. Allein weder jenes Neben-einander-liegen oder Von-einander-geschieden-sein, noch diese Gleichabständigkeit erschöpft, einzeln für sich genommen, den mit dem Worte „Parallel“ nicht etymologisch, sondern von den Geometern eigentlich verbundenen Begriff. Denn — wie schon Tacquet gegen Euklid bemerkt — gibt es Linien, von denen jede auf blos Einer Seite der anderen liegt, die also in ihrer ganzen Ausdehnung nirgends zusammentreffen, wie z. B. die Hyperbel oder die Conchois, und ihre gerade Asymptote, zwei Parabeln mit einerlei Brennpunkt und Axe, u. m. a.; und doch nennt sie der Geometer nicht parallel. Andererseits erhält man zu einer krummen Linie oder Fläche eine gleichabständige, wenn man von jedem Punkte derselben auf seiner Normale nach einerlei Seite oder Gegend hin gleichgrosse Strecken nimmt und ihre Endpunkte stetig verbindet. (Klügel, Mathem. Wörterb. 3. Bd. S. 738. Nro. 24.). Aber solche gleichabständige Linien oder Flächen können dessenungeachtet mit einander zusammentreffen, wie z. B. die Ellipse und Parabel mit mancher ihrer inneren, die Cycloide mit jeder äusseren, und die Hyperbel sowohl mit inneren als äusseren Aequidistanten, u. m. dgl. Desswegen däucht es mir der strengeren Wissenschaftlichkeit der Geometrie angemessener zu sein, von jeglichen zwei solchen mit einander zu betrachtenden räumlichen Gegenständen vorerst zu erweisen, dass ihr Getrenntsein und ihre Gleichabständigkeit sich gegenseitig bedingen, und nachher erst desswegen sie parallel zu nennen.

4. Eine zweite Abhilfe, deren sich alle neueren kritischen und die gerügte schwache Seite der Parallelentheorie offenherzig eingestehenden Geometer bedienen, ist die zu Grundelegung eines möglichst einleuchtenden Lehrsatzes. Je mehr dieser in der That von selbst erhellet, je leichter er begriffen und zugestanden werden kann, oder je plausibler er ist; für desto gründlicher erkennt man die auf ihn gebaute Parallelentheorie an. Von diesen Theorien sind jedoch alle jene wenigstens tadelnswerth, wenn nicht schlechterdings verwerflich, welche sich auf die Lehre von den Dreiecken stützen, also das Einfache durch das Zusammengesetzte beweisen; da bei den Parallellinien eigentlich nur an einem Paar Geraden, ihre Winkel mit einer blos für die Forschung zu Hülfe genommenen dritten zu betrachten kommen, bei den Dreiecken aber ausser den Winkeln auch noch Seiten, begrenzte gerade Linien, betrachtet werden. Dann aber bleiben der anderen Parallelentheorien nur höchst wenige übrig, und selbst diese sind nicht unbedenklich.

Sehr gern legt man einen der beiden folgenden Sätze als evident zu Grunde:

„Zu einer Geraden gibt es durch jeden Punkt nur eine einzige parallele Gerade."

„Zwei Geraden, die zu einer dritten parallel sind, müssen auch zu einander parallel sein."

Der Hauptgrund, den man für diese Sätze beibringt, ist ihre Analogie, ihr Gleichlauten mit vielen anderen. Allein ihnen stehen doch auch folgende analoge Sätze entgegen:

„Zu einer $\begin{matrix}\text{Ebene}\\\text{Geraden}\end{matrix}$ gibt es durch jeden Punkt unzählig viele parallele $\begin{matrix}\text{Geraden}\\\text{Ebenen}\end{matrix}$."

„Zwei $\begin{matrix}\text{Geraden}\\\text{Ebenen}\end{matrix}$, die zu einer $\begin{matrix}\text{Ebene}\\\text{Geraden}\end{matrix}$ parallel sind, müssen keineswegs parallel sein, sondern können sich manchmal auch schneiden."

Dadurch leiden obige Sätze sehr an ihrer Evidenz und unbedenklichen Zulassung.

5. Die dritte Abhilfe, welche meines Wissens noch Niemand vor mir vorgeschlagen hat, ist die Berücksichtigung des allgemein und streng erweisbaren nothwendigen Zusammenhanges zweier Paare unzertrennlich zusammen bestehender Beschaffenheiten oder Merkmale — wie deren so vielerlei in der Mathematik vorkommen — von denen die einen bestimmt, die anderen unbestimmt, insbesondere theils Gleichheiten theils Ungleichheiten sind; und die daraus folgende Aufstellung der vier, solchen Zusammenhang umständlich und vollständig ausprechenden Sätze, unter denen im vorliegenden Falle ein nach den gewöhnlichen Schlussarten nicht erweisbarer Lehrsatz vorkommt. — Nachdem ich den Beweis dieses Zusammenhanges vielmals und mit Beseitigung aller der Wissenschaft nachtheiligen Selbstliebe kritisch geprüft und ohne Fehler befunden habe, so glaube ich nicht weiter anstehen zu sollen, diese neue Begründungsweise der Parallelentheorie den Geometern zur Beachtung vorzulegen.

6. *Neuer Hauptlehrsatz der Logik.* Hängen zwei Begriffe S und Σ dergestalt unzertrennlich zusammen, dass beide nur zugleich vorhanden sein können, keiner aber ohne den anderen bestehen kann; und ist der Begriff S nur entweder der eindeutige also bestimmte a, oder der zweideutige also unbestimmte b, (namentlich entweder b' oder b''); dessgleichen der Begriff Σ nur entweder der eindeutige also bestimmte α, oder der zweideutige also unbestimmte β, (namentlich entweder β' oder β''): so muss jedweder einzelne der ersteren zwei sich gegenseitig ausschliessenden Begriffe a und b (welcher selbst entweder b' oder b'' ist) mit einem der letzteren zwei einander gegenseitig ausschliessenden Begriffe α und β (der selbst entweder β' oder β'' ist) zusammen bestehen;

und zwar müssen jederzeit und nothwendig

einerseits die beiden eindeutigen, bestimmten, a u. α, andererseits die beiden zweideutigen, unbestimmten, b und β,

mit einander bestehen, jeder den andern bedingen; nie aber kann ein eindeutiger, bestimmter, mit einem zweideutigen, unbestimmten, zusammen bestehen.

Eigentlich ist hier nur der letztere verneinende Satz zu erweisen, nemlich, dass unter den gemachten Voraussetzungen nie ein eindeutiger und ein zweideutiger ein bestimmter und ein unbestimmter Begriff, d. i. weder a und β, noch α und b, mit einander bestehen können; denn dieser Satz zerfällt nothwendig in jene zwei ersteren bejahenden Sätze.

Richtig aber muss der Satz sein, weil an dem eindeutigen Begriffe a oder α kein Merkmal oder Kennzeichen sich auffinden lässt, welcher der beiden dem zweideutigen gleichgeltenden einander gegenseitig ausschliessenden Begriffe mit ihm (dem eindeutigen) zusammen bestehen soll, nemlich ob zu a der Begriff β' oder β'', zu α der Begriff b' oder b'' gehöre; und weil man daher durchaus keinerlei Grund hat, mit jenem eindeutigen eher den einen als den anderen der zwei disjunctiven Begriffe verbunden zu denken — mit a eher β' als β'', mit α eher b' als b'' —; oder auch, weil jeder Grund, aus welchem man den einen mit ihm verbunden ansehen will, auch anwendbar ist, um den andern mit ihm verbunden anzunehmen, so dass beide zugleich damit verbunden gedacht werden könnten — mit a sowohl β' als β'', mit α sowohl b' als b'' —; was doch offenbar ungereimt ist, da diese zwei disjunctiven Begriffe β' und β'' so wie b' und b'' einander dermassen ausschliessen, dass sie nie mit einander zugleich vorkommen können.

7. *Fernere Erläuterung.* Wenn demnach die zwei disjunctiven Urtheile

1) S ist entweder a
oder b, und im letzteren Falle entweder b' oder b'';

2) Σ ist entweder α
oder β, und im letzteren Falle entweder β' oder β'';

unzertrennlich zusammenhängen, so dass mit einem jeden der Urtheile

$$S \text{ ist } a, \quad S \text{ ist } b,$$

eines der Urtheile

$$\Sigma \text{ ist } \alpha, \quad \Sigma \text{ ist } \beta,$$

nothwendig verbunden sein muss; so müssen jederzeit einerseits die beiden bestimmten Urtheile

$$S \text{ ist } a \text{ und } \Sigma \text{ ist } \alpha,$$

so wie andererseits die beiden unbestimmten zweideutigen Urtheile

$$S \text{ ist } b = b' \text{ oder } b'' \text{ und } \Sigma \text{ ist } \beta = \beta' \text{ oder } \beta''$$

gleichzeitig zusammen bestehen.

Folglich müssen zugleich mit einander vier hypothetische Urtheile gelten:

1) Wenn S, a ist; so ist Σ, α.
2) Wenn S, b ist; so ist Σ, β.
3) Wenn Σ, α ist; so ist S, a.
4) Wenn Σ, β ist; so ist S, b.

Von diesen sind 1) und 4) so wie 2) und 3) Contrapositionen von einander, mithin unmittelbare Folgerungen aus einander; dessgleichen sind 1) und 3) so wie 2) und 4) Umgekehrte von einander.

8. *Absonderliche Beweisführung in der Anwendung.*

Obwohl diese vier hypothetischen Urtheile, als eben so viel Lehrsätze der angewandten Logik, nach dem obigen Beweise, ganz allgemein und in aller Strenge gelten müssen, und sonach in jedem besonderen Falle mit voller Ueberzeugung von ihrer Giltigkeit angewendet werden dürfen, so muss man sie dennoch in den einzelnen Zweigen der Grössenwissenschaft noch absonderlich beweisen, um darzulegen, dass die in ihnen verbundenen zweierlei Begriffe wirklich einander gegenseitig bedingen.

Gewöhnlich beweist man zwei solche aus ihnen, die nicht Contrapositionen, also nicht nothwendige unmittelbare Folgen aus einander sind, nemlich

entweder 1) und 2), oder 1) und 3);

wonach die beiden übrigen als ihre Contrapositionen, auch ihre nächsten nothwendigen Folgen sind. Der erstere Vorgang ist ein besonderer Fall des allgemeinen Umkehrungsgesetzes von Hauber*).

*) Vergl. meinen Aufsatz im Archiv. 6. Theil. 4. Heft. Nro. XLIV. Art. II., 1. S. 358.

Aber es genügt auch schon der Beweis eines einzi-
en dieser vier Sätze, um sie allesammt über jeden Zweifel
u erheben, oder vielmehr, da sie vermöge des obigen allgemeinen
Beweises derselben keinem gegründeten Zweifel unterliegen können,
m sie nur noch mehr zu bestätigen und zu bekräftigen. Beweist
man z. B. den Satz 1) *), so folgt aus ihm seine Contraposition
4) und aus beiden jeder der zwei anderen.

Denn wollte man etwa den Satz:

3) Wenn Σ, α ist; so ist S, a;

nicht zugestehen, also nicht gelten lassen, dass mit dem Begriffe
α der Begriff a zusammenhänge; so müsste man, weil mit dem
Begriffe α doch nothwendig einer der Begriffe a und b verbunden
ein muss, mit ihm den Begriff b verknüpfen, also den Satz:

Wenn Σ, α ist; so ist S, b;

inräumen. Aus diesen würde aber durch Contraposition sogleich
olgen:

Wenn S nicht b ist; so ist auch Σ nicht α;

. h.

Wenn S, a ist; so ist Σ, β.

Da jedoch diese Folgerung mit 1) im Widerspruche ist, so
idet die Giltigkeit von 3) keinen Zweifel. Dann aber gilt auch
eine Contraposition 2).

9. *Gewöhnliche allgemeine Anwendung.*

Der obige logische Hauptlehrsatz kommt vornehmlich da in
nwendung, wo S und Σ Vergleichungen von Grössen oder
Beschaffenheiten mancher Gegenstände sind; daher a und α
ie Gleichheit, das Gleichsein (=), dagegen b und β die Un-
leichheit, Verschiedenheit, das Verschiedensein ($\gtrless$) solcher
Eigenschaften bedeuten. Für diesen Fall gilt folgender

Allgemeiner logischer Lehrsatz. Wenn an irgend
weien, unzertrennlich mit einander bestehenden,
ich gegenseitig bedingenden oder bestimmenden
Gegenständen G und g zweierlei Merkmale (Beschaffen-
heiten, Eigenschaften oder Bestimmungsstücke), nemlich so-
wohl eines Theils A und a, als auch andern Theils B
und b vorkommen; und wenn die beiden Merkmale der-
selben Art entweder gleich (=) oder ungleich (verschie-
den $\gtrless$) sein können, mithin nothwendig jede der bei-
den Vergleichungen

$$A = a \text{ und } A \gtrless a$$

mit einer der beiden anderartigen

$$B = b \text{ und } B \gtrless b$$

*) Wie in der unten folgenden Lehre vom Zusammentreffen der Geraden.

zusammen bestehen muss: so müssen jederzeit un nothwendig einerseits die Gleichheiten der beiderl Merkmale, d. i.

$$A = a \text{ und } B = b,$$

mit einander und andererseits auch die Ungleichhe ten dieser zweierlei Merkmale d. i.

$$A \gtrless a \text{ und } B \gtrless b$$

wieder mit einander bestehen; nie aber kann di Gleichheit der einen Merkmale mit der Ungleichhei der anderen

$$\text{weder } A = a \text{ mit } B \gtrless b,$$
$$\text{noch } B = b \text{ mit } A \gtrless a,$$

bestehen.

Sind nemlich die einen Merkmale gleich, so sind auch di anderen gleich;

sind dagegen die einen Merkmale ungleich, so sind auch di anderen ungleich;

niemals aber können die einen Merkmale gleich und die andern ungleich sein.

Mithin müssen hier jedesmal zugleich folgende vier hypo thetische Sätze gelten:

I. Wenn $A = a$ ist; so ist auch $B = b$.
II. Wenn $A \gtrless a$ ist; so ist auch $B \gtrless b$.
III. Wenn $B = b$ ist; so ist auch $A = a$.
IV. Wenn $B \gtrless b$ ist; so ist auch $A \gtrless a$.

10. *Beispiele.*

1) Sind die Zusätze (zweiten Summanden) zu einerlei Gröss (erstem Summand) $\begin{matrix}\text{gleich}\\ \text{ungleich}\end{matrix}$, so sind auch die Beträge (Summen $\begin{matrix}\text{gleich}\\ \text{ungleich}\end{matrix}$.

Umgekehrt:

Sind nach geschehenem Zusatze zu einerlei Grösse (Subtra hend) die Beträge (Minuende) $\begin{matrix}\text{gleich}\\ \text{ungleich}\end{matrix}$, so müssen auch die ge brauchten Zusätze (Unterschiede, Differenzen) $\begin{matrix}\text{gleich}\\ \text{ungleich}\end{matrix}$ sein.

2) Sind bei einerlei Multiplikand (erstem Factor) die Multi plikatoren (zweiten Factoren) $\begin{matrix}\text{gleich}\\ \text{ungleich}\end{matrix}$, so sind auch die Product $\begin{matrix}\text{gleich}\\ \text{ungleich}\end{matrix}$.

Umgekehrt:

Sind bei einerlei Divisor (erstem Factor) die Dividende (Producte) $\begin{matrix}\text{gleich}\\\text{ungleich}\end{matrix}$, so sind auch die Quotienten (zweiten Factoren) $\begin{matrix}\text{gleich}\\\text{ungleich}\end{matrix}$.

3) Im Dreiecke liegen

gleichen Seiten gleiche Winkel,
und ungleichen Seiten ungleiche Winkel gegenüber;

also liegen auch umgekehrt:

gleichen Winkeln gleiche Seiten,
und ungleichen Winkeln ungleiche Seiten gegenüber.

II.

Verwendung des aufgestellten logischen Gesetzes in der Parallelentheorie.

11. *Zweckmässigere Benennung der Winkel zweier Geraden in einerlei Ebene mit einer sie beide in zwei Punkten schneidenden dritten.*

Werden (Taf. IV. Fig. 3.) zwei in einerlei Ebene befindliche Geraden LM und $\lambda\mu$ von einer dritten Nv in zwei Punkten P und π geschnitten, so heissen bekanntlich einem allgemeinen Gebrauche gemäss die Winkel a, b, α, β innere, und ihre Scheitelwinkel a', b', α', β' äussere Winkel;

ferner die Winkel a mit α, und b mit β Wechselwinkel,
so wie die Winkel a mit β, und b mit α Gegenwinkel.

Höchst zweckmässig behält man mit Knar diese letzteren Benennungen der Paare zusammengestellter Winkel der einen und anderen Geraden mit der dritten Schneidenden auch dann noch bei, wenn in obigen Paaren an die Stelle eines oder beider Winkel der (gleiche) Scheitelwinkel tritt. — Dann sind

(gleichlautend bezeichnete) Wechselwinkel:

$$a\alpha\ a\alpha'\ a'\alpha\ a'\alpha',\quad b\beta\ b\beta'\ b'\beta\ b'\beta';$$

(ungleichlautend bezeichnete) Gegenwinkel:

$$a\beta\ a\beta'\ a'\beta\ a'\beta',\quad b\alpha\ b\alpha'\ b'\alpha\ b'\alpha'.$$

12. Allgemeiner Zusammenhang zwischen den Grössen der Wechsel- und Gegenwinkel.

(Neuer) *Hauptlehrsatz.* Werden zwei gerade Linien von einer dritten in zwei Punkten geschnitten, so ist sowohl der Unterschied jeder zwei Wechselwinkel, als auch der Unterschied eines gestreckten Winkels und der Summe jeder zwei Gegenwinkel überall gleich, wofern immer (arithmetisch) das Kleinere vom Grösseren abgezogen wird.

Denn behält man in Taf. IV. Fig. 4. die Bezeichnung aus Taf. IV. Fig. 3. mit der einzigen Abweichung bei, dass man die äusseren Winkel gerade so, wie die ihnen als Scheitelwinkel gleichen inneren bezeichnet, weil hier nur die Grösse der Winkel zu berücksichtigen kommt; so hat man, weil a und b so wie α und β Nebenwinkel sind, wenn der gestreckte Winkel mit G bezeichnet wird, die Gleichungen:

$$a+b=G,\ \alpha+\beta=G.$$

Daraus folgt sogleich $a+b=\alpha+\beta$, und wenn man $a \gtreqless \alpha$ voraussetzt,

$$a-\alpha=\beta-b,$$

wonach $b \lesseqgtr \beta$ sein muss.

Schreibt man die erste Gleichung wie folgt:

$$G=(a+\beta)-(\beta-b)=(b+\alpha)+(a-\alpha),$$

so findet man hieraus und aus dem bereits Gefundenen die Gleichungen:

$$a-\alpha=\beta-b=G-(b+\alpha)=(a+\beta)-G,$$

welche den behaupteten Satz ausdrücken, und in denen $a+\beta \gtreqless G$, $b+\alpha \lesseqgtr G$ ist.

13. *Gefolgerte allgemeine Alternative.*

Verschwindet / Besteht demnach irgend einer dieser durchweg gleichen Unterschiede, so verschwindet / besteht auch schon jeder.

Vereinzelte Betrachtung.

Werden zwei gerade Linien von einer dritten in zwei Punkten dergestalt geschnitten, dass entweder irgend zwei Wechselwinkel gleich / ungleich sind, oder irgend zwei Gegenwinkel zusammen einen / keinen gestreckten Winkel ausmachen: so sind auch jede zwei Wechselwinkel gleich / ungleich, und jede zwei Gegenwinkel machen zusammen einen / keinen gestreckten Winkel aus.

14. *Auf diese Vergleichung der Winkel gegründete Unterscheidung*

A. der Seiten der Schneidenden.

Wo die allesammt gleichen Unterschiede wirklich bestehen, da unterscheiden sich die beiden Seiten der schnei-

nden Geraden darin von einander, dass auf der $\begin{matrix}\text{einen}\\\text{anderen}\end{matrix}$ Seite

eder äussere Winkel $\begin{matrix}\text{grösser}\\\text{kleiner}\end{matrix}$ als sein innerer Wechselwinkel,

nd die Summe der inneren Gegenwinkel $\begin{matrix}\text{kleiner}\\\text{grösser}\end{matrix}$, jene der

usseren Gegenwinkel aber um eben so viel $\begin{matrix}\text{grösser}\\\text{kleiner}\end{matrix}$ als ein

estreckter Winkel ist.

Wo aber die allesammt gleichen Unterschiede verchwinden, da besteht auch kein solcher Unterschied zwischen en Seiten der Schneidenden; sondern auf beiden Seiten derselben t jeder äussere Winkel gleich seinem inneren Wechselwinkel, nd sowohl die inneren als die äusseren Gegenwinkel betragen usammen einen gestreckten Winkel.

All dieses erhellet aus Taf. IV. Fig. 4. und den in Art 12. aufeführten gleichzeitigen Vergleichungen:

$$a \gtreqless \alpha,\ b \lesseqgtr \beta,\ a+\beta \lesseqgtr G,\ b+\alpha \lesseqgtr G.$$

B. der Arten des Schneidens.

Aus diesen Ergebnissen leuchtet ein, dass zwei gerade Linien on einer dritten in zwei Punkten nur auf zweierlei Weise eschnitten werden können, nemlich entweder

1) so, dass jede zwei Wechselwinkel *gleich* sind, und ede zwei Gegenwinkel zusammen einen gestreckten Winkel betragen,

folglich, dass auf beiden Seiten der Schneidenden jeder äussere Winkel seinem inneren Wechselwinkel gleich ist, und jede zwei gleichnamige $\left(\begin{matrix}\text{innere}\\\text{äussere}\end{matrix}\right)$ Gegenwinkel zusammen einen gestreckten Winkel ausmachen, also dass die beiden Seiten der Schneidenden, rücksichtlich der Vergleichung der Winkel, *gleiche* Beschaffenheit zeigen; oder

2) so, dass jede zwei Wechselwinkel *ungleich* sind, und jede zwei Gegenwinkel zusammen keinen gestreckten Winkel betragen,

folglich, dass auf der $\begin{matrix}\text{einen}\\\text{anderen}\end{matrix}$ Seite der Schneidenden jeder äussere Winkel $\begin{matrix}\text{grösser}\\\text{kleiner}\end{matrix}$ als sein innerer Wechselwinkel ist, und die inneren Gegenwinkel zusammen $\begin{matrix}\text{weniger}\\\text{mehr}\end{matrix}$ als einen gestreckten Winkel ausmachen, also

dass die beiden Seiten der Schneidenden, rücksichtlich der Vergleichung der Winkel *ungleiche* Beschaffenheit zeigen.

Man kann das $\begin{matrix}\text{erstartige}\\\text{zweitartige}\end{matrix}$ Schneiden kurz mit Knar ein Schneiden unter $\begin{matrix}\text{gleichen}\\\text{ungleichen}\end{matrix}$ Wechselwinkeln nennen.

15. *Auf die gegenseitige Lage der beiden Geraden gegründete Unterscheidung*

A. der Seiten der Schneidenden.

Werden zwei Geraden von einer dritten in zwei Punkten geschnitten, so liegt, wenn die Geraden nirgends zusammentreffen, folglich durchweg getrennt sind, zu beiden Seiten der Schneidenden ein Paar getrennter Strahlen (halber Geraden), dagegen wenn die Geraden sich treffen, auf einer Seite ein Paar getrennter, und auf der anderen ein Paar sich schneidender Strahlen. Dort schneiden sich die Geraden weder diesseits noch jenseits der Schneidenden; hier dagegen schneiden sie sich auf nur einer, aber nicht auf der anderen Seite.

B. der Arten des Schneidens.

Zwei Geraden können demnach von einer dritten in zwei Punkten nur dermassen auf zweierlei Art geschnitten werden, dass entweder

1) zu beiden Seiten der Schneidenden jedes Paar halber Geraden getrennt ist, also die beiden Seiten der Schneidenden, rücksichtlich des Zusammentreffens der Hälften jener Geraden, *gleiche* Beschaffenheit haben; oder

2) so, dass auf der einen Seite der Schneidenden der Durchschnittspunkt der zwei Geraden liegt, also ein Paar halber Geraden zusammentreffen, auf der anderen Seite kein Durchschnittspunkt der Geraden liegt, also ein Paar halber Geraden getrennt sind, folglich so, dass die beiden Seiten der Schneidenden, rücksichtlich des Zusammentreffens der Hälften jener Geraden, *ungleiche* Beschaffenheit besitzen.

16. *Uebergangsbetrachtung.*

Die Seiten der Schneidenden zeigen daher rücksichtlich zweierlei Umstände, eines Theils gleiche andern Theils ungleiche Beschaffenheiten, nemlich sowohl rücksichtlich der Vergleichungen der Winkel als auch rücksichtlich der gegenseitigen Lagen der halben Geraden, welche auf diesen Seiten sich befinden. Nun entsteht die Frage, ob diese beiderlei Beschaffenheiten der Seiten der Schneidenden mit einander zusammenhängen oder nicht, namentlich also mit Bezug auf den obigen allgemeinen logischen Lehrsatz (in Art. 9.), ob einerseits beide gleichen und andererseits beide ungleichen Beschaffenheiten mit einander bestehen, d. h. ob einerseits das Getrenntsein der beiden Geraden mit dem Schneiden der dritten unter gleichen Wechselwinkeln,

und andererseits

das Zusammentreffen der zwei Geraden mit dem Schneiden der dritten unter ungleichen Wechselwinkeln zusammengehöre.

Diese Frage wird uns der erste von den bald folgenden vier zusammengehörigen Lehrsätzen in der That bejahen. Vorher aber erwägen wir noch nachstehende

17. *Wichtige Bemerkung für die Kritik.*

Die Nothwendigkeit des Beweises solchen Zusammenhanges der angeführten zweierlei Gleichheiten und Ungleichheiten der

eiten der Schneidenden wird um so mehr einleuchten, wenn man olgende Wahrheit bedenkt:

Obige drei Sätze in Art. 12. und 13. bleiben auch lann noch vollständig giltig, wenn man in ihnen überall die Wörter „*Wechsel-* und *Gegenwinkel*" mit einander vertauscht.

Denn aus den Gleichheiten

$$G = a+b = \alpha+\beta$$
$$= (a+\alpha)-(\alpha-\beta) = (b+\beta)+(a-\beta)$$

indet man auch

$$a-\beta = \alpha-b = (a+\alpha)-G = G-(b+\beta);$$

wobei man bedingt

$$a \gtreqless \beta,\ b \lesseqgtr \alpha,\ a+\alpha \gtreqless G,\ b+\beta \lesseqgtr G.$$

Demnach können leicht auch die, auf die Vergleichungen der Winkel gestützten, Unterscheidungen der Seiten der Schneidenden nd der Arten des Schneidens (in Art. 14.) passend abgeändert usgesprochen werden, und man wird ersehen, dass hiebei nur ntweder auf jeder Seite der Schneidenden jedweder Winkel seinem gleichnamigen) Gegenwinkel gleich, oder von jeglichen zwei Neenwinkeln der eine grösser, der andere aber kleiner als sein Geenwinkel sein könne, also das Schneiden entweder unter leichen oder ungleichen *Gegenwinkeln* geschehe.

Allein man wird ohne sonderliche Schwierigkeit erkennen, dass iese zweierlei Schneidungen auf das Zusammentreffen und Gerenntsein der Geraden ohne Einfluss sind. Denn je nachdem die leichen Gegenwinkel schiefe oder rechte Winkel sind, schneiden ich die beiden Geraden oder treffen sich gar nicht; und bei ungleichen Gegenwinkeln können die Geraden eben sowohl einander schneiden als nirgends treffen.

18. *Gegenseitige Abhängigkeit des Zusammentreffens und Getrenntseins zweier in einer Ebene befindlichen Geraden und der zweierlei Schneidungen jeglicher dritten Geraden.*

I. *Hauptlehrsatz.* Zwei gerade Linien, welche von einer dritten in zwei Punkten unter *gleichen* Wechselwinkeln geschnitten werden, *treffen sich nirgends.*

Wenn nemlich die Geraden LM und $\lambda\mu$ (in Taf. IV. Fig. 4.) von der $N\nu$ unter gleichen Wechselwinkeln, $a=\alpha$, $b=\beta$, geschnitten werden, so treffen sie sich in ihrer ganzen Ausdehnung nirgends.

Beweis (nach de Veley). Die Gerade $N\nu$ zertheilt die Ebene, in der sich die Geraden LM und $\lambda\mu$ befinden, in zwei Abtheilungen. Diese lassen sich nun so auf einander legen, dass die Figur $LP\pi\lambda$ auf $\mu\pi PM$ dergestalt zu liegen kommt, dass $P\pi$ in verwendeter Lage sich selbst deckt, daher auch die Winkel

α und β die ihnen gleichen α und b decken; folglich PL auf $\pi\mu$ und $\pi\lambda$ auf PM fällt. Könnte nun eines der zwei Paar halber Geraden $PL, \pi\lambda$ und $\pi\mu, PM$ sich schneiden; so müsste auch das andere Paar sich schneiden, weil beide Paare auf einander liegen. Die Geraden LM und $\lambda\mu$ träfen sich aber dann in zwei Punkten, was unmöglich ist. Mithin treffen sich diese Geraden weder diesseits noch jenseits der Nv, also gar nirgends.

Anmerkung. Dieser Satz bewährt demnach den Zusammenhang zwischen den an den beiden Seiten der Schneidenden vorkommenden zweierlei Gleichheiten und Ungleichheiten; sohin gelten, vermöge des von uns aufgestellten logischen Gesetzes, nothwendig und ohne eines nochmaligen Beweises zu bedürfen, auch schon die theils als Contrapositionen theils als Umkehrungen zusammenhängenden drei ferneren Lehrsätze. Um jedoch darzulegen, dass und wie die auf jenes allgemeine Gesetz der Logik gegründeten Beweise dieser Sätze in Lehrbüchern zu geben wären, sollen dieselben hier ebenfalls vollständig dargelegt werden.

19. II. Gegentheilig folgt hieraus:

Zwei *zusammentreffende* Geraden werden von jeder dritten, die sie in zwei Punkten trifft, unter *ungleichen* Wechselwinkeln geschnitten;

und zwar so, dass auf derjenigen Seite der Schneidenden, auf welcher die beiden Geraden zusammentreffen, jeder äussere Winkel grösser als sein innerer Wechselwinkel, und die Summe der inneren Gegenwinkel kleiner als ein gestreckter Winkel ist.

Beweis des Anhangs. Durch den Punkt P (Taf. IV. Fig. 5.), in welchem die erstere der zwei im Punkte O sich schneidenden Geraden LM und $\lambda\mu$ von der dritten Nv geschnitten wird, führe man die Gerade JK dergestalt, dass sie mit der Schneidenden den, mit dem Durchschnittspunkte O auf einerlei Seite liegenden Winkel NPK oder $\alpha' = \alpha$ macht; folglich JK und $\lambda\mu$ von der Nv unter gleichen Wechselwinkeln geschnitten werden, und also (vermöge I.) nirgends zusammentreffen. — Nun muss aber jede Gerade, welche in den beiden Scheitelwinkeln b der Geraden LM und Nv durch ihren Durchschnittspunkt P geführt wird, in die gerade Verbindungslinie $O\pi$ der Schenkel eines solchen Winkels einschneiden *), also auch in die Gerade $\lambda\mu$. Mithin kann die JK, weil sie die $\lambda\mu$ nirgends trifft, keineswegs in den zwei Scheitelwinkeln b der Geraden LM und Nv, sondern nur in den zwei anderen, a, liegen, und daher insbesondere ihre Richtung PK in dem Winkel $NPM = a$; wesswegen $NPM > NPK$ oder $a > \alpha'$ ist. — Weil aber $\alpha' = \alpha$ construirt worden, muss auch $a > \alpha$ sein.

20. III. Umkehrung des ersten Lehrsatzes:

Zwei gerade Linien, welche *nirgends zusammentreffen*, werden von jeder dritten Geraden, die sie beide trifft, unter *gleichen* Wechselwinkeln geschnitten.

---

*) Weil diese Gerade in das Innere der geschlossenen Figur $P\pi OP$ eindringt, und also den Umfang dieser Figur wenigstens noch einmal schneiden muss, was nur in der Strecke $O\pi$ möglich ist.

Beweis. Könnten zwei gerade Linien, die sich nirgends treffen, wie LM und $\lambda\mu$ in Taf. IV. Fig. 4., von einer dritten $N\nu$ unter ungleichen Wechselwinkeln geschnitten werden; so müssten die beiden Seiten der Schneidenden $N\nu$ (vermöge Art. 14.) darin von einander sich unterscheiden, dass auf der einen Seite jeder äussere Winkel grösser, auf der anderen aber kleiner als sein innerer Wechselwinkel ist. Allein die zwei Geraden LM und $\lambda\mu$ treffen einander nirgends, also weder auf der einen, noch auf der anderen Seite der Schneidenden $N\nu$; folglich sind in dieser Hinsicht die beiden Seiten der Schneidenden nicht von einander verschieden, sondern gleich beschaffen. Sonach gibt es durchaus kein Merkzeichen von den zwei Geraden, mittels dessen die beiden Seiten der Schneidenden, rücksichtlich jener Vergleichungen der Wechselwinkel, von einander unterschieden werden könnten; d. h. es gibt keinen Grund eher auf der einen als auf der anderen Seite der Schneidenden die äusseren Winkel grösser als ihre inneren Wechselwinkel zu denken; oder vielmehr, jeder Grund, aus welchem man eine solche Eigenschaft der einen Seite der Schneidenden zuschreiben will, berechtigt auch, dieselbe Eigenschaft ihrer anderen Seite beizulegen, so dass auf einer jeden Seite der Schneidenden der äussere Winkel nicht nur grösser, sondern auch zugleich kleiner als sein innerer Wechselwinkel sein müsste; was doch in sich selbst schon ungereimt wäre. Mithin können die beiden Seiten der Schneidenden, rücksichtlich der Vergleichung ihrer Wechselwinkel, nur gleich beschaffen, folglich auf jeder Seite jedweder äussere Winkel seinem inneren Wechselwinkel nur gleich sein. Dann aber sind auch jede zwei Wechselwinkel gleich, und die beiden Geraden LM und $\lambda\mu$ werden von der dritten $N\nu$ unter gleichen Wechselwinkeln geschnitten.

Anderer Beweis. Gesetzt der behauptete hypothetische Satz würde nicht gelten, so müsste mit seiner Bedingung das Gegentheil seiner Folge verbunden sein, also der Satz gelten:

„Wenn zwei Geraden nicht zusammentreffen, so werden sie von einer dritten unter ungleichen Wechselwinkeln geschnitten."

Aus diesem aber würde mit logischer Strenge in aufhebender Weise gefolgert werden:

„Wenn zwei Geraden von einer dritten unter gleichen Wechselwinkeln geschnitten werden, so müssen sie zusammentreffen."

Allein dieser Satz ist mit dem ersten genau begründeten Lehrsatze, dem zufolge die Geraden nicht zusammentreffen, im entschiedenen Widerspruche. Mithin hat der behauptete Satz volle Giltigkeit.

21. IV. Gegensätzlich folgt hieraus und aus dem Anhange zum IIten Satze:

Zwei gerade Linien, die von einer dritten in zwei Punkten unter *ungleichen* Wechselwinkeln geschnitten werden, *treffen sich*;

und zwar auf derjenigen Seite der Schneidenden, auf welcher jeder äussere Winkel grösser als sein innerer Wechselwinkel ist, und die inneren Gegenwinkel zusammen weniger als einen gestreckten Winkel ausmachen.

22. Schlussbemerkung. Nunmehr unterliegt es keinem weiteren Anstande, vor aller Kenntniss der Lehre vom Dreiecke, bloss durch Deckung von ebenen Figuren nachzuweisen, dass durchaus getrennte Geraden, auch durchweg gleichabständig von einander sind. Dann ist man berechtigt, solchen Geraden die Benennung parallel zu geben.

XXVIII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem Herrn Dr. A. Wiegand, Oberlehrer an der Realschule zu Halle.

1) Wenn man durch die Winkelspitzen eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks eine Parabel beschreibt, welche ihren Scheitel in der Spitze des Dreiecks hat, so ist jedes Loth von der Parabel auf die Hypotenuse das harmonische Mittel zwischen den darauf gebildeten Abschnitten. (Bemerkenswerth wegen der analogen Lösung der entsprechenden Aufgabe vom geometrischen Mittel.)

2) Wenn man durch den einen Scheitel einer gleichseitigen Hyperbel Parallelen mit den Asymptoten zieht und diese als Achsen betrachtet, so ist die Hypotenuse eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks, welches die Halbachse der Hyperbel zum Schenkel hat, das harmonische Mittel zwischen den Coordinaten irgend eines Punktes der Hyperbel.

3) Wenn man eine gleichseitige Hyperbel auf dieselben Achsen wie vorher bezieht, so ist die Ordinate irgend eines Punktes derselben das harmonische Mittel zwischen der zugehörigen Abscisse und der Seite eines gleichseitigen Dreiecks, welches die Achse der Hyperbel zur Höhe hat.

4) Frage, worauf die Antwort verlangt wird:

Wenn man vier harmonische Strahlen durch zwei Transversalen schneidet und auf jedem Strahle zu den beiden Durchschnitts-

nkten und dem Convergenzpunkte den vierten harmonischen unkt sucht, liegen dann die vier gefundenen Punkte ebenfalls in ner Geraden?

5) In einem Quadrate wird die eine Seite über einen ihrer ndpunkte verlängert, es soll aus der diesem Endpunkte gegenüber egenden Winkelspitze an die Verlängerung eine Gerade gezogen erden, so dass das zwischen der Verlängerung und der daran-tossenden Quadratseite liegende Stück eine gegebene Länge hat.

6. Wenn man um Vielecke gleich breite Streifen mit Begren-ungslinien legt, die den Seiten parallel sind, so ist der Inhalt ieser Streifen bei solchen Vielecken, in die sich Kreise beschrei-en lassen, jederzeit durch den Inhalt und Umfang der Vielecke nd die gegebene Breite des Streifens bestimmt, d. h. also bei ielecken von gleichem Inhalt und Umfang bei vorgeschriebener reite derselben.

XXIX.

Miscellen.

Zu Archiv. Thl. V. S. 430.

Von dem Herrn Director Nizze am Gymnasium zu Stralsund.

Die zweite Gleichung ist in so fern unrichtig, als das Minus-zeichen entweder vor beiden Gliedern der Gleichung oder vor kei-nem stehen muss *). Die letzte Gleichung heisst daher:

$$\tan\tfrac{1}{2}(A+(\varphi-\psi))$$
$$=\cot\tfrac{1}{2}(A+(\alpha+\beta))\cot\tfrac{1}{2}(A-(\alpha+\beta))\tan\tfrac{1}{2}(A-(\alpha-\beta)).$$

Soll nun untersucht werden, unter welcher Bedingung die Diagonale CD (Taf. IV. Fig. 6.) senkrecht geschnitten wird, so setze man $\varphi=90^0-\alpha$ und $\psi=90^0-\beta$, also $\varphi-\psi=-(\alpha-\beta)$, wodurch man erhält:

$$1=\cot\tfrac{1}{2}(A+(\alpha-\beta))\cot\tfrac{1}{2}(A-(\alpha+\beta)),$$

*) In der zweiten Gleichung auf S. 430. Z. 5. muss man das Minus-zeichen streichen. M. s. auch die Thl. VI. S. 224. angezeigten Berichti-gungen. Gr.

$$\text{oder } 0 = \cos\tfrac{1}{2}(A+(\alpha-\beta))\cos\tfrac{1}{2}(A-(\alpha+\beta)) - \sin\tfrac{1}{2}(A+(\alpha-\beta))\sin\tfrac{1}{2}(A-(\alpha+\beta)),$$

$$0 = \cos A, \text{ mithin } A = \begin{cases} +90^0 \\ +270^0 \end{cases} \quad B = \begin{cases} +90^0 \\ +270^0 \end{cases}$$

Die Bedeutung des ersten Werths von A und B erhellt sofort aus der Figur. Zur Erklärung des zweiten ist eine neue erforderlich, in welcher die beiden Winkel CAD und CBD an einerlei Seite des Durchmessers CD liegen.

Setzt man pag. 429. in der letzten Gleichung $A = 90^0$, so folgt $\sin\frac{1}{2}((\alpha-\beta)+(\varphi-\psi)) = 0$, also entweder $\beta-\alpha = \varphi-\psi$ oder $\frac{1}{2}((\alpha-\beta)+(\varphi-\psi)) = 180^0$, $\alpha-\beta+\varphi-\psi = 360^0$, $\varphi-\psi = 360^0+\beta-\alpha = \beta-\alpha$. Dasselbe ergiebt sich für $A = 270^0$.

Den geometrischen Lehrsatz, welcher hierin liegt, formulirte Herr Dr. Arndt, wie mich dünkt, sehr angemessen so:

Wenn man die Durchschnittspunkte zweier Gegenseitenpaare eines Kreisvierecks durch eine Gerade verbindet, so steht diese stets auf der Seite des dritten Paares senkrecht, welche ein Durchmesser des Kreises ist; wobei auch die Diagonalen zu den Gegenseiten gerechnet sind.

Ich bemerke dabei, dass der geometrische Beweis des Lehrsatzes sich sofort aus der Eigenschaft der drei Höhenperpendikel eines Dreiecks, sich in einem Punkte zu treffen, ergiebt.

Eine Diagonale oder Seite, welche nicht Durchmesser ist, wird wegen des oben ermittelten Werthes von A und B niemals senkrecht von der verbindenden Geraden getroffen.

XXX.

Näherungswerth der Abweichung des Watt'schen Parallelogramms.

Von dem

Herrn Professor Dr. G. W. v. Langsdorff

an der höheren Bürgerschule zu Mannheim.

Die genaue Berechnung der Abweichung des Watt'schen Parallelogramms führt zu einer sehr komplicirten für den Praktiker unbrauchbaren Formel. Ueberdies ist die ganz allgemeine Behandlung dieser Aufgabe schon desshalb ohne Nutzen, weil die Unbrauchbarkeit von Verhältnissen, welche gewisse Gränzen bedeutend überschreiten, von selbst in die Augen fällt. Diese Gründe veranlassten mich zu der Untersuchung, ob sich nicht die Beziehung der Abweichung zu den gegebenen Abmessungen für die praktischen Fälle durch eine einfache Näherungsformel ausdrücken lasse. Der Erfolg hat meine Erwartung übertroffen, und scheint mir der Mittheilung werth.

Die wesentliche Einrichtung des Watt'schen Parallelogramms setze ich als bekannt voraus.

Bei der gewöhnlichen Einrichtung, auf welche ich mich hier beschränke, weil sie in jeder Hinsicht die zweckmässigste zu sein scheint, hat der Balancier sd (Taf. V. Fig. 1.) beim mittleren Kolbenstande eine horizontale Lage, die Cylinder- oder Kolbenaxe MN halbirt die Höhe δQ des vom Endpunkte d beschriebenen Bogens, die Länge $ad\,(=r)$ des Parallelogramms ist gleich der Hälfte der Entfernung sd des Endpunktes d von der Axe s des Balanciers, und die Abweichung der Ecke c (des Parallelogramms), welche die Kolbenstange trägt, von der Cylinderaxe MN ist beim höchsten, tiefsten und mittleren Kolbenstande gleich Null.

Es sei nun $ABCD$ das Parallelogramm beim höchsten, $\alpha\beta\gamma\delta$ beim mittleren und $abcd$ bei einem beliebigen Kolbenstande, so folgt aus den Voraussetzungen, dass bei horizontaler Lage des Balanciers die Entfernung $\beta\gamma$ des Endpunktes β des Gegenlenkers von der Cylinderaxe MN

$$= \delta\alpha = PE\,(=r)$$

ist.

Die Abweichung A der Ecke c gegen die Balancieraxe ist nun allgemein

$$A = \gamma n = \gamma\beta - n\beta = PE - nf - f\beta$$
$$= as - es - f\beta = \alpha e - f\beta.$$

Daher ist $A = 0$ für $\alpha e = f\beta$; folglich ist $\alpha E = \beta F$, und $\alpha e = 0$ ist auch $f\beta = 0$, d. h. bei horizontaler Lage des Balanciers hat der Gegenlenker die horizontale Lage βm.

Nun ist $AE\beta$ Eine Gerade (wegen $\beta\gamma = PE$), daher auch αBF Eine Gerade, weil $\alpha E = F\beta$. Da $AB = \alpha\beta$, $Bq = \angle AqB = \angle \alpha F\beta$, so ist $\Delta ABq \cong \Delta \alpha\beta F$, $Aq = \alpha F$, $AE = \alpha\beta$. Ferner ist $as = \beta\gamma$, $\alpha E = F\beta$, also $Es = F\gamma$, und $\angle AEs = \angle \beta$ daher $\Delta AEs \cong BF\gamma$, und $B\gamma = As = \gamma\beta$. Hieraus folgt, dass die Axe des Gegenlenkers und dass die Länge desselben $= r$

Da $A = \alpha e - \beta f$, so ist wahrscheinlich nahe

$$A = \frac{ae^2}{2r} - \frac{bf^2}{2r};$$

um uns aber zu überzeugen, ob der Fehler dieses Werthes Verhältniss zu A klein sei, suchen wir den genauen Werth $\frac{ae^2 - bf^2}{2r}$. Wir haben

$$\frac{ae^2 - bf^2}{2r} = \frac{\alpha e(2r - \alpha e) - \beta f(2r - \beta f)}{2r}$$
$$= \alpha e - \frac{\alpha e^2}{2r} - \beta f + \frac{\beta f^2}{2r}$$
$$= (\alpha e - \beta f)\left(1 - \frac{\alpha e + \beta f}{2r}\right),$$

also genau

$$A = \alpha e - \beta f = \frac{ae^2 - bf^2}{2r \cdot \left(1 - \frac{\alpha e + \beta f}{2r}\right)} = \frac{ae^2 - bf^2}{2r - (\alpha e + \beta f)},$$

und in der Praxis immer sehr nahe

$$A = \frac{ae^2 - bf^2}{2r - 2\alpha e},$$

und da $ae^2 - bf^2 = (ae + bf) \cdot (ae - bf)$, noch sehr nahe

$$A = ae \cdot \frac{ae - bf}{r - \alpha e}.$$

Bei der Ausführung pflegt man aber AE höchstens $= \frac{As}{3} =$

ehmen, und für das Maximum von A (worauf es hier an-
nt) ist ae sehr nahe $=\frac{3}{5}\,\alpha E$ (siehe unten), also höchstens

$$\frac{AE^2}{2r}=\frac{3}{5}\cdot\frac{\left(\frac{r^2}{9}\right)}{2r}=\frac{r}{30}.$$ Daher ist höchstens

$$A=ae\cdot\frac{ae-bf}{r-\frac{r}{30}}=\frac{1{,}034}{r}\cdot ae\cdot(ae-bf).$$

Für den geringsten Werth, welchen AE in der Ausübung zu
ten pflegt, nämlich für $AE=\frac{r}{4}$, erhält man den grössten
h von $A=\frac{1{,}02}{r}\cdot ae\cdot(ae-bf)$. Wir setzen daher

$$A=\frac{1{,}03}{r}\cdot ae\cdot(ae-bf).$$

Für die obere Hälfte des Hubes (Taf. V. Fig. 1.) ist dem-
die Abweichung

$$A=\frac{1{,}03}{r}\cdot ae\cdot(ax-\alpha F),$$

positiv (d. h. sie findet nach der Axe s hin Statt), weil
$\alpha\beta$, und $\angle bax<\angle\beta\alpha F$, $ax>\alpha F$. Dagegen ist in der
ren Hälfte (Taf. V. Fig. 2.)

$$A=\frac{1{,}03}{r}\cdot a'e'\cdot(a'e'-b'f')=\frac{1{,}03}{r}\cdot a'e'\cdot(\alpha F-a'x')$$
$$=-\frac{1{,}03}{r}\cdot a'e'\cdot(a'x'-\alpha F),$$

für denselben Werth von ae (oder $a'e'$) eben so gross wie in
oberen Hälfte, aber negativ (d. h. in der Richtung von s nach
weil $a'x'>\alpha F$ ist.

Es ist also allgemein sehr nahe

$$A=\pm\frac{1{,}03}{r}\cdot ae\cdot(ax-\alpha F).$$

Bezeichnet l die Länge AB eines Hängeeisens, so ist

$$ax=\sqrt{l^2-bx^2}.$$

ist

$$bx = F\beta - \alpha\varepsilon - f\beta = F\beta - \alpha\varepsilon - (\alpha\varepsilon - A)$$
$$= F\beta - 2\alpha\varepsilon + A,$$
$$bx^2 = F\beta^2 - 4.\alpha\varepsilon.F\beta + 4.\alpha\varepsilon^2 + 2.(F\beta - 2\alpha\varepsilon).A + A^2,$$

daher

$$ax = \sqrt{(l^2 - F\beta^2 + 4.\alpha\varepsilon.F\beta - 4.\alpha\varepsilon^2 - 2(F\beta - 2\alpha\varepsilon).A - A^2)}$$
$$= \sqrt{(\alpha F^2 + 4.\alpha\varepsilon.(F\beta - \alpha\varepsilon) + 2(2\alpha\varepsilon - F\beta).A - A^2)}$$

Da aber, wie man sich leicht überzeugt, das erste Glied αF^2 mehr als das Hundertfache der Summe der übrigen Glieder ist, so hat man sehr nahe

$$ax = \alpha F + \frac{4.\alpha\varepsilon.(F\beta - \alpha\varepsilon) + 2(2.\alpha\varepsilon - F\beta)A - A^2}{2.\alpha F},$$

daher

$$A = \frac{1{,}03}{r}.\alpha\varepsilon.\frac{4.\alpha\varepsilon.(F\beta - \alpha\varepsilon) + 2(2.\alpha\varepsilon - F\beta)A - A^2}{2.\alpha F},$$

$$\left(\frac{2.\alpha F.r}{1{,}03.\alpha\varepsilon} - 2(2.\alpha\varepsilon - F\beta) + A\right).A = 4.\alpha\varepsilon.(F\beta - \alpha\varepsilon).$$

Es ist aber in der Ausführung $\frac{\alpha F}{\alpha\varepsilon}$ wenigstens $= 2$, also $\frac{2.\alpha F.r}{1{,}03.\alpha\varepsilon}$ wenigstens $= 4r$, so dass die übrigen Glieder in der Klammer verschwinden, und man sehr nahe

$$A = \frac{1{,}03.\alpha\varepsilon}{\alpha F.r}.2.\alpha\varepsilon.(F\beta - \alpha\varepsilon)$$

erhält. Nun ist $\alpha\varepsilon = \sqrt{\alpha\varepsilon.(2r - \alpha\varepsilon)}$, und wenn wir wie oben für $\alpha\varepsilon$ seinen grössten Werth $= \frac{r}{30}$ setzen, $\alpha\varepsilon = \sqrt{\alpha\varepsilon.2r(1 - \frac{1}{60})}$ oder näherungsweise $\alpha\varepsilon = (1 - \frac{1}{120}).\sqrt{\alpha\varepsilon.2r}$. Daher ist hinlänglich genau

$$A = \frac{1{,}02}{r}.\sqrt{\alpha\varepsilon.2r}.\frac{2.\alpha\varepsilon.(F\beta - \alpha\varepsilon)}{\alpha F},$$

Der Ausdruck $x^{\frac{1}{2}}(a - x)$ wird ein Maximum für $x = \frac{3}{5}a$. Daher ist die grösste Abweichung sehr nahe

$$A = \frac{1{,}02.2^{\frac{1}{2}}.\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}.F\beta^{\frac{1}{2}}.\frac{2}{5}.F\beta}{\alpha F.r^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{0{,}536}{\alpha F}.\sqrt{\frac{F\beta^5}{r}}.$$

zeichnen wir den Kolbenhub durch h, so ist

$$F\beta = \frac{FB^2}{2r - F\beta},$$

hr nahe

$$F\beta = \frac{FB^2}{2r - \frac{FB^2}{2r}} = \frac{2r\left(\frac{h}{4}\right)^2}{4r^2 - \left(\frac{h}{4}\right)^2} = \frac{2rh^2}{64r^2 - h^2},$$

wir, weil immer nahe $r = \frac{3}{4}h$ genommen wird,

$$F\beta = \frac{2rh^2}{62r^2} = \frac{2h^2}{62r}$$

können. Diess giebt

$$\sqrt{\frac{F\beta^5}{r}} = \sqrt{\frac{2^5 . h^{10}}{62^5 . r^6}} = 0{,}000187 . \frac{h^5}{r^3},$$

enn wir αF näherungsweise $= l$ setzen,

$$A = \frac{0{,}536}{l} . 0{,}000187 . \frac{h^5}{r^3} = 0{,}000105 . \frac{h^5}{lr^3}.$$

rd in dem Werthe von $F\beta$ der Hub $h = r$ gesetzt, was lls gebräuchlich ist, so erhält man $A = 0{,}000095 . \frac{h^5}{lr^3}$. innen also ohne Bedenken den Mittelwerth für A nehmen,

$$A = 0{,}0001 . \frac{h^5}{lr^3}$$

indem ein Unterschied von $\frac{1}{20}$ des Ganzen hierbei auf die ler Abmessungen keinen Einfluss haben kann.

nmt man, wie gewöhnlich, der Watt'schen Vorschrift ge- $r = \frac{3}{4}h$ und $l = \frac{h}{2}$, so ist die grösste Abweichung 00048 . h, also für $h = 1$ Meter nahe $A = 0{,}5$ Millimeter, $h = 2{,}44$ Meter (den grössten gebräuchlichen Hub) $A = 1\frac{1}{6}$ ter. Sollte, für $r = \frac{3}{4}h$ und $h = 2$ Meter, A nur $= 0{,}5$ ter sein, so müsste l beinahe gleich h sein; $h = 2{,}44$ Meter. nd $A = 0{,}5$ Millimeter fordert r beinahe $= h$.

XXXI.

Analytische Behandlung einiger die Linien zweiten Grades betreffenden Gegenstände.

Von dem

Herrn Doctor F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

I. Die Grundeigenschaft von Pol und Polare in Bezug auf einen Kegelschnitt als Directrix *).

Gewöhnlich (m. s. z. B. Magnus Sammlung etc. Thl. I. pag. 161. seqq.) pflegt man von der allgemeinen Theorie der Reciprocitätsverwandtschaft auszugehen, und die Resultate dann auf den Kegelschnitt zu übertragen; des Folgenden wegen werde ich das Haupttheorem der Polarität unmittelbar für den Kegelschnitt als Directrix erweisen, und für die allgemeinste Gleichung des letztern die Polare und den Pol zu bestimmen suchen.

§. 1.

Der Berührungspunkt einer von dem ausserhalb des Kegelschnitts $Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0$ liegenden Punkte p, q an den Kegelschnitt gezogenen Tangente werde mit x, y bezeichnet. Die Gleichung dieser Tangente ist bekanntlich

$$(q-y)(Ay+Bx+D)+(p-x)(By+Cx+E)=0,$$

oder

$$q(Ay+Bx+D)+p(By+Cx+E)-y(Ay+Bx+D)-x(By+Cx+E)=0,$$

indem p, q die laufenden Coordinaten sind. Da nun

$$y(Ay+Bx+D)+x(By+Cx+E)=Ay^2+2Bxy+Cx^2+Dy+Ex$$
$$=-(Dy+Ex+F),$$

---

*) Eine rein geometrische Behandlung dieses Gegenstandes s. m. im Archiv. Thl. V. pag. 135. seqq.

ist die Gleichung der Tangente:

$$q(Ay+Bx+D)+p(By+Cx+E)+Dy+Ex+F=0,$$

er der Berührungspunkt x, y genügt folgender Gleichung:

$$1.\quad (Aq+Bp+D)y+(Bq+Cp+E)x+Dq+Ep+F=0.$$

Die letztere drückt eine Gerade aus, in welcher die beiden ets existirenden Berührungspunkte liegen, und welche Berührungssehne genannt wird.

§. 2.

Lehrsatz.

Liegen mehrere Punkte ausserhalb eines Kegelschnitts in gerader Linie, so treffen die den einzelnen Punkten entsprechenden Berührungssehnen in demselben Punkte zusammen, einen besondern Fall ausgenommen, in welchem die Berührungssehnen parallel sind.

Beweis.

Die Gerade, in welcher die in Rede stehenden Punkte liegen, sei $q=mp+n$ (p, q laufende Coordinaten), und p, q; p_1, q_1 seien die Coordinaten von zwei beliebigen Punkten derselben. Die den letztern entsprechenden Berührungssehnen werden nach 1. ausgedrückt durch

$$a)\quad \left.\begin{matrix}[(Am+B)y+(Bm+C)x+Dm+E]p\\ +(An+D)y+(Bn+E)x+Dn+F\end{matrix}\right\}=0,$$

$$b)\quad \left.\begin{matrix}[(Am+B)y+(Bm+C)x+Dm+E]p_1\\ +(An+D)y+(Bn+E)x+Dn+F\end{matrix}\right\}=0;$$

nachdem $mp+n$ für q, mp_1+n für q_1 gesetzt worden *).

a) Es kann nun der Fall vorkommen, dass die Geraden a) und b) parallel sind; er tritt nämlich dann ein, wenn der Werth des Bruchs

$$\frac{(Bm+C)p+Bn+E}{(Am+B)p+An+D}$$

von der Grösse p ganz unabhängig ist. Die dazu erforderliche und ausreichende Bedingungsgleichung ergiebt sich, wenn man obigen Bruch der Constanten γ gleich setzt, und die Gleichung dann auf Null bringt, nämlich

---

*) Jede dieser Gleichungen, z. B. a), lässt sich auch unter folgender Form schreiben:

$$[(Am+B)p+(An+D)]y+[(Bm+C)p+(Bn+E)]x+(Dm+E)p+Dn+F=0.$$

$$[Bm+C-\gamma(Am+B)]p+Bn+E-\gamma(An+D)=0;$$

und diese Gleichung wird für jedes p gelten, wenn zugleich

$$Bm+C-\gamma(Am+B)=0,$$
$$Bn+E-\gamma(An+D)=0$$

ist. Eliminirt man γ, so entsteht

$$c)\quad (BD-AE)m-(B^2-AC)n+CD-BE=0.$$

Diese Gleichung zeigt dann, dass die gegebene Gerade $q=mp+n$ ein Durchmesser des Kegelschnitts ist. Denn was die Ellipse und Hyperbel betrifft, so sind die Coordinaten des Mittelpunkts bekanntlich

$$t=\frac{AE-BD}{B^2-AC},\quad u=\frac{CD-BE}{B^2-AC},$$

und nach $c)$ also $u=mt+n$, weshalb der Mittelpunkt in der Geraden $q=mp+n$ liegt. — Mit Rücksicht auf die Parabel ist $B^2-AC=0$, und die Gleichung $c)$ also $m=\frac{CD-BE}{AE-BD}$. Setzt man $CD-BE=H_1$, $AE-BD=H$, und eliminirt D zwischen beiden Gleichungen, so kommt $BH_1+CH=0$, oder $m=\frac{H_1}{H}=-\frac{C}{B}$, folglich die Gerade $q=mp+n$ ein Durchmesser, da die Durchmesser der Parabel bekanntlich in der Gleichung enthalten sind $Bu+Ct+E=0$.

Wenn also die gegebene Gerade ein Durchmesser des Kegelschnitts ist, so sind alle Berührungssehnen einander parallel, und werden durch die Gleichung ausgedrückt:

$$y=-\gamma x-\frac{(Dm+E)p+Dn+F}{(Am+B)p+An+D},$$

wo

$$\gamma=\frac{Bm+C}{Am+B}=\frac{Bn+E}{An+D},$$

und zwar sind alle Sehnen demjenigen Durchmesser parallel, welcher dem gegebenen conjugirt ist.

$\beta)$ Ist die gegebene Gerade kein Durchmesser, so wird das Sehnenpaar $a)$ und $b)$ sich schneiden; zieht man $b)$ von $a)$ ab, so sieht man, dass der Coefficient von p oder p_1 verschwindet, folglich muss auch das zweite Glied der Gleichung $a)$ oder $b)$ verschwinden, und es schneiden sich die sämmtlichen Berührungssehnen in demselben Punkte, dessen Coordinaten durch die beiden Gleichungen bestimmt werden:

$$2.\quad \begin{cases}(Am+B)y+(Bm+C)x+Dm+E=0,\\ (An+D)y+(Bn+E)x+Dn+F=0.\end{cases}$$

Die erste Gleichung drückt (x, y veränderlich gedacht) den der gegebenen Richtung conjugirten Durchmesser, die zweite diejenige Berührungssehne aus, welche dem Durchschnitt der gegebenen Geraden mit der Ordinatenaxe entspricht, welches letztere leicht aus Gleichung 1. geschlossen wird.

§. 3.

Lehrsatz.

Schneiden sich beliebig viele Secanten eines Kegelschnitts in einem einzigen Punkte, oder sind einander parallel, so liegen die Durchschnitte aller Tangentenpaare, welche man in den beiden Durchschnittspunkten einer Secante mit dem Kegelschnitt an den letztern jedesmal ziehen kann, in einer geraden Linie.

Beweis.

α) Der gegebene Durchschnittspunkt sei p, q; und $y-q=m(x-p)$ die Gleichung einer durch ihn gezogenen, den Kegelschnitt in zwei Punkten treffenden Geraden. Wird diese als Berührungssehne des Punktes t, u angesehen, so ist nach 1.

$$(Au+Bt+D)y+(Bu+Ct+E)x+Du+Et+F=0.$$

Identificiren wir diese Gleichung mit $y-q=m(x-p)$, so ergiebt sich

$$m=-\frac{Bu+Ct+E}{Au+Bt+D},\quad q-mp=-\frac{Du+Et+F}{Au+Bt+D},$$

und wird m aus diesen beiden Gleichungen eliminirt, so entsteht

$$3.\quad (Aq+Bp+D)u+(Bq+Cp+E)t+Dq+Ep+F=0,$$

oder diejenige Gerade, in welcher die sämmtlichen Durchschnitte der Tangentenpaare liegen. Nach 1. ist sie die dem Punkte p, q entsprechende Berührungssehne, wenn der letztere ausserhalb des Kegelschnitts liegt.

β) Die Geraden seien sämmtlich parallel, und durch $y=mx+n$ ausgedrückt, indem m als constant, n als veränderlich angesehen wird. Wird jede dieser Geraden wieder als Berührungssehne des Punktes t, u angesehen, so hat man wie in α)

$$m=-\frac{Bu+Ct+E}{Au+Bt+D},\quad n=-\frac{Du+Et+F}{Au+Bt+D}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$4.\quad (Am+B)u+(Bm+C)t+Dm+E=0,$$

und dies ist die Gleichung des der gegebenen Richtung conjugirten Durchmessers.

§. 4.

Anmerkung.

Der Durchschnittspunkt sämmtlicher Berührungssehnen, welche den einzelnen in einer Geraden liegenden Punkten entsprechen, wird der Pol dieser Geraden in Bezug auf den Kegelschnitt als Directrix, und die Gerade selbst die Polare genannt.

§. 5.

Lehrsatz.

Die Verbindungslinie zweier Punkte ist die Polare des Durchschnitts der diesen Punkten entsprechenden Polaren.

Beweis.

Sind p, q; p_1, q_1 die gegebenen Punkte, so sind die Gleichungen ihrer Polaren (t, u laufende Coordinaten):

$$(Au+Bt+D)q+(Bu+Ct+E)p+Du+Et+F=0,$$
$$(Au+Bt+D)q_1+(Bu+Ct+E)p_1+Du+Et+F=0.$$

Zieht man beide Gleichungen von einander ab, so kommt

$$(A\frac{q-q_1}{p-p_1}+B)u+(B\frac{q-q_1}{p-p_1}+C)t+D\frac{q-q_1}{p-p_1}+E=0;$$

multiplicirt man aber die erste Gleichung mit p_1, die andere mit p, und zieht sie dann von einander ab, so kommt

$$(Au+Bt+D)(p_1q-pq_1)+(Du+Et+F)(p_1-p)=0.$$

Diese beiden Gleichungen stimmen mit der Gleichung 2. in §. 2. überein, wenn man $\frac{q-q_1}{p-p_1}$ statt m, $\frac{p_1q-pq_1}{p_1-p}$ statt n setzt, und das Theorem ist somit erwiesen, da die Gleichung der die Punkte p, q; p_1, q_1 verbindenden Geraden $y-q=\frac{q-q_1}{p-p_1}(x-p)$, oder $y=\frac{q-q_1}{p-p_1}x+\frac{p_1q-pq_1}{p_1-p}$ ist.

§. 6.

Lehrsatz

Die Polare eines Punktes ist dem conjugirten Durchmesser desjenigen Durchmessers parallel, welcher durch diesen Punkt gezogen wird.

Beweis.

Für den gegebenen Punkt als Anfang der Coordinaten ist nach die Gleichung der Polaren $Dq+Ep+F=0$.

α) Für die Ellipse und Hyperbel seien nun t, u die Coordinaten des Mittelpunkts, also $Y=\frac{u}{t}X$ die Gleichung des durch en Anfang gezogenen Durchmessers, somit die Gleichung des onjugirten Durchmessers $Y=-\frac{Bu+Ct}{Au+Bt}X+n$, oder, weil benntlich $Au+Bt+D=0$, $Bu+Ct+E=0$ ist: $Y=-\frac{E}{D}X+n'$, olglich dieser conjugirte Durchmesser mit der Polare parallel.

β) Mit Rücksicht auf die Parabel, welche keinen Mittelpunkt at, ist die Gleichung des durch den Anfang gezogenen Durchnessers $By+Cx=0$ (oder $Ay+Bx=0$), und für seinen Durchschnitt mit der Curve ist zugleich $Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0$, oder (wegen $B^2-AC=0$, und $By+Cx=0$) $2Dy+2Ex+F=0$; also $y=\frac{CF}{2(BE-CD)}$, $x=-\frac{BF}{2(BE-CD)}$. Die Tangente n diesem Durchschnitt entspricht hier dem conjugirten Durchmesser; hre Gleichung ist $Y=-\frac{E}{Ay+Bx+D}X+n$, aber $Ay+Bx=0$, lso $Y=-\frac{E}{D}X+n$, und somit auch für diese Curve der Satz rwiesen.

II. Drei Hauptsätze für das in und um einen Kegelschnitt beschriebene Viereck, wobei die Berührungspunkte des letztern die Ecken des erstern sind.

1) Der Durchschnitt zweier Gegenseiten des eingeschriebenen Vierecks liegt mit einem Paare der Gegenecken des umschriebenen in gerader Linie.

2) Die beiden Durchschnittspunkte der Gegenseitenpaare des eingeschriebenen Vierecks liegen mit den beiden Durchschnittspunkten der Gegenseitenpaare des umschriebenen in gerader Linie.

3) Die vier Diagonalen des eingeschriebenen und umschriebenen Vierecks treffen in demselben Punkte zusammen.

§. 7.

Wenn die gerade Linie $y=mx+n$ mit dem Kegelschnitt $Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0$ nur einen Punkt gemein hat, oder eine Tangente desselben ist, so findet man leicht die Bedingungsgleichung:

$$(B^2-AC)n^2+2(AE-BD)mn+(D^2-AF)m^2+2(DE-BF)m+2(BE-CD)n+E^2-CF=0.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$a)\quad \begin{cases} B^2-AC=G, & BE-CD=K, \\ BD-AE=H, & BF-ED=L, \\ D^2-AF=J, & E^2-CF=M; \end{cases}$$

so verwandelt sich obige Gleichung in

$$Gn^2-2Hmn+Jm^2+2Kn-2Lm+M=0.$$

Zweckmässig ist es, die Gerade $y=mx+n$ unter der Form

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$$

darzustellen; die vorhergehende Gleichung wird dann

$$5.\quad G\alpha^2\beta^2+2H\alpha\beta^2+J\beta^2+2K\alpha^2\beta+2L\alpha\beta+M\alpha^2=0.$$

§. 8.

Nimmt man nun die beiden Diagonalen des umschriebenen Vierecks als Axen der x und y, ihren Durchschnitt also als Anfang der Coordinaten an, und bezeichnet die Coordinaten der Endpunkte dieses Vierecks durch $\alpha, 0;\ \alpha_1, 0;\ 0, \beta;\ 0, \beta_1$; so sind die Gleichungen der auf einander folgenden Seiten:

$$6.\quad \begin{cases} \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1, \\ \frac{x}{\alpha_1}+\frac{y}{\beta}=1, \\ \frac{x}{\alpha_1}+\frac{y}{\beta_1}=1, \\ \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta_1}=1; \end{cases}$$

und weil sie den Kegelschnitt berühren, so hat man nach 5. die vier Gleichungen:

$$7.\quad \begin{cases} G\alpha^2\beta^2+2H\alpha\beta^2+J\beta^2+2K\alpha^2\beta+2L\alpha\beta+M\alpha^2=0, \\ G\alpha_1{}^2\beta^2+2H\alpha_1\beta^2+J\beta^2+2K\alpha_1{}^2\beta+2L\alpha_1\beta+M\alpha_1{}^2=0, \\ G\alpha_1{}^2\beta_1{}^2+2H\alpha_1\beta_1{}^2+J\beta_1{}^2+2K\alpha_1{}^2\beta_1+2L\alpha_1\beta_1+M\alpha_1{}^2=0, \\ G\alpha^2\beta_1{}^2+2H\alpha\beta_1{}^2+J\beta_1{}^2+2K\alpha^2\beta_1+2L\alpha\beta_1+M\alpha^2=0. \end{cases}$$

Mittelst dieser vier Gleichungen können vier Coefficienten des Kegelschnitts bestimmt werden, einer bleibt unbestimmt (der sechste ist willkührlich), und es können also unendlich viele Linien zweiten Grades vier Gerade berühren. Versuchen wir jene vier Coefficienten zu bestimmen.

Eliminirt man M aus den beiden ersten Gleichungen, dann s den beiden letzten, so kommt:

$$[2H\alpha\alpha_1 + J(\alpha+\alpha_1)]\beta + 2L\alpha\alpha_1 = 0,$$
$$[2H\alpha\alpha_1 + J(\alpha+\alpha_1)]\beta_1 + 2L\alpha\alpha_1 = 0;$$

eht man diese Gleichungen von einander ab, so findet sich:

$$11. \quad \begin{cases} L = 0, \\ 2H\alpha\alpha_1 + J(\alpha+\alpha_1) = 0. \end{cases}$$

liminirt man G aus 7. und 10., so wird wegen $L = 0$:

$$12. \quad 2K\beta\beta_1 + M(\beta+\beta_1) = 0.$$

ubtrahirt man endlich 10. von 7., so kommt wegen $L = 0$:

$$(G\alpha^2 + 2H\alpha + J)(\beta+\beta_1) + 2K\alpha^2 = 0;$$

ührt man in diese Gleichung für $2H\alpha + J$ seinen Werth aus 11. in, für $\beta+\beta_1$ seinen Werth aus 12., so wird:

$$13. \quad G\alpha\alpha_1\beta\beta_1 - J\beta\beta_1 - M\alpha\alpha_1 = 0.$$

Setzt man $\frac{H}{G} = H_1$, $\frac{J}{G} = J_1$, etc., und drückt mittelst der vier Gleichungen II., 12., 13. durch M_1 die vier übrigen Grössen aus, so erhält man:

$$14. \quad \begin{cases} L_1 = 0, \\ 2K_1 = -\frac{\beta+\beta_1}{\beta\beta_1} M_1, \\ 2H_1 = +\frac{\alpha+\alpha_1}{\beta\beta_1}(M_1 - \beta\beta_1), \\ J_1 = -\frac{\alpha\alpha_1}{\beta\beta_1}(M_1 - \beta\beta_1). \end{cases}$$

Noch sind Relationen zwischen den Grössen G, H, J etc. und den ursprünglichen Coefficienten A, B, C, etc. von Wichtigkeit. Man braucht nur auf die Relationen α) zurückzugehen.

15.
Aus der 4ten u. 5ten (B eliminirt) folgt $DM - FK = 0$.
„ „ „ „ „ (D „) „ $BM - EK = 0$.
Aus der 2ten u. 4ten (E eliminirt) folgt $BJ - DH = 0$.
„ „ „ „ „ (B „) „ $EJ - FH = 0$.
Aus der 2ten u. 4ten (E eliminirt) folgt $DG - BH - AK = 0$.
„ „ „ „ „ (D „) „ $EG - CH - BK = 0$.

§. 9.

Aus den Betrachtungen im vorigen Paragraphen ergiebt sich leicht die Auflösung der Aufgabe: den Ort des Mittelpunkts aller Linien zweiten Grades zu bestimmen, welche vier Gerade berühren. Denn sind x, y die Coordinaten dieses Mittelpunktes, so ist bekanntlich

$$x = -\frac{H}{G},\quad y = -\frac{K}{G},\quad \text{oder } x = -H_1,\ y = -K_1;$$

also nach 14.:

$$2x = -\frac{\alpha+\alpha_1}{\beta\beta_1}(M_1 - \beta\beta_1),$$

$$2y = +\frac{\beta+\beta_1}{\beta\beta_1} M_1.$$

Eliminirt man jetzt aus diesen beiden Gleichungen die Veränderliche M_1, so kommt als Gleichung des gesuchten Orts:

$$2y(\alpha+\alpha_1) + 2x(\beta+\beta_1) = (\alpha+\alpha_1)(\beta+\beta_1).$$

Bei der Discussion dieser Geraden halte ich mich nicht auf, da dieser Gegenstand schon oft abgehandelt ist.

§. 10.

Da die Seiten des eingeschriebenen Vierecks Berührungssehnen sind, so ist nach 1. die Gleichung

16.
$$\begin{cases} \text{der dem Punkte } \alpha,\ 0 \text{ entsprechenden:} \\ \qquad (B\alpha + D)y + (C\alpha + E)x + E\alpha + F = 0; \\ \text{der dem Punkte } \alpha_1,\ 0 \text{ entsprechenden:} \\ \qquad (B\alpha_1 + D)y + (C\alpha_1 + E)x + E\alpha_1 + F = 0; \\ \text{der dem Punkte } 0,\ \beta \text{ entsprechenden:} \\ \qquad (A\beta + D)y + (B\beta + E)x + D\beta + F = 0; \\ \text{der dem Punkte } 0,\ \beta_1 \text{ entsprechenden:} \\ \qquad (A\beta_1 + D)y + (B\beta_1 + E)x + D\beta_1 + F = 0. \end{cases}$$

Die Coordinaten des Durchschnitts der beiden ersten Gegenseiten des eingeschriebenen Vierecks sind also wegen $L = 0$ (vergl. 15.):

17. $$x = 0,\ y = -\frac{M}{K} = -\frac{E}{B} = -\frac{F}{D} = \frac{2\beta\beta_1}{\beta+\beta_1}.$$

Die Coordinaten des Durchschnitts der beiden andern Gegenseiten sind :

$$18.\quad y=0,\ x=-\frac{J}{H}=-\frac{D}{B}=-\frac{F}{E}=\frac{2\alpha\alpha_1}{\alpha+\alpha_1}.$$

Da also der erste Durchschnitt auf der Axe der y, der andere auf der Axe der x liegt, so haben wir das Theorem 1) erwiesen.

Betrachtet man ferner zwei Gegenecken des äussern Vierecks als zugeordnete Punkte, den Durchschnitt der Diagonalen als den dritten Punkt, so ist der Durchschnitt der Gegenseiten des eingeschriebenen Vierecks (welcher mit den erwähnten Gegenecken und dem Durchschnitt der Diagonalen in gerader Linie liegt) der dem 3ten Punkte zugeordnete 4te harmonische Punkt, wie sich aus der Definition der 4 harmonischen Punkte, aus dem Werthe von y aus 17., oder von x aus 18. sehr leicht ergiebt.

§. 11.

Die Gleichung der Geraden, welche die Durchschnitte der Gegenseitenpaare des eingeschriebenen Vierecks verbindet, ist

$$Y=-\frac{\beta\beta_1(\alpha+\alpha_1)}{\alpha\alpha_1(\beta+\beta_1)}\left(X-\frac{2\alpha\alpha_1}{\alpha+\alpha_1}\right),$$

oder, wie man leicht findet:

$$19.\quad \left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta_1}\right)Y+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha_1}\right)X=2.$$

Nun genügt der Durchschnitt zweier Gegenseiten des umschriebenen Vierecks den beiden Gleichungen $\frac{X}{\alpha}+\frac{Y}{\beta}=1$, $\frac{X}{\alpha_1}+\frac{Y}{\beta_1}=1$; der Durchschnitt der beiden andern Gegenseiten den beiden Gleichungen $\frac{X}{\alpha}+\frac{Y}{\beta_1}=1$, $\frac{X}{\alpha_1}+\frac{Y}{\beta}=1$. Durch Addition ergiebt sich, dass der Durchschnitt irgend zweier Gegenseiten der Gleichung $\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta_1}\right)Y+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha_1}\right)X=2$, d. i. der Gleichung 19. genügt, und somit haben wir auch das Theorem 2) erwiesen.

§. 12.

Die Grössen α, α_1, β, β_1 lassen sich auch durch die Coefficienten des Kegelschnitts A, B, C, etc. ausdrücken. Denn nach 4. ist :

$$\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta_1}=-\frac{2K_1}{M_1}=-\frac{2D}{F}\text{ (cf. 15.)},\quad \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha_1}=-\frac{2H_1}{J_1}=-\frac{2E}{F};$$

folglich wird die Gleichung 19.:

$$20.\quad DY+EX+F=0.$$

Dies ist aber die Gleichung der Polaren des Anfangs der Coordinaten, und somit ist die Gerade, in welcher die vier Durchschnitte der Gegenseiten des eingeschriebenen und umschriebenen Vierecks liegen, die Polare des Durchschnitts der beiden Diagonalen.

§. 13.

Das Theorem 3) endlich kann durch die Theorie der Polarität am einfachsten erwiesen werden.

Es sei Taf. V. Fig. 3 *ABCD* das eingeschriebene, *KLMN* das umschriebene Viereck. Weil *K* der Pol von *AB*, *M* der Pol von *CD*, so ist *KM* die Polare des Durchschnitts von *AB* und *CD* (cf. §. 5.), ebenso ist die Diagonale *LN* die Polare des Durchschnitts von *BC* und *AD*. Ferner ist *B* der Pol von *KL*, *D* der Pol von *MN*, also *BD* die Polare des Durchschnitts von *KL* und *MN*, ebenso *AC* die Polare des Durchschnitts von *LM* und *KN*. Da nun die 4 Durchschnitte der Gegenseiten des innern und äussern Vierecks in einer Geraden liegen, so werden ihre Polaren, nämlich die vier Diagonalen, sich in einem Punkte, dem Pole jener Geraden, schneiden.

XXXII.

Ueber das Rückwärtseinschneiden mit dem Messtische oder das Problem der drei Punkte.

Von
dem Herausgeber.

Das sogenannte Rückwärtseinschneiden mit dem Messtische oder das Problem der drei Punkte ist eine für die Praxis so wichtige Aufgabe, dass jede neue Auflösung derselben, welche einigen Nutzen für die praktische Anwendung verspricht, nicht ganz unbeachtet bleiben wird. Die Auflösungen, welche ich in diesem Aufsatze geben werde, gründen sich auf einen sehr leicht zu beweisenden geometrischen Lehrsatz, der auf folgende Art ausgesprochen werden kann, wobei man Taf. VI. Fig. 1. und Taf. VI. Fig. 2. zu vergleichen hat.

Lehrsatz.

Wenn zwei Kreise sich in den Punkten C und D schneiden, von einem dieser beiden Durchschnittspunkte, etwa von dem Punkte C aus, zwei beliebige, die beiden Kreise zum zweiten Male in den Punkten A und B schneidende gerade Linien AC und BC gezogen, und an diese beiden geraden Linien auf entgegengesetzten Seiten derselben in den Punkten A und B die einander gleichen Winkel CAA' und CBB' gelegt werden, deren nöthigenfalls über die Punkte A und B hinaus verlängerte Schenkel AA' und BB' die beiden Kreise zum zweiten Male in den Punkten A_1 und B_1 schneiden; so geht die durch die Punkte A_1 und B_1 der Lage nach bestimmte gerade Linie jederzeit durch den zweiten Durchschnittspunkt D der beiden Kreise, und ist gegen die Linie DC unter demselben Winkel geneigt wie die Linien AA' und BB' gegen die Linien AC und BC, wenn man nur alle diese Winkel von den Linien AC, BC, DC an nach den Linien AA', BB', A_1B_1 hin ganz in demselben Sinne durchläuft.

Beweis.

In dem in Taf. VI. Fig. 1. dargestellten Falle ist

$$\angle CDA_1 = \angle CAA_1 = \angle CAA',$$

und in dem Vierecke $BCDB_1$ ist

$$\angle CBB' + \angle CDB_1 = 2R.$$

Weil nun nach der Voraussetzung

$$\angle CAA' = \angle CBB',$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\angle CDA_1 = \angle CBB'$$

ist, so ist

$$\angle CDA_1 + \angle CDB_1 = 2R.$$

Hiermit ist der Satz offenbar vollständig bewiesen.

In dem in Taf. VI. Fig. 2. dargestellten, und überhaupt in jedem andern Falle, kann der Satz ganz auf ähnliche Art bewiesen werden, was Alles zu einfach ist, als dass es hier noch einer weiteren Erläuterung bedürfen sollte.

Wenn man nun nur noch überlegt, dass in beiden Fällen was sehr leicht zu beweisen ist, sowohl die Winkel CDA und CA_1A', als auch die Winkel CDB und CB_1B, einander gleich sind, so wird man leicht die folgende Auflösung des Problems der drei Punkte verstehen, wobei man Taf. VI. Fig. 3. zu vergleichen hat.

Erste Methode des Rückwärtseinschneidens.

Wenn die den drei Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ auf dem Felde entsprechenden Punkte A, B, C auf dem Messtische gegeben sind, und der dem vierten Punkte $\mathfrak{D}$ auf dem Felde entsprechende Punkt D auf dem Messtische gesucht wird, so lege man an die Linien AC und BC auf entgegengesetzten Seiten derselben in den Punkten A und B die beliebigen einander gleichen Winkel CAA' und CBB', und die beliebigen einander gleichen Winkel CAA'' und CBB'' an. Hierauf lege man die Kippregel an AA', orientire den Tisch nach $\mathfrak{A}$, lege die Kippregel an C, visire nach $\mathfrak{C}$, und bestimme in dieser Lage den Durchschnittspunkt A_1 der Kippregel mit der Linie AA'. Dann lege man die Kippregel an $A''A$, orientire den Tisch wieder nach $\mathfrak{A}$, lege die Kippregel an C, visire nach $\mathfrak{C}$, und bestimme in dieser Lage den Durchschnittspunkt A_2 der Kippregel mit der Linie AA''. Nun lege man die Kippregel an $B'B$, orientire den Tisch nach $\mathfrak{B}$, lege die Kippregel an C, visire nach $\mathfrak{C}$, und bestimme

n dieser Lage den Durchschnittspunkt B_1 der Kipp-
egel mit der Linie BB'. Endlich lege man die Kipp-
egel an BB'', orientire den Tisch wieder nach $\mathfrak{B}$, lege
ie Kippregel an C, visire nach $\mathfrak{C}$, und bestimme in
ieser Lage den Durchschnittspunkt B_2 der Kippregel
it der Linie BB''. Zieht man nun die Linien A_1B_1 und
$_2B_2$, so ist deren Durchschnittspunkt der gesuchte
unkt D.

Dass man die Linien auf dem Messtische nie ganz, sondern
mmer nur so weit ausziehen muss, als zur Bestimmung ihrer
Durchschnittspunkte unumgänglich erforderlich ist, weiss Jeder,
er mit der Messtischpraxis nur einigermassen vertraut ist.

Aus dem oben bewiesenen Lehrsatze ergiebt sich aber unter
lenselben Voraussetzungen wie vorher, wobei man Taf. VI. Fig. 4.
u vergleichen hat, unmittelbar auch die folgende

Zweite Methode des Rückwärtseinschneidens.

An die Linien AC und BC lege man auf entge-
engesetzten Seiten derselben in den Punkten A
nd B die beliebigen einander gleichen Winkel CAA'
nd CBB'. Hierauf lege man die Kippregel an AA',
rientire den Tisch nach $\mathfrak{A}$, lege die Kippregel an C,
isire nach $\mathfrak{C}$, und bestimme in dieser Lage den Durch-
chnittspunkt A_1 der Kippregel mit der Linie AA'.
ann lege man die Kippregel an BB', orientire den
isch nach $\mathfrak{B}$, lege die Kippregel an C, visire nach $\mathfrak{C}$,
nd bestimme in dieser Lage den Durchschnittspunkt
B_1 der Kippregel mit der Linie BB'. Endlich ziehe
an die Linie A_1B_1 und lege durch den Punkt C eine
inie CD, welche mit der Linie A_1B_1 den, den Winkeln
CAA' und CBB' gleichen Winkel CDB_1 einschliesst, so
st der Durchschnittspunkt dieser Linie mit der Linie
$_1B_1$ der gesuchte Punkt D.

Das Anlegen der gleichen Winkel an die Linien AC, BC und
$_1B_1$ nach den im Vorhergehenden gegebenen näheren Bestim-
nungen kann man, wie es mir scheint, mit aller erforderlichen
enauigkeit mittelst eines ungleichseitigen hölzernen Dreiecks und
ines hölzernen Lineals auf bekannte Weise ausführen, worüber
ier nichts weiter zu sagen ist. Will man aber auch diese ganz
infachen Instrumente, welche für andere Operationen doch un-
ntbehrlich sind, ausschliessen, und sich nur den Gebrauch der
ippregel gestatten, so kann man sich zu dem Antragen der Win-
el nach den aus dem Obigen bekannten Bestimmungen auch sehr
weckmässig beliebiger, nur möglichst scharf begränzter Objecte
uf dem Felde, welche sich gewiss in allen Fällen leicht werden
inden lassen, bedienen, wozu eine weitere Anleitung hier eben-
alls nicht erforderlich ist, weil ein Jeder, der nur mit der Ein-
ichtung und dem Gebrauche des Messtisches hinreichend bekannt
st, die sämmtlichen hierzu erforderlichen Operationen leicht in
Ausführung zu bringen im Stande sein wird.

Noch eine Auflösung unserer Aufgabe, die aber eigentlich nur als eine Modification der vorhergehenden allgemeineren Methoden anzusehen ist, ergiebt sich aus den folgenden Betrachtungen.

In Taf. VI. Fig. 5. sei $\angle CAA' = \angle CDB$, und die Linie AA' schneide den um das Dreieck ACD beschriebenen Kreis zum zweiten Male in dem Punkte A_1. Zieht man dann die Linie A_1D, so ist in dem Vierecke $ACDA_1$ nach einem bekannten Satze

$$\angle CDA_1 + \angle CAA' = 2R,$$

also nach der Voraussetzung

$$\angle CDA_1 + \angle CDB = 2R,$$

und A_1DB ist folglich eine gerade Linie. Nimmt man nun hierzu noch, dass $\angle CDA = \angle CA_1A$ ist, so ergiebt sich unmittelbar die folgende

Dritte Methode des Rückwärtseinschneidens.

Man lege die Kippregel an AC, orientire den Tisch nach $\mathfrak{C}$, drehe die Kippregel um A, visire nach $\mathfrak{B}$, und ziehe an der Kippregel die Linie AA'. Hierauf lege man die Kippregel in umgekehrter Lage an $A'A$, orientire den Tisch nach $\mathfrak{A}$, lege die Kippregel an C, visire nach $\mathfrak{C}$, und bestimme in dieser Lage den Durchschnittspunkt A_1 der Kippregel mit der Linie AA'. Dann lege man die Kippregel an A_1B und orientire den Tisch nach $\mathfrak{B}$, worauf derselbe richtig orientirt sein wird, so dass, wenn man die Kippregel an A oder C legt und respective nach $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{C}$ visirt, der Durchschnittspunkt der Kippregel in dieser Lage mit der Linie A_1B den gesuchten Punkt D geben wird.

Dass man ein ganz ähnliches Verfahren wie so eben auf den Punkt A auch auf den Punkt B anwenden, und dadurch eine zweite der Linie A_1B analoge Linie AB_1 erhalten könnte, wo dann der gesuchte Punkt D der Durchschnittspunkt der beiden Linien A_1B und AB_1 sein würde, versteht sich von selbst. Das vorhergehende Verfahren ist aber einfacher und verdient daher den Vorzug.

Ich hoffe späterhin noch auf diesen Gegenstand in anderer Beziehung zurückzukommen, und bemerke nur noch, dass bei einigen wirklich angestellten Versuchen die drei vorhergehenden Methoden mir den zu bestimmenden Punkt immer sogleich mit aller nur zu wünschenden Sicherheit geliefert haben, möchte aber freilich gern auch die von Anderen und in grösserer Anzahl als mir dies bis jetzt möglich gewesen ist, zu machenden Erfahrungen kennen lernen, da sich nur erst dann ein ganz sicheres Urtheil über die praktische Brauchbarkeit dieser neuen Methoden für eine der wichtigsten geodätischen Operationen wird fällen lassen.

XXXIII.

Ueber die höheren Differenzialquotienten des Ausdrucks $(x^2 + ax + b)^{-(\mu+1)}$.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der Universität zu Jena.

Wir wollen uns vorerst die Aufgabe stellen, die höheren Differenzialquozienten von

$$(z^2+k^2)^{-\mu}$$

zu entwickeln, weil sich aus ihrer Lösung leicht die des oben angedeuteten Problems ableiten lässt. Was nun aber die successiven Differenziationen des vorliegenden einfacheren Ausdrucks anbelangt, so findet hier der günstige Umstand statt, dass sich dieselben auf zwei ganz verschiedenen Wegen ohne die mindeste Schwierigkeit ausführen lassen, wodurch es nachher auch möglich wird, durch Vergleichung der beiden Resultate, welche man auf ihnen findet, einen sehr allgemeinen gar nicht mehr in die Differenzialrechnung gehörigen Satz als blosses Corollar aufzustellen.

I.

Zerlegen wir den obigen Ausdruck folgendermassen:

$$(z^2+k^2)^{-\mu} = \frac{1}{(z+k\sqrt{-1})^{\mu}} \cdot \frac{1}{(z-k\sqrt{-1})^{\mu}},$$

so erhellt auf der Stelle, dass wir hier den bekannten Satz

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^n (u.v)}{\partial z^n}\\ &= n_0 u \frac{\partial^n v}{\partial z^n} + n_1 \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial^{n-1} v}{\partial z^{n-1}} + n_2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial^{n-2} v}{\partial z^{n-2}} + \ldots + n_n \frac{\partial^n u}{\partial z^n} v\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

für

$$u = \frac{1}{(z + k\sqrt{-1})^{\mu}}, \quad v = \frac{1}{(z - k\sqrt{-1})^{\mu}} \tag{2}$$

in Anwendung bringen können. Bezeichnen wir der Kürze wegen $\sqrt{-1}$ mit i und $\mu(\mu+1)\ldots(\mu+m-1)$ mit $[\mu]^m$, so ist

$$\frac{\partial^m (z \pm ki)^{-\mu}}{\partial z^m} = (-1)^m [\mu]^m \frac{1}{(z \pm ki)^{\mu+m}},$$

also

$$\frac{\partial^m u}{\partial z^m} = (-1)^m [\mu]^m \frac{1}{(z+ki)^{\mu+m}}, \quad \frac{\partial^m v}{\partial z^m} = (-1)^m [\mu]^m \frac{1}{(z-ki)^{\mu+m}},$$

und wenn wir diese Gleichungen für die Formel (1) benutzen, so ergiebt sich leicht

$$\frac{\partial^n (z^2+k^2)^{-\mu}}{\partial z^n}$$

$$= (-1)^n \left\{ n_0 \frac{1}{(z+ki)^{\mu}} \cdot \frac{[\mu]^n}{(z-ki)^{\mu+n}} + n_1 \frac{[\mu]^1}{(z+ki)^{\mu+1}} \cdot \frac{[\mu]^{n-1}}{(z-ki)^{\mu+n-1}} \right.$$

$$\left. + n_2 \frac{[\mu]^2}{(z+ki)^{\mu+2}} \cdot \frac{[\mu]^{n-2}}{(z-ki)^{\mu+n-2}} + \ldots\ldots \right\}.$$

Um nun hier die reellen und imaginären Partieen zu sondern, setzen wir

$$z \pm ki = r(\cos\varphi \pm i \sin\varphi),$$

woraus folgt

$$r\cos\varphi = z, \quad r\sin\varphi = k;$$

$$r = (z^2+k^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \tan\varphi = \frac{k}{z} \text{ oder } \varphi = \operatorname{Arc}\tan\frac{k}{z}. \tag{3}$$

Es wird dann

$$\frac{1}{z+ki} = \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{r}, \quad \frac{1}{z-ki} = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{r},$$

und wenn wir noch die Gleichungen

$$(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^m = \cos m\varphi \pm i \sin m\varphi,$$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi - i\sin\psi) = \cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)$$

in Anwendung bringen, so nimmt unser Differenzialquotient folgende Form an:

$$\frac{\partial^n (z^2+k^2)^{-\mu}}{\partial z^n}$$

$$= \frac{(-1)^n}{r^{2\mu+n}} \Big\{ n_0 \overset{n}{[\mu]} [\cos n\varphi + i \sin n\varphi] + n_1 \overset{1}{[\mu]} \overset{n-1}{[\mu]} [\cos(n-2)\varphi + i\sin(n-2)\varphi]$$

$$+ n_2 \overset{2}{[\mu]} \overset{n-2}{[\mu]} [\cos(n-4)\varphi + i\sin(n-4)\varphi] + \ldots \Big\}.$$

Da nun aber der fragliche Differenzialquotient doch nur eine elle Grösse sein kann, weil es $(z^2+k^2)^{-\mu}$ ist, so folgt, dass die naginäre Partie der vorstehenden Gleichung sich von selbst an-ulliren muss *), so dass wir vermöge des Werthes von r erhalten:

$$\frac{\partial^n (z^2+k^2)^{-\mu}}{\partial z^n}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(z^2+k^2)^{\mu+\frac{n}{2}}} \left\{ \begin{array}{l} n_0 \overset{n}{[\mu]} \cos n\varphi + n_1 \overset{1}{[\mu]} \overset{n-1}{[\mu]} \cos(n-2)\varphi \\ \qquad + n_2 \overset{2}{[\mu]} \overset{n-2}{[\mu]} \cos(n-4)\varphi + \ldots \end{array} \right\}.$$

Dividiren wir beiderseits mit $1.2..n$ und bemerken, dass für n ganzes positives p

$$\frac{n_p \overset{p}{[\mu]} \overset{n-p}{[\mu]}}{1.2..n}$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p} \cdot \frac{\mu(\mu+1)..(\mu+p-1)\cdot\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-p+1)}{1.2\ldots n}$$

$$= \frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+p-1)}{1.2\ldots p} \cdot \frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-p+1)}{1.2\ldots(n-p)}$$

$$= (\mu+p-1)_p \, (\mu+n-p+1)_{n-p}$$

st, so gelangen wir zu dem Resultate:

$$\frac{1}{1.2..n} \cdot \frac{\partial^n (z^2+k^2)^{-\mu}}{\partial z^n}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(z^2+k^2)^{\mu+\frac{n}{2}}} \{ (\mu-1)_0 \, (\mu+n-1)_n \cos n\varphi + \mu_1 (\mu+n-2)_{n-1} \cos(n-2)\varphi$$

$$+ (\mu+1)_2 (\mu+n-3)_{n-2} \cos(n-4)\varphi + \ldots \},$$

der $\mu+1$ für μ gesetzt:

*) Schreibt man die Reihe, welche den Koeffizienten von i bildet, irklich hin, so sieht man diess auch a posteriori daran, dass sich die-nigen Glieder gegen einander heben, welche von Anfang und Ende leichweit entfernt sind.

$$\frac{1}{1.2..n}\cdot\frac{\partial^n(z^2+k^2)^{-(\mu+1)}}{\partial z^n}$$

$$=\frac{(-1)^n}{(z^2+k^2)^{\mu+\frac{n}{2}+1}}\{\mu_0(\mu+n)_n\cos n\varphi + (\mu+1)_1(\mu+n-1)_{n-1}\cos(n-2)\varphi + (\mu+2)_2(\mu+n-2)_{n-2}\cos(n-4)\varphi+\ldots.\}$$

wobei rechts $n+1$ Glieder stehen und φ die unter Nro. (3) angegebene Bedeutung hat.

Nehmen wir endlich

$$z=x+\tfrac{1}{2}a,\quad k=\sqrt{b-\tfrac{1}{4}a^2},$$

so wird nach Nro. (3)

$$\varphi=\operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{b-\frac{1}{4}a^2}}{x+\frac{1}{2}a}=\operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2x+a},\qquad(5)$$

ferner

$$z^2+k^2=x^2+ax+b,$$
$$\partial z=\partial x;$$

und mithin erhalten wir jetzt die folgende Lösung unseres Problemes:

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\cdot\frac{\partial^n(x^2+ax+b)^{-(\mu+1)}}{\partial x^n}$$

$$=\frac{(-1)^n}{(x^2+ax+b)^{\mu+\frac{n}{2}+1}}\{\mu_0(\mu+n)_n\cos n\varphi + (\mu+1)_1(\mu+n-1)_{n-1}\cos(n-2)\varphi + (\mu+2)_2(\mu+n-2)_{n-2}\cos(n-4)\varphi+\ldots.\}$$

Man wird leicht bemerken, dass in dieser $(n+1)$gliedrigen Reihe diejenigen Glieder gleich sind, die von Anfang und Ende gleichweit abstehen, und man könnte daher dieselben zusammennehmen, wobei jedoch gerade und ungerade n unterschieden werden müssen, weil im ersten Falle ein Mittelglied existirt, während es im zweiten fehlt.

II.

Eine von der obigen ganz verschiedene Lösung unseres Problemes ergiebt sich aus dem allgemeinen Satze

$$\frac{\partial^n f(z^2)}{\partial z^n}=(2z)^n f^{(n)}(z^2)+2.n_2(2z)^{n-2}f^{(n-1)}(z^2)+3.4.n_4(2z)^{n-4}f^{(n-2)}(z^2)+\ldots.,$$

n dessen Richtigkeit man sich u. A. mittelst der Bernoullischen duktion überzeugen kann. Nimmt man hier

$$f(y) = (y + k^2)^{-\mu},$$

wird für ein ganzes positives m:

$$f^{(m)}(y) = (-1)^m [\mu]^m \frac{1}{(y+k^2)^{\mu+m}},$$

$$f^{(m)}(z^2) = (-1)^m [\mu]^m \frac{1}{(z^2+k^2)^{\mu+m}};$$

d folglich

$$\frac{\partial^n (z^2+k^2)^{-\mu}}{\partial z^n}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(z^2+k^2)^{\mu}} \left\{ [\mu]^n \frac{(2z)^n}{(z^2+k^2)^n} - 2 . n_2 [\mu]^{n-1} \frac{(2z)^{n-2}}{(z^2+k^2)^{n-1}} + 3.4 . n_4 [\mu]^{n-2} \frac{(2z)^{n-4}}{(z^2+k^2)^{n-2}} + \ldots \right\},$$

er, wenn man mit $(2z)^n$ in die Parenthese multiplizirt und

$$2.n_2 = \frac{n(n-1)}{1}, \quad 3.4.n_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2},$$

$$4.5.6.n_6 = \frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1.2.3}, \text{ etc.}$$

tzt:

$$\frac{\partial^n (z^2+k^2)^{-\mu}}{\partial z^n}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(2z)^n (z^2+k^2)^{\mu}} \left\{ [\mu]^n \left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^n - \frac{n(n-1)}{1} [\mu]^{n-1} \left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^{n-1} + \frac{n(n-1)\ldots(n-3)}{1.2} [\mu]^{n-2} \left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^{n-2} - \ldots \right\}.$$

Hieraus ergiebt sich nun leicht durch Division mit $1.2\ldots n$:

$$\frac{1}{1.2\ldots n} \cdot \frac{\partial^n (z^2+k^2)^{\mu}}{\partial z^n}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(2z)^n (z^2+k^2)^{\mu}} \left\{ (\mu+n-1)_n \left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^n - \frac{n-1}{1} (\mu+n-2)_{n-1} \left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^{n-1} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} (\mu+n-3)_{n-2} \left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^{n-2} - \ldots \right\};$$

oder $\mu+1$ für μ gesetzt:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{1.2..n}\cdot\frac{\partial^n(z^2+k^2)^{-(\mu+1)}}{\partial z^n}\\ =\frac{(-1)^n}{(2z)^n(z^2+k^2)^{\mu+1}}&\left\{n_0(\mu+n)_n\left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^n\right.\\ &-(n-1)_1(\mu+n-1)_{n-1}\left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^{n-1}\\ &\left.+(n-2)_2(\mu+n-2)_{n-2}\left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^{n-2}-\ldots\right\}\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Nehmen wir auch in dieser Gleichung die Substitutionen

$$z=x+\tfrac{1}{2}a,\quad k=\sqrt{b-\tfrac{1}{4}a^2}$$

vor und setzen zur Abkürzung

$$\frac{(2x+a)^2}{x^2+ax+b}=X,$$

so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{1.2..n}\cdot\frac{\partial^n(x^2+ax+b)^{-(\mu+1)}}{\partial x^n}\\ =\frac{(-1)^n}{(2x+a)^n(x^2+ax+b)^{\mu+1}}&\left\{n_0(\mu+n)_n X^n\right.\\ &-(n-1)_1(\mu+n-1)_{n-1}X^{n-1}\\ &\left.+(n-2)_2(\mu+n-2)_{n-2}X^{n-2}-\ldots\right\}\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

wobei die Reihe nicht weiter fortgesetzt wird, als bis sich eines ihrer Glieder annullirt.

III.

Wir wollen nun die beiden verschiedenen Lösungen unseres Problemes mit einander vergleichen, wobei es am einfachsten ist, die Gleichungen (4) und (7) zusammenzuhalten. Es ergiebt sich so die Relation

$$\frac{1}{(z^2+k^2)^{\frac{n}{2}}}\{\mu_0(\mu+n)_n\cos n\varphi+(\mu+1)_1(\mu+n-1)_{n-1}\cos(n-2)\varphi+\ldots\}$$
$$=\frac{1}{(2z)^n}\left\{n_0(\mu+n)_n\left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^n-(n-1)_1(\mu+n-1)_{n-1}\left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^{n-1}+\ldots\right\}$$

wobei noch für φ der Werth $\operatorname{Arctan}\frac{k}{z}$ zu setzen wäre, wodurch φ aus der Gleichung verschwände. Man kann aber eben so leicht

:h z herausschaffen, indem man es durch φ ausdrückt, weil :h dem Früheren $\tan\varphi = \frac{k}{z}$, folglich $z = k\cot\varphi$ ist. Hierdurch d dann

$$\frac{1}{z^2+k^2} = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{1}{\cot^2\varphi+1} = \frac{\sin^2\varphi}{k^2},$$

$$\frac{4z^2}{z^2+k^2} = \frac{4\cot^2\varphi}{\cot^2\varphi+1} = (2\cos\varphi)^2;$$

l nun verwandelt sich die vorhergehende Relation in den fol- nden goniometrischen Satz:

$$\sin^n\varphi\,\{\mu_0(\mu+n)_n\cos n\varphi + (\mu+1)_1(\mu+n-1)_{n-1}\cos(n-2)\varphi + \ldots\}$$

$$\frac{\tan^n\varphi}{2^n}\,\{n_0(\mu+n)_n(2\cos\varphi)^{2n} - (n-1)_1(\mu+n-1)_{n-1}(2\cos\varphi)^{2n-2} + \ldots.\},$$

r sich noch besser so gestaltet:

$$\left.\begin{aligned} &\mu_0(\mu+n)_n\cos n\varphi + (\mu+1)_1(\mu+n-1)_{n-1}\cos(n-2)\varphi \\ &\qquad + (\mu+2)_2(\mu+n-2)_{n-2}\cos(n-4)\varphi + \ldots \\ &n_0(\mu+n)_n(2\cos\varphi)^n - (n-1)_1(\mu+n-1)_{n-1}(2\cos\varphi)^{n-2} \\ &\qquad + (n-2)_2(\mu+n-2)_{n-2}(2\cos\varphi)^{n-4} - \ldots, \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

bei links $n+1$ Glieder stehen und rechts nur so viele, dass ine negativen Exponenten von $2\cos\varphi$ vorkommen können.

Das vorliegende Theorem ist wegen der beiden völlig will- ihrlichen Grössen μ und φ, die es enthält, von grosser Allge- einheit und umfasst viele Sätze, die man auf anderen Wegen funden hat. Für $\mu = 0$ z. B. ergiebt sich

$$\cos n\varphi + \cos(n-2)\varphi + \cos(n-4)\varphi + \ldots + \cos(n-2n)\varphi$$
$$= n_0(2\cos\varphi)^n - (n-1)_1(2\cos\varphi)^{n-2} + (n-2)_2(2\cos\varphi)^{n-4} - \ldots.$$

Hierbei ist die linke Seite

$$= \cos n\varphi\,\{1 + \cos 2\varphi + \cos 4\varphi + \ldots + \cos 2n\varphi\}$$
$$+ \sin n\varphi\,\{\sin 2\varphi + \sin 4\varphi + \ldots + \sin 2n\varphi\}$$
$$= \cos n\varphi\left\{\tfrac{1}{2} + \frac{\sin(2n+1)\varphi}{2\sin\varphi}\right\} + \sin n\varphi\left\{\frac{\cot\varphi}{2} - \frac{\cos(2n+1)\varphi}{2\sin\varphi}\right\}$$
$$= \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi},$$

e man leicht durch eine kleine Reduktion findet. So kommen r auf den Satz:

$$\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} = (2\cos\varphi)^n - \frac{n-1}{1}(2\cos\varphi)^{n-2} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}(2\cos\varphi)^{n-4}$$
$$- \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}(2\cos\varphi)^{n-6} + \ldots\ldots,$$

der auch sonst schon bekannt ist. — Für $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ergiebt sich aus der Gleichung (9) eine Relation, aus welcher sich sämmtliche von Herrn Dr. Björling im VIIten Theile S. 266. mitgetheilten Formeln ableiten lassen, wenn man sich auf die Unterscheidung von geraden und ungeraden n einlässt und einige Transformationen vornimmt.

Eine kritische Bemerkung möge diesen Aufsatz beschliessen. Man leitet oft arithmetische Sätze dadurch ab, dass man eine Funktion auf zwei verschiedene Weisen in eine nach steigenden Potenzen der Veränderlichen fortgehende Reihe verwandelt und dann eine Coeffizientenvergleichung vornimmt. Ich halte diese Methode für wissenschaftlich höchst unbedeutend, wenn ich auch ihre Brauchbarkeit bei Schülern von bloss elementaren Kenntnissen gern zugebe. Denn welchen Weg man auch zur Reihenentwickelung der Funktion einschlagen möge, so ist vermöge des Maclaurin'schen Theorems der Coeffizient von x^n nichts Anderes als $\frac{F^{(n)}(0)}{1.2..n}$; man findet also mittelst jener Methode nichts mehr und nichts weniger, als zwei bloss der Form nach verschiedene Ausdrücke für einen höheren Differenzialquotienten, aber nur in dem ganz speziellen Falle, dass man für jenen sich auf den Werth $x=0$ beschränkt. Es ist daher wissenschaftlich bei weitem richtiger, gleich direkt zwei verschiedene Formen für $F^{(n)}(x)$ aufzusuchen, wobei man den Vortheil hat, dass man in der Relation, welche sich aus der Vergleichung dieser Formen ergiebt, die Variable in ihrer ganzen Willkührlichkeit figuriren sieht und also zu einem Theoreme gelangt, welches schon an sich allgemeiner ist und wegen der darin vorkommenden Variablen auch für andere Zwecke, z. B. für die Integralrechnung, von Nutzen sein kann.

XXXIV.

Ueber geradlinige Raumgebilde, die einfacher sind als das Dreieck, und über deren Verwendung zur Fundamentallehre der Geometrie.

Von dem

Herrn Dr. Wilh. Matzka,

Professor der Mathematik zu Tarnow in Galizien.

I.

Einkleidung.

§. 1. So wie der Kreis entschieden die einfachste krummlinige Raumgestalt ist, eben so hat man seit Euklid das Dreieck für die vermeintlich einfachste geradlinige Raumgestalt angesehen, und auf dessen Lehre alle weiteren Forschungen der Geometrie aufgebaut. Untersucht man jedoch die möglichen noch einfacheren geradlinigen Raumgebilde, so findet man deren zwei, die bisher der Aufmerksamkeit der Geometer entgangen zu sein scheinen, und die dennoch zu einer natürlichen Grundlage der Geometrie geeigneter sein dürften, als das Dreieck, nemlich:

1. Das System einer ganzen Geraden mit einem Punkte ausser ihr, und
2. Das System zweier paralleler ganzer Geraden, das wir kurzweg ein Parallelenpaar nennen wollen.

§. 2. Dass diese zwei Gestalten wirklich einfacher als das Dreieck, ja sogar die einfachsten möglichen sind, leuchtet daraus ein, dass

a) an ihnen, so wie sie vorliegen, nur zwei Raumdinge, dort eine ganze Gerade und ein Punkt, hier 2 ganze Geraden, bei dem Dreiecke aber 3 Strecken und 3 Winkel als Bestandstücke vorkommen, und

b) dass zwei Systeme jener beiden Arten schon congruiren, wenn sie bloss je zwei Elemente, namentlich je eine Strecke und

je einen Winkel gleich haben, wogegen Dreiecke erst dan
gruiren, wenn sie je 3 Elemente, namentlich je $n (= 1, 2, 3)$
und $3-n$ Winkel gleich haben; oder dass jedes jener S
durch die 2, jedes Dreieck aber durch die 3 genannten El
bestimmt wird; endlich

c) daraus, dass ein geradliniges Raumding, das nicht
ein Element — eine Strecke oder ein Winkel — sein soll,
durch weniger als 2 Elemente bestimmt werden kann.

§. 3. Von den angeführten zwei einfachsten Raumge
kann, wie man leicht einsieht, jegliche auf die ande
rückgeführt, daher auch nur die letztere als Grun
beibehalten werden. Namentlich scheint es bess
sein, das Parallelenpaar zu Grunde zu legen, inde
wenn eine dieser Geraden in ihre Gesammtschaft von Punkt
gelöst gedacht wird, aus lauter congruenten, stetig an ei
hangenden Systemen einer Geraden und eines auswärtigen P
besteht.

§. 4. Dass endlich diese einfachsten Raumgesta
vorzüglich die letztere, zur Aufstellung einer einleit
Fundamentallehre der Geometrie geeigneter sind
das Dreieck, erhellet aus folgender Betrachtung. Als,
gleich unwissenschaftlichen so doch unabweisbaren, Grun
Haupteintheilung der Geometrie erkennt man allgemein an
Liegen der zu erforschenden räumlichen Gegenstände in ei
Ebene oder nicht; wonach die gesammte Wissenschaft in ihre
Hauptabtheilungen, Geometrie der Ebene und des Rau
Planimetrie und Stereometrie, zerfällt. Als Grund
ersten Untertheilung kann man jedoch nicht — wie neuerdings
beliebt — die Congruenz, Aehnlichkeit und Mess
(Metrik), sondern nur die Gattung der räumlichen Gegenst
gelten lassen, weil jene drei genannten Eigenschaften an je
Raumdinge erforscht werden können, und also auch müsse

Der Eintheilungsgrund der Gattungen planimetrischer Ge
stände kann aber nur die Beschaffenheit der sie ausmachen
Linien sein, und ihre Reihenfolge wird durch die grössere
geringere Einfachheit und Zusammengesetztheit dieser Linien
dingt. Mithin ist zu allererst die gerade Linie — zumeist in
Ganzheit — zu untersuchen, nachher kommen die gebroche
Linien, und von ihnen vorzugsweise die geschlossenen
nachdem sie ebene Figuren allseitig eingrenzen oder nicht, V
ecke oder Vielseite genannt —, endlich die krummen Lin
zu erforschen. Mithin gehört das Parallelenpaar in die er
das Dreieck aber in die zweite dieser drei naturgemäss gere
Gattungen der planimetrischen Gegenstände.

§. 5. Die Fundamentallehre der Geometrie kann daher
die gerade Linie, und an ihr zuvörderst die Länge und
tung, mithin die einfachsten Bestandstücke oder die Ele
aller Raumgebilde, nemlich die Strecken und Winkel erfors
Hierauf hat sie zu untersuchen: die einfachsten Verbindungen
Paare ganzer Geraden, rücksichtlich ihres Zusamentreffens
Getrenntseins, was die sogenannte Parallelentheorie ausm

An diese reiht sich nun ganz naturgemäss die Erforschung des Parallelenpaares, und (als einer Besonderheit) des Systems einer Geraden mit einem auswärtigen Punkte, vornehmlich rücksichtlich der gegenseitigen Einwirkung oder wechselseitigen Bestimmung der geometrischen Elemente — der Strecken und Winkel. Diese Wechselbeziehung verfolgt sie dann umständlich in der Lehre von der (orthogonalen) Projection auf gerade Linien und vorzugsweise in der von ihr eingeleiteten Goniometrie. Auf dieser Höhe ihrer Forschungen angelangt, vermag sie nunmehr die möglichen und üblichen Methoden der Untersuchung aller weitern verwickelteren Raumgebilde nach ihren Grundzügen darzulegen, und vorzugsweise für eine oder einige, dem Lehrzwecke angemessene Methoden sich zu entscheiden. Die Hauptgattungen dieser Methoden sind:

I. Die synthetische (anschauliche) der Alten, besonders der Griechen, und

II. Die rechnende der Späteren.

Zur letzteren zählt man als Arten:

1. die algebraische;
2. die goniometrische;
3. die Coordinatenmethode (s. g. analytische Geometrie), und zwar
   a) die der Parallel-Coordinaten,
   b) die der Polar-Coordinaten;
4. die Methode der harmonischen Proportionen — meist Neuere Geometrie genannt.

§. 6. Auf die genannten einfacheren Raumgebilde und auf die nach ihnen sich gestaltende Fundamentallehre der Geometrie war ich bereits im Frühling des Jahres 1839 verfallen, wollte sie jedoch erst in dem nach und nach von mir vorbereiteten Lehrbuche der reinen Mathematik bekannt geben. Allein da die gegenwärtig herrschende Fluth der elementar-mathematischen Lehrbücher die Kenntniss des in ihnen enthaltenen Guten und Neuen zumeist lediglich auf den engen Kreis der Schüler ihrer Verfasser beschränkt, so habe ich mich entschlossen, die Grundlinien der gewiss nicht unwichtigen Lehre von den Parallelenpaaren und jene der geometrischen Fundamentallehre in einem, nach Verdienst beliebten, mathematischen Journale den Geometern vor Augen zu legen.

II.

Grundlinien der Lehre von den Parallelenpaaren.

§. 7. Erklärungen. Jedes System zweier unbegrenzten parallelen Geraden g und h heisse, ohne Rücksicht auf die sie enthaltende Ebene, ein Parallenpaar, manchmal zur Abwechselung ein Paar Parallellinien, oder (zwar bildlich und kurz, jedoch nicht wissenschaftlich) ein Geleise (Gleis, franz. l'ornière); die von ihnen, aus der sie enthaltenden Ebene ausgeschnittene

und zum Theil begrenzte Ebenen-Abtheilung der **Streifen** (Streif franz. la bande) des Parallelenpaars, und jede von einem Punkte der einen Parallellinie zu einem Punkte der anderen gehende Strecke a eine **Zwischenlinie** (Zwischenstrecke).

Bezeichnet werde ein Parallelenpaar oder sein Streifen dadurch, dass man den üblichen Ansatz des Parallelismus der beiden Geraden g und h in Klammern fasst; als $(g \parallel h)$.

§. 8. **Auf die Parallelentheorie gestützte einfache Sätze.**

1) **Jede Zwischenlinie a ist gegen beide Parallellinien $g \parallel h$, gleich geneigt,**

d. h. sie bildet mit ihr gleiche spitze, und gleiche stumpfe oder lauter rechte Winkel als Wechselwinkel, also auch gleiche kleinste hohle Winkel — **Neigungswinkel** genannt, und durch ag oder ah bezeichnet.

2) **Ist daher eine Zwischenlinie auf einer der beiden Parallelen senkrecht, so ist sie auch auf der anderen senkrecht.**

3) Eine Zwischenlinie in einem Paar Parallellinien kann, je nachdem sie auf diesen senkrecht oder schief (schräg) steht, entweder eine **Querlinie** oder eine **Schräglinie** genannt werden.

4) **Alle Querlinien eines Parallelenpaares oder Streifens sind unter sich gleich.**

5) Darum kann eine jede von ihnen die **Weite** (Zwischenweite) des Parallelenpaares, die **Breite** oder **Höhe** des Streifens heissen.

§. 9. **Congruenz der Parallelenpaare oder Streifen.**

1) *Hauptlehrsatz.* **Zwei Parallenpaare oder Streifen, $(g \parallel h)$ und $(g' \parallel h')$, sind congruent, wenn sie je eine Zwischenlinie gleichlang, $a = a'$, und gleichgeneigt, $ag = a'g'$ haben.**

Wird einfach durch Deckung bewiesen.

2) *Insbesondere:* **Gleich** $\begin{cases} \text{weite} \\ \text{hohe} \end{cases}$ **Parallelenpaare Streifen sind congruent.**

§. 10. **Vergleichung der Zwischenlinien congruenter Parallelenpaare oder Streifen.**

1) **Congruente Parallelenpaare Streifen sind gleich weit hoch.**

2) **In demselben oder in congruenten Parallelenpaaren, $(g \parallel h) \cong (g' \parallel h')$, sind gleichgeneigte Zwischenlinien, $ag = a'g'$, gleichlang; $a = a'$.**

Beide durch Deckung zu erweisen.

3) *Besonderer Fall:* **In jedem Parallelenpaare sind parallele Zwischenlinien gleichlang;**

Oder: Parallelen zwischen Parallelen sind gleich.

In $(g \| h)$ ist, wenn $a \| a'$, auch $a = a'$

4) In demselben oder in congruenten Parallelenpaaren sind ungleichgeneigte Zwischenlinien ungleichlang, und zwar gehört zu einem grösseren Neigungswinkel eine kürzere Zwischenlinie;

Oder: Bei wachsendem Neigungswinkel verkürzt sich die Zwischenlinie.

Ist in $(g \| h)$ oder in $(g \| h) \cong (g' \| h')$ der Winkel $ag > bg$, so ist $a < b$.

Wird durch geeignete Construction auf 2) zurückgeleitet.

Aus diesen Sätzen folgt somit gegentheilig:

5) In demselben oder in congruenten Parallelenpaaren sind gleichlange Zwischenlinien gleichgeneigt, und

6) eine jede grössere Zwischenlinie bildet einen kleineren Neigungswinkel,

oder: bei wachsender Zwischenlinie nimmt ihr Neigungswinkel ab.

7) Unter allen Zwischenlinien eines Parallelenpaares ist die senkrechte, die Querlinie oder Weite, die kürzeste.

8) Jede Gerade, welche nicht kürzer als die Weite eines Parallelenpaares ist, kann in selbes als eine Zwischenlinie eingetragen gedacht werden.

9) In einem Parallelenpaare können aus jedem Punkte einer Parallellinie zwei, aber auch nicht mehr, gleiche Schräglinien gezogen werden.

§. 11. Vergleichung von zwei Paar Zwischenlinien in zwei Parallelenpaaren.

1) Ist eine Zwischenlinie a eines Parallelenpaares $(g \| h)$ einer gleichgeneigten a' eines andern Parallelenpaares $(g' \| h')$ gleich, so ist auch jede andere Zwischenlinie b des ersten Parallelenpaares jeder gleich geneigten b' des anderen gleich.

Wenn $ag = a'g'$ und $a = a'$, zugleich aber auch $bg = b'g'$ ist; so ist auch noch $b = b'$.

Folgt aus §. 9. 1) und §. 10. 2).

2) *Besonderer Fall.* Werden zwei gerade Linien, A und B, von zwei Paar insgesammt unter sich parallelen Geraden, $g \| h \| i \| k$, dergestalt geschnitten, dass die Stücke a und a' der einen Geraden A gleichlang, $a = a'$, sind; so müssen auch die zwischen denselben Parallelen liegenden Stücke b und b' der andern Geraden B gleichlang, $b = b'$ sein.

§. 12. Proportionalität der Zwischenlinien in Parallelenpaaren.

1) In den Parallelenpaaren sind jede unter sich gleichgeneigte Zwischenlinien jeden anderen unter sich wieder gleichgeneigten Zwischenlinien (direct) proportional;

das heisst:

In jeglichen zwei Parallelenpaaren $(g \| h)$ und $(g' \| h')$ verhalten sich jede zwei gleichgeneigte Zwischenlinien, a und a', zu einander, wie jede zwei andere wieder unter sich gleichgeneigte Zwischenlinien, b und b';

nemlich, wenn $ag = a'g'$ und $bg = b'g'$

so $a : a' = b : b'$.

Oder: Das Verhältniss zweier Zwischenlinien bleibt sich in allen Parallelenpaaren gleich, so lange ihre Neigungswinkel sich gleich bleiben;

d. i. $a : b = a' : b'$.

2) Sind die Zwischenlinien nicht bloss gegen die Parallellinien, sondern auch gegen einander gleich geneigt, so sind sie nicht nur zu einander, sondern auch zu den Summen oder Unterschieden der sie einschliessenden Parallelstrecken proportional, je nachdem sie sich zwischen diesen schneiden oder nicht.

Ist $ag = a'g'$, $bg = b'g'$ und $ab = a'b'$, so ist

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{g \pm h}{g' \pm h'}.$$

3) *Besonderer Fall.* Werden zwei gerade Linien A und B von mehreren unter sich insgesammt parallelen Geraden geschnitten, so sind die dazwischen enthaltenen Stücke a, a' und b, b' jener geraden Linien einander und den Summen oder Unterschieden der von ihnen eingeschlossenen Parallelstrecken, g, h und g', k, proportional, je nachdem die betreffenden Stücke zwischen diesen Parallelenstrecken sich schneiden oder nicht;

nemlich $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{g \pm h}{g' \pm h'}$.

4) *Ganz besonderer Fall.* Werden zwei sich durchscheidende gerade Linien, A und B, von zwei parallelen Geraden geschnitten, so sind die vom Durchschnittspunkte aus genommenen Stücke a, a' und b, b' der geraden Linien einander und den sie abschneidenden Parallelstrecken, g und g', proportional;

nemlich $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{g}{g'}$.

5) Das Verhältniss zweier Zwischenlinien in Parallelenpaaren wächst, entweder

a) wenn der Neigungswinkel der ersten abnimmt, oder
b) „ „ „ „ zweiten zunimmt,
c) wenn beides zugleich eintritt.

III.

Hauptsätze in der Lehre vom (orthogonalen) Projiciren in einerlei Ebene auf gerade Linien.

§. 13. Hauptsätze aus dem Projiciren von Strecken.

1) Bei gleichen Neigungswinkeln sind die projicirten Strecken ihren Projectionen proportional;

Oder: Bleibt sich der Neigungswinkel gleich, so bleibt sich auch das Verhältniss der projicirten Strecke zu ihrer Projection gleich.

Specieller Fall von §. 12. 1).

2) Je grösser der Neigungswinkel, desto kleiner ist das Verhältniss der Projection zur projicirten Strecke.

Einzelner Fall von §. 12. 5).

§. 14. Das Rückprojiciren der Strecken und das Projiciren derselben auf ein Paar winkelrechter Axen.

1) Projicirt man eine Strecke a auf eine Axe und ihre Projection a' wieder zurück auf die Projicirte (oder auf eine Parallele zu dieser); so ist die erste Projection a' die mittlere Proportionale zwischen der projicirten Strecke und ihrer zweiten oder Rückprojection a''.

Denn beide Projicirungen geschehen unter gleichem Neigungswinkel, daher ist (nach §. 13. 1)):

$$a : a' = a' : a'' \text{ und } a'^2 = aa''.$$

2) Projicirt man eine Strecke r auf zwei winkelrechte Axen, oder allgemeiner auf zwei Axen, deren Neigungswinkel gegen die projicirte Strecke zusammengenommen einen rechten Winkel betragen, und ihre Projectionen a und b wieder zurück auf die Projicirte, oder auf eine Parallele derselben; so sind diese zweiten oder Rückprojectionen a' und b' zusammengenommen der projicirten Strecke gleich;

nemlich $a' + b' = r$.

3) *Hauptlehrsatz* (Nachbildung des Pythagoräischen Lehrsatzes). Die zweite Potenz (des Zahlwerths) jeder Strecke gleicht der Summe der zweiten Potenzen (der Zahlwerthe) ihrer Projectionen a und b auf jegliche zwei winkelrechte Axen, oder auf solche zwei Axen, deren Neigungswinkel gegen die projicirte Strecke zusammen genommen einen rechten Winkel betragen.

Denn bei den so eben betrachteten zweimaligen Projectionen a, b und a', b' der Geraden r bestehen ausser der Gleichung

$$a' + b' = r$$

vermöge I) auch noch die Gleichungen

$$a^2 = a'r, \; b^2 = b'r,$$

woraus durch Elimination der a' und b' gefunden wird:

$$r^2 = a^2 + b^2.$$

4) (Verallgemeinerung des Pythagoräischen Lehrsatzes). Verhalten sich drei Grössen R, A, B irgend einer, jedoch der nemlichen Art (z. B. Längen, Winkel, Flächen, Körperräume, Zeiten, u. s. f.) wie die zweiten Potenzen (der Zahlwerthe) einer Strecke r und ihrer Projectionen a, b auf zwei winkelrechte Axen; so ist die erste auf die projicirte Strecke bezügliche Grösse R so gross, wie die beiden übrigen auf die Projectionen derselben bezüglichen, A und B, zusammen genommen:

$$R = A + B.$$

Denn aus $\frac{R}{r^2} = \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2}$ folgt weiter

$$\frac{R}{r^2} = \frac{A+B}{a^2+b^2 = r^2}$$

IV.

Grundlage zur Goniometrie.

§. 15. Erklärung der goniometrischen Functionen.

0) Vorbereitung. Angemessen der bereits aufgestellten Lehre von der (orthogonalen) Projection leiten wir die Erklärung der goniometrischen oder Winkelfunctionen (Hilfszahlen) folgender Massen ein. Zuvörderst unterscheiden wir bei jedem Winkel α seine Schenkel insofern von einander, dass wir den Winkel als Ablenkung einer bezeichneten Richtung von einer anderen, des einen Schenkels vom anderen betrachten. Diesen letzteren, als ursprünglich vorhanden gedachte Richtung, nennen wir den Anfangs- oder Ausgangsschenkel; jenen ersteren ablenkenden oder abgelenkten aber den End- oder Schlussschenkel des Winkels. Von diesem abgelenkten Endschenkel wird ein Stück r projicirt, welches das projicirte Schenkelstück, die projicirte Strecke, oder kurz die Projicirte heissen möge. Zu winkelrechten Projectionsaxen nimmt man einerseits die volle Gerade des Anfangsschenkels und andererseits eine darauf senkrechte ganze Gerade, gleichviel ob sie durch des Winkels Scheitel geht oder nicht. Jene nun nennen wir die Haupt-, diese die Neben-

Projectionsaxe, daher auch die Projection a des Schenkelstücks auf die erstere die Haupt-, und jene b auf die letztere die Nebenprojection. — Dabei nehmen wir die Winkel da, wo nur ihre Functionen in Rechnung kommen, vorerst nur eben so, wie sie sind, d. i. ungemessen.

1) Cosinus, Secante, Sinusversus.

Das Verhältniss der Hauptprojection a zur Projicirten r heisst

des Winkels Cosinus,

das umgekehrte Verhältniss, d. i. das der Projicirten zur Hauptprojection

des Winkels Secante,

und das Verhältniss des Ueberschusses der Projicirten über ihre Hauptprojection zur Projicirten selbst

des Winkels Sinusversus;

geschrieben: $\frac{a}{r} = \cos\alpha$, $\frac{r}{a} = \sec\alpha$, $\frac{r-a}{r} = \sin v\alpha$.

2) Sinus, Cosecante, Cosinusversus.

Das Verhältniss der Nebenprojection b zur Projicirten r heisst

des Winkels Sinus,

das umgekehrte Verhältniss, d. i. das der Projicirten zur Nebenprojection

des Winkels Cosecante,

und das Verhältniss des Ueberschusses des Projicirten über ihre Nebenprojection zur Projicirten

des Winkels Cosinusversus;

geschrieben: $\frac{b}{r} = \sin\alpha$, $\frac{r}{b} = \operatorname{cosec}\alpha$, $\frac{r-b}{r} = \operatorname{cosv}\alpha$.

3) Tangente, Cotangente.

Das Verhältniss der Nebenprojection b zur Hauptprojection a heisst

des Winkels Tangente,

das umgekehrte Verhältniss, d. i. das der Hauptprojection zur Nebenprojection

des Winkels Cotangente;

geschrieben: $\frac{b}{a} = \tang\alpha$, $\frac{a}{b} = \cotang\alpha$.

§. 16. Andere Aufzählung der Winkelfunctionen nach dem Grade ihrer Abstammung und Bedeutsamkeit.

1) Stammfunctionen: Cosinus und Sinus.

Aus der projicirten Strecke entspringen zunächst gleichzeitig ihre Haupt- und Nebenprojection, daher auch deren Verhältnisse zur Projicirten, genannt Cosinus und Sinus des

Winkels, die goniometrischen Stammfunctionen, alle weitere aber Sprossabgeleitete Functionen heissen können.

Zugleich geht in der natürlichen Ablolge der Erzeugung die Hauptprojection der Nebenprojection, also auch der Cosinus dem Sinus voran; wesswegen der Cosinus die Haupt- der Sinus die Neben- Stammfunction genannt werden kann. Daher sind:

Goniometrische Stammfunctionen:

und zwar:

a) **Haupt-Stammfunction: der Cosinus,**

b) **Neben-Stammfunction: der Sinus,**

d. i. das Verhältniss der Hauptprojection a der Nebenprojection b zur Projicirten r;

$$\frac{a}{r} = \cos\alpha, \qquad \frac{b}{r} = \sin\alpha.$$

2) Sprossfunctionen.

Von diesen ist

a) die vornehmste und darum auch gewöhnlich gebrauchte:

die Tangente, d. i. das Verhältniss der Neben- zur Hauptprojection; geschrieben: $\frac{b}{a} = \text{tang}\,\alpha$.

An diese drei gewöhnlich vorkommenden Functionen: Cosinus, Sinus, Tangente, schliessen sich noch

b) fünf seltener vorkommende, minder wichtige Sprossfunctionen an; namentlich:

α) die drei umgekehrten jener drei gewöhnlichen Verhältnisse, als:

das umgekehrte des Cosinus, genannt die Secante;

„ „ Sinus, „ „ Cosecante,

„ „ der Tangente, „ „ Cotangente,

d. i. $\frac{r}{a} = \sec\alpha$, $\frac{r}{b} = \text{cosec}\,\alpha$, $\frac{a}{b} = \text{cotang}\,\alpha$;

β) die zwei Verhältnisse der Ueberschüsse der Projicirten über ihre Haupt- und Nebenprojection zu ihr, der Projicirten selbst, genannt der Sinusversus und Cosinusversus

d. i. $\frac{r-a}{r} = \text{sinv}\,\alpha$, $\frac{r-b}{r} = \text{cosv}\,\alpha$.

XXXV.

Ueber die Toroide.

Nach einigen Aufsätzen der Herren Breton (De Champ), Terquem, Catalan in den Nouvelles Annales de Mathématiques. Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, rédigé par MM. Terquem et Gerono. T. III. Paris. 1844. frei bearbeitet

von

dem Herausgeber.

Der Name Toroide scheint von Breton (De Champ) für eine sonst übrigens ihrer Entstehung nach schon bekannte Curve a. a. O. S. 446. eingeführt worden, und von dem Gebrauche, welcher von dieser Curve in der Baukunst gemacht wird, entlehnt zu sein. Nach einer Angabe von Terquem a. a. O. S. 454. soll Cauchy in den Comptes rendus de l'Académie des sciences. 2. série. 1841 T. XIII. p. 1062. eine analytische Theorie geliefert haben, die mir leider bis jetzt noch nicht zu Gesicht gekommen ist; ich habe aber Grund zu vermuthen, dass dieser Aufsatz von Cauchy nur allgemeine Andeutungen enthält. In der vorliegenden kurzen Abhandlung will ich den Begriff der Toroide angeben und zeigen, wie man zu ihrer Gleichung gelangen kann, wo es sich herausstellen wird, dass es dabei zuletzt hauptsächlich auf eine nicht ganz leichte Elimination einer Grösse aus zwei Gleichungen ankommt, welche von Catalan a. a. O. S. 553. auf eine elegante Weise auszuführen gelehrt worden ist, weshalb ich die Mittheilung dieses Eliminationsverfahrens und der völlig entwickelten Gleichung der Toroide, zu welcher dasselbe führt, als den Hauptzweck dieses Aufsatzes betrachte. Vielleicht wird dadurch einem der geehrten Leser des Archivs Veranlassung gegeben, den Eigenschaften der Toroide und anderer Curven von ähnlicher Entstehung weiter nachzuforschen.

Wenn man sich aus allen Punkten einer gegebenen Ellipse als Mittelpunkten mit demselben gegebenen Halbmesser eine stetige Folge von Kreisen beschrieben denkt, so heisst die, alle diese Kreise berührende oder einhüllende Curve eine *Toroide*.

Die Gleichung der gegebenen Ellipse sei

$$1) \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

und k sei der gemeinschaftliche Halbmesser der Kreise, welche man sich aus allen Punkten der Ellipse als Mittelpunkten in stetiger Folge beschrieben denkt.

Fassen wir nun irgend einen bestimmten Punkt der Ellipse, dessen Coordinaten x_1, y_1 sein mögen, in's Auge, so haben wir nach 1) die Gleichung

$$2) \quad \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 = 1.$$

Die Gleichung des aus diesem Punkte als Mittelpunkt mit dem Halbmesser k beschriebenen Kreises ist aber

$$3) \quad (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = k^2.$$

Sind nun X, Y die Coordinaten des Punktes, in welchem dieser Kreis von der Toroide berührt wird, den wir den dem Punkte $(x_1 y_1)$ der Ellipse entsprechenden Punkt der Toroide nennen wollen, so ist zuvörderst nach 3):

$$4) \quad (X-x_1)^2 + (Y-y_1)^2 = k^2;$$

die Bedingung aber, dass nach der Erklärung unserer Curve der Kreis und die Toroide in dem Punkte (XY) eine gemeinschaftliche Berührende haben sollen, führt uns zu den folgenden Gleichungen.

Die Gleichung des durch den Punkt (XY) des Kreises gehenden Halbmessers desselben ist

$$5) \quad y - Y = \frac{Y-y_1}{X-x_1}(x-X),$$

oder auch

$$6) \quad y - y_1 = \frac{Y-y_1}{X-x_1}(x-x_1).$$

Also ist, da die Berührende des Kreises in dem Punkte (XY) auf dem diesem Punkte entsprechenden Halbmesser des Kreises senkrecht steht, nach den Principien der analytischen Geometrie die Gleichung dieser Berührenden:

$$7) \quad y - Y = -\frac{X-x_1}{Y-y_1}(x-X).$$

Die Gleichung der die Toroide in dem Punkte (XY) berührenden Geraden ist dagegen nach den Principien der höheren Geometrie:

$$8)\quad y-Y=\frac{\partial Y}{\partial X}(x-X);$$

nd da nun nach dem Obigen die beiden vorhergehenden Gleichungen einer und derselben Geraden angehören müssen, so ist:

$$9)\quad \frac{\partial Y}{\partial X}=-\frac{X-x_1}{Y-y_1}.$$

Betrachten wir jetzt, was offenbar verstattet ist, alle veränderlichen Grössen als von der unabhängigen Variablen x_1 abhängig, so folgt aus der Gleichung 4) durch Differentiation nach x_1:

$$(X-x_1)\left(\frac{\partial X}{\partial x_1}-1\right)+(Y-y_1)\left(\frac{\partial Y}{\partial x_1}-\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)=0$$

oder

$$10)\quad (X-x_1)\frac{\partial X}{\partial x_1}+(Y-y_1)\frac{\partial Y}{\partial x_1}=X-x_1+(Y-y_1)\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$$

Weil aber nach den Principien der Differentialrechnung

$$\frac{\partial Y}{\partial X}=\frac{\partial Y}{\partial x_1}:\frac{\partial X}{\partial x_1}$$

ist, so ist nach 9):

$$\frac{\partial Y}{\partial x_1}:\frac{\partial X}{\partial x_1}=-\frac{X-x_1}{Y-y_1}$$

und folglich

$$(X-x_1)\frac{\partial X}{\partial x_1}+(Y-y_1)\frac{\partial Y}{\partial x_1}=0;$$

also nach 10):

$$X-x_1+(Y-y_1)\frac{\partial y_1}{\partial x_1}=0.$$

Nun ist nach 2):

$$\frac{x_1}{a^2}+\frac{y_1}{b^2}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_1}=0,\ \text{d. i.}\ \frac{\partial y_1}{\partial x_1}=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1};$$

folglich nach 11):

$$\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} = \frac{X - x_1}{Y - y_1}$$

oder

$$12) \quad a^2 \frac{X - x_1}{x_1} = b^2 \frac{Y - y_1}{y_1}$$

Setzen wir jetzt

$$13) \quad \Theta = a^2 \frac{X - x_1}{x_1} = b^2 \frac{Y - y_1}{y_1},$$

so erhalten wir:

$$14) \quad x_1 = \frac{a^2 X}{a^2 + \Theta}, \quad y_1 = \frac{b^2 Y}{b^2 + \Theta};$$

und daher nach den Gleichungen 2) und 3):

$$15) \begin{cases} \dfrac{a^2 X^2}{(a^2 + \Theta)^2} + \dfrac{b^2 Y^2}{(b^2 + \Theta)^2} = 1, \\ \dfrac{\Theta^2 X^2}{(a^2 + \Theta)^2} + \dfrac{\Theta^2 Y^2}{(b^2 + \Theta)^2} = k^2. \end{cases}$$

Bedient man sich polarer Coordinaten, und setzt demzufol

$$X = r \cos\varphi, \quad Y = r \sin\varphi;$$

so werden diese beiden Gleichungen:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{a\cos\varphi}{a^2 + \Theta}\right)^2 + \left(\dfrac{b\sin\varphi}{b^2 + \Theta}\right)^2 \Big\} r^2 = 1, \\ \left\{\left(\dfrac{\cos\varphi}{a^2 + \Theta}\right)^2 + \left(\dfrac{\sin\varphi}{b^2 + \Theta}\right)^2\right\} \Theta^2 r^2 = k^2; \end{cases}$$

oder, wenn man r^2 eliminirt und in der dadurch sich ergebende Gleichung $k^2(\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2)$ für k^2 setzt, nach einigen leichte Reductionen:

$$15^*) \begin{cases} r^2 = \left\{\dfrac{a^2}{(a^2 + \Theta)^2}\cos\varphi^2 + \dfrac{b^2}{(a^2 + \Theta)^2}\sin\varphi^2\right\}^{-1}, \\ (a^2 k^2 - \Theta^2)(b^2 + \Theta)^2 \cos\varphi^2 + (b^2 k^2 - \Theta^2)(a^2 + \Theta)^2 \sin\varphi^2 = 0 \end{cases}$$

Eliminirt man aus den beiden Gleichungen 15) die Grösse θ so erhält man die gesuchte völlig entwickelte Gleichung der To roide zwischen den Coordinaten X, Y.

Bevor wir die Ausführung dieser Elimination nach Catala zeigen, wollen wir noch die folgenden Bemerkungen vorausschicken

Zuerst machen wir darauf aufmerksam, dass sich zu jedem unkte $(x_1 y_1)$ der Ellipse leicht der entsprechende Punkt (XY) er Toroide finden lässt. Aus der Gleichung 12) folgt nämlich:

$$a^4 \frac{(X-x_1)^2}{x_1^2} = b^4 \frac{(Y-y_1)^2}{y_1^2}.$$

Nun ist aber nach 4):

$$(Y-y_1)^2 = k^2 - (X-x_1)^2;$$

lso

$$a^4 \frac{(X-x_1)^2}{x_1^2} = \frac{k^2 b^4 - b^4 (X-x_1)^2}{y_1^2}$$

der

$$\left(\frac{a^4}{x_1^2} + \frac{b^4}{y_1^2}\right)(X-x_1)^2 = \frac{k^2 b^4}{y_1^2},$$

nd folglich

$$X - x_1 = \pm \frac{k b^2}{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}} x_1.$$

Führt man dies in die aus 12) sich ergebende Gleichung

$$Y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(X - x_1)$$

n, so erhält man mit Beziehung der obern und untern Zeichen if einander

$$Y - y_1 = \pm \frac{k a^2}{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}} y_1,$$

nd wir haben daher die beiden folgenden Gleichungen, in denen ie obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen:

$$16) \quad \begin{cases} X - x_1 = \pm \dfrac{k b^2}{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}} x_1, \\ Y - y_1 = \pm \dfrac{k a^2}{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}} y_1; \end{cases}$$

der

$$17) \quad \begin{cases} X = \dfrac{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2} \pm k b^2}{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}} x_1, \\ Y = \dfrac{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2} \pm k a^2}{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}} y_1. \end{cases}$$

Hieraus ersieht man, dass einem jeden Punkte $(x_1\, y_1)$ der Ellipse zwei Punkte (XY) der Toroide entsprechen, oder vielmehr, dass es für jede stetige Folge aus den Punkten einer Ellipse als Mittelpunkten beschriebener Kreise jederzeit zwei Toroiden giebt, was auch aus dem Begriffe der Toroide ohne weitere Erläuterung unmittelbar von selbst erhellet.

Weil nach 12)

$$Y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(X - x_1)$$

und diese Gleichung bekanntlich die Gleichung der dem Punkte $(x_1\, y_1)$ der Ellipse entsprechenden Normale derselben ist, so ist klar, dass alle Punkte der beiden Toroiden auf den Normalen der ihnen entsprechenden Punkte der Ellipse liegen, und von der Ellipse die constante Entfernung k haben, so dass also die Toroide zu der Klasse von Curven gehört, welche wohl zuerst von Kästner *curvae aequidistantes* genannt worden sind *). Uebrigens wird Leibnitz**) zuerst diese Entstehung einer Curve erdacht haben, scheint sich aber, wie ich, wenn mir auch die Acta Eruditorum jetzt gerade nicht zur Hand sind, doch aus einem Aufsatze von Johann Bernoulli (Opera omnia. T. I. p. 153.) zu schliessen berechtigt zu sein glaube, der Benennung *curvae parallelae* bedient zu haben. Noch gehört hierher eine Abhandlung von v. Prasse: De ellipseos evolutis aequidistantibus et earum evolutione. Lipsiae. 178. und De lineis et superficiebus aequidistantibus. Dissertatio inauguralis Michaelis Reiss. Gottingae. 180. Auch findet sich eine hierher gehörende Untersuchung über die Parabel in dem Lehrbuch der höheren Geometrie in analytischer Darstellung von H. W. Brandes. Theil I. Leipzig. 1822. S. 230., wo aber die Gleichung der betreffenden Curve nicht in völlig entwickelter Gestalt dargestellt ist, indem der Verfasser die wirkliche Ausführung der erforderlichen, etwas weitläufigen Elimination unterlassen hat.

Die Elimination der Grösse Θ aus den beiden Gleichungen 15) hat nun Catalan auf folgende Art auszuführen gelehrt.

Multiplicirt man jede der beiden Gleichungen mit dem Producte $(a^2+\Theta)^2(b^2+\Theta)^2$, so erhält man:

$$18)\quad \begin{cases} a^2(b^2+\Theta)^2 X^2 + b^2(a^2+\Theta)^2 Y^2 = (a^2+\Theta)^2(b^2+\Theta)^2, \\ \Theta^2(b^2+\Theta)^2 X^2 + \Theta^2(a^2+\Theta)^2 Y^2 = k^2(a^2+\Theta)^2(b^2+\Theta)^2. \end{cases}$$

Multiplicirt man nun die erste dieser beiden Gleichungen mit Θ^2, die zweite mit a^2, zieht dann die erste Gleichung von der zweiten ab, und dividirt hierauf auf beiden Seiten durch $(a^2+\Theta)^2$, so erhält man:

*) Comment. Soc. Gotting. T. XI.

**) Acta Erud. 1695. Nov. pag. 93.

19) $(a^2-b^2)\,\Theta^2\,Y^2 = (a^2k^2-\Theta^2)\,(b^2+\Theta)^2.$

Multiplicirt man dagegen die erste der beiden in Rede stehenden Gleichungen mit Θ^2, die zweite mit b^2, zieht dann die erste Gleichung von der zweiten ab, und dividirt hierauf auf beiden Seiten durch $(b^2+\Theta)^2$, so erhält man:

20) $(a^2-b^2)\,\Theta^2\,X^2 = -(b^2k^2-\Theta^2)\,(a^2+\Theta)^2.$

Durch Addition der Gleichungen 19) und 20) ergiebt sich:

$$(a^2-b^2)\,\Theta^2(X^2+Y^2) = \Theta^2\{(a^2+\Theta)^2-(b^2+\Theta)^2\} + k^2\{a^2(b^2+\Theta)^2-b^2(a^2+\Theta)^2\};$$

aber nach bekannten Sätzen:

$$(a^2+\Theta)^2-(b^2+\Theta)^2 = (a^2-b^2)(a^2+b^2+2\Theta),$$

$$a^2(b^2+\Theta)^2-b^2(a^2+\Theta)^2 = -(a^2-b^2)(a^2b^2-\Theta^2);$$

folglich

21) $\Theta^2(X^2+Y^2) = \Theta^2(a^2+b^2+2\Theta) - k^2(a^2b^2-\Theta^2).$

Multiplicirt man die Gleichung 19) mit a^2, die Gleichung 20) mit b^2, und addirt dann die beiden Gleichungen zu einander, so erhält man:

$$(a^2-b^2)\,\Theta^2(a^2X^2+b^2Y^2) = a^2(a^2k^2-\Theta^2)(b^2+\Theta)^2 - b^2(b^2k^2-\Theta^2)(a^2+\Theta)^2;$$

aber

$$a^2(a^2k^2-\Theta^2)(b^2+\Theta)^2 - b^2(b^2k^2-\Theta^2)(a^2+\Theta)^2 = \Theta^2b^2(a^2+\Theta)^2 - a^2\Theta^2(b^2+\Theta)^2 + k^2\{a^4(b^2+\Theta)^2 - b^4(a^2+\Theta)^2\}$$

$$= (a^2-b^2)\,\Theta^2(a^2b^2-\Theta^2) + k^2(a^2-b^2)\,\Theta\{\Theta(a^2+b^2)+2a^2b^2\};$$

folglich

22) $\Theta(a^2X^2+b^2Y^2) = \Theta(a^2b^2-\Theta^2) + k^2\Theta(a^2+b^2) + 2k^2a^2b^2.$

Ordnet man die Gleichungen 21) und 22) nach den Potenzen von Θ, so erhält man die beiden folgenden Gleichungen:

23) $\begin{cases} 2\Theta^3-(X^2+Y^2-a^2-b^2-k^2)\,\Theta^2-a^2b^2k^2=0, \\ \Theta^3+(a^2Y^2+b^2X^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)\,\Theta-2a^2b^2k=0. \end{cases}$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen einmal Θ^3 und dann $a^2b^2k^2$, so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$24)\quad \begin{cases} A = x^2+y^2-a^2-b^2-k^2, \\ B = a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2, \\ C = a^2b^2k^2 \end{cases}$$

gesetzt wird, die beiden folgenden Gleichungen:

$$25)\quad \begin{cases} A\Theta^2+2B\Theta-3C=0, \\ 3\Theta^2-2A\Theta-B=0. \end{cases}$$

Behandelt man diese beiden Gleichungen auf ähnliche A
so ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$26)\quad \begin{cases} 2(A^2+3B)\Theta+AB-9C=0, \\ (AB-9C)\Theta+2(B^2+3AC)=0; \end{cases}$$

und wenn man nun aus diesen beiden Gleichungen Θ elimini
so erhält man:

$$27)\quad (AB-9C)^2-4(A^2+3B)(B^2+3AC)=0.$$

Daher ist die Gleichung der Toroide:

$$28)\quad \left.\begin{array}{l} (x^2+y^2-a^2-b^2-k^2)^2(a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)^2 \\ +18a^2b^2k^2(x^2+y^2-a^2-b^2-k^2)(a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2) \\ +4a^2b^2k^2(x^2+y^2-a^2-b^2-k^2)^3 \\ +4(a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)^3 \\ -27a^4b^4k^4 \end{array}\right\}=$$

Die weitere Entwickelung dieser Gleichung überlasse ich d
Lesern, werde aber die vielleicht mir zugehenden Resultate ge
in dem Archive mittheilen.

XXXVI.

merkungen zu den im Archiv Thl. Heft 2. p. 213—214. von Herrn Dienger aufgestellten Theoremen I—V.

Von dem

Herrn Doctor F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Ermangelung einer allgemeinen Summationsmethode, d. h. solchen, die sich auf alle Reihen ohne Ausnahme erstreckt, immer am besten, Methoden zur Summirung möglichst neiner Reihen aufzusuchen, damit man auf die eigentlichen en aufmerksam werde, von welchen die zahllosen Resultate ummirung vereinzelt dastehender Reihen, mit denen die sis überschwemmt ist, ihren gemeinsamen Ursprung haben. B. fiel mir, als ich einen oberflächlichen Blick auf die in Ueberschrift bezeichneten Lehrsätze warf, bei Nro. II., III. V., sogleich ein, dass die Summation alsbald durch eine Me- gelingen müsse, welche ich in Crelle's Journal. Bd. 31. 5—45. für die allgemeinen Reihen

$$(a)\quad \gamma_0 - n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 - \text{etc.} + (-1)^n\gamma_n,$$

$$(b)\quad \gamma_0 + n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 + \text{etc.} + \gamma_n$$

nwendung gebracht habe. Die Grössen γ sind willkührlich, n ist eine positive ganze Zahl. Alle unter diesen Klassen ffenen endlichen Reihen sind durch einen einfachen Ausdruck irbar, wenn ein solcher für die $n$te Differenz, oder für die Summe angegeben werden kann *). Auf diese Weise habe

---

) Zieht man von jedem Gliede der Grundreihe $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots\gamma_n$ das folgende ab, nennt die dadurch entstehende Reihe von Gliedern Differenzenreihe, verfährt mit dieser ebenso, u. s. f., so wird, wie t, das erste Glied der $n$ten Differenzenreihe (das ich $n$te Differenz t habe) durch den Ausdruck (a) dargestellt. Addirt man zu jedem das nächste, oder bildet Summenreihen, so stellt der Ausdruck (b) te Glied der $n$ten Summenreihe (die $n$te Summe) dar.

ich a. a. O. bekannte Resultate erwiesen, und viele Theoreme über die Grössenform q_p^k, d. i. $\frac{q(q+k)(q+2k)\ldots(q+(p-1)k)}{1.2.3\ldots p}$, aufgestellt.

Was nun zuerst die Sätze II. und III. betrifft, so sind beide in der allgemeinern Gleichung ($f(p) = 1 + \lambda p$, λ eine beliebige Grösse, gesetzt)

$$1. \quad \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k n_k \cdot \frac{1}{f(p-k)} = (-1)^n \cdot \frac{\lambda . 2\lambda . 3\lambda \ldots n\lambda}{f(p) . f(p-1) \ldots f(p-n)}$$

enthalten, wo p eine beliebige Grösse ist. Denn man sieht leicht, dass diese Gleichung das Theorem II. giebt für $\lambda = 2$, $p = n$; das Theorem III. für $\lambda = 2$, $n = 2p+1$ (im letzteren Falle sind einige Transformationen nöthig, die ich hier übergehen kann). Man erhält die Gleichung 1., wenn man von der Grundreihe ausgeht:

$$\frac{1}{f(p)}, \frac{1}{f(p-1)}, \frac{1}{f(p-2)}, \text{ etc.}$$

und die $n$te Differenz bildet. Denn da allgemein $f(p) - f(p-\mu) = \lambda\mu$, so wird nach und nach

$$\Delta^1(\gamma_0) = \frac{1}{f(p)} - \frac{1}{f(p-1)} = \frac{\lambda}{f(p) . f(p-1)},$$

$$\Delta^2(\gamma_0) = -\lambda \left[\frac{1}{f(p) f(p-1)} - \frac{1}{f(p-1) . f(p-2)} \right]$$

$$= -\lambda . \frac{f(p-2) - f(p)}{f(p) . f(p-1) . f(p-2)} = \frac{\lambda . 2\lambda}{f(p) . f(p-1) . f(p-2)}$$

u. s. w. also weiter nichts als wenn man den Satz von den Binomialcoefficienten:

$$\Delta^n(\gamma_0) \equiv (-1)^n \frac{\lambda . 2\lambda . 3\lambda \ldots n\lambda}{f(p) . f(p-1) \ldots f(p-n)}$$

Der Satz V. kann auf folgende Form gebracht werden:

$$2. \quad 1 - \frac{2}{3} m_1 + \frac{2.4}{3.5} m_2 - \frac{2.4.6}{3.5.7} m_3 + \ldots \pm \frac{2.4.6 \ldots 2m}{3.5.7 \ldots (2m+1)} = \frac{1}{2m+1}$$

oder

$$2^*. \quad \frac{2.4.6 \ldots 2m}{3.5.7 \ldots (2m+1)} - m_1 \cdot \frac{2.4.6 \ldots (2m-2)}{3.5.7 \ldots (2m-1)} + \ldots \pm 1 = (-1)^m \frac{1}{2m+1}.$$

Man hat nun nach der so eben angewandten Methode

$$\Delta(\gamma_0) = \frac{2.4.6\ldots2m}{3.5.7\ldots(2m+1)} - \frac{2.4.6\ldots(2m-2)}{3.5.7\ldots(2m-1)} = -\frac{2.4.6\ldots(2m-2)}{3.5.7\ldots(2m+1)}$$

$$\Delta^2(\gamma_0) = -\left[\frac{2.4.6\ldots(2m-2)}{3.5.7\ldots(2m+1)} - \frac{2.4.6\ldots(2m-4)}{3.5.7\ldots(2m-1)}\right] = 3.\frac{2.4.6\ldots(2m-4)}{3.5.7\ldots(2m+1)},$$

$$\Delta^2(\gamma_0) = 3\left[\frac{2.4.6\ldots(2m-4)}{3.5.7\ldots(2m+1)} - \frac{2.4.6\ldots(2m-6)}{3.5.7\ldots(2m-1)}\right] = -3.5.\frac{2.4.6\ldots(2m-6)}{3.5.7\ldots(2m+1)},$$

u. s. w.

$$\Delta^n(\gamma_0) = (-1)^n.3.5.7\ldots(2n-1).\frac{2.4.6\ldots(2m-2n)}{3.5.7\ldots(2m+1)}.$$

Also ist nach (a), wenn $\frac{2.4.6\ldots2m}{3.5.7\ldots(2m+1)} = f(m)$ gesetzt wird:

$$3.\quad f(m) - n_1 f(m-1) + n_2 f(m-2) - \ldots \pm f(m-n) = (-1)^n.\frac{2.4.6\ldots(2m-2n)}{(2n+1)(2n+3)\ldots(2m+1)}.$$

Diese Gleichung enthält den Satz V. als speciellen Fall, denn für $n=m$, wobei der Zähler $2.4.6\ldots(2m-2n)$, wie man übersehen wird, der Einheit gleich zu setzen, resultirt die Relation 2).

Die beiden noch übrigen Theoreme I. und IV. haben eine andere Quelle. Mit Rücksicht auf das letztere ist das allgemeine Glied $\frac{1}{n-p}(n-p)_{m-p} = \frac{(n-p-1)_{m-p}}{n-m}$, und die Summe der Reihe ist folglich $\frac{1}{n-m}\sum_{p=0}^{p=m}(n-p-1)_{m-p}$. Die aufgestellte Gleichung enthält also weiter nichts als den bekannten Satz von den Binomialcoefficienten:

$$(n-1)_m + (n-2)_{m-1} + (n-3)_{m-2} + \ldots + (n-m-1)_0 \equiv n_m.$$

nur in etwas veränderter Form, und dieser Satz ist nur eine Wiederholung der Formel

$$n_m = (n-1)_m + (n-1)_{m-1}.$$

Das Theorem I. endlich nimmt, wenn man mit dem ersten Factor auf der Linken der zweiten multiplicirt, und Binomialcoefficienten einführt, die Gestalt an:

$$4.\quad \frac{m+1}{m+2}\left[\frac{1}{(m+r)_{r-2}} + \frac{1}{(m+r-1)_{r-3}} + \frac{1}{(m+r-2)_{r-4}} + \ldots + \frac{1}{(m+2)_0}\right] = \frac{1.2.3\ldots(r-1)}{(m+2)(m+3)\ldots(m+r)}.$$

oder

$$\frac{m+1}{m+2}\cdot\sum_{k=0}^{k=r-2}\frac{1}{(m+r-k)_{r-k-2}}=1-\frac{1.2.3\ldots(r-1)}{(m+2)(m+3)\ldots(m+r)}.$$

Diese Formel ist keine andere als diejenige, welche ich in einer andern Abhandlung dem Crelle'schen Journals: Ueber die Bernoullische Methode summirbare Reihen zu finden." (Band 31. p. 253–58. Formel 21.) aufgestellt habe, und welche so lautet:

[illegible]

Setzt man nämlich hier $p=m+2$, $m=r-k-2$, $n=r-2$, so kommt

[illegible]

und diese Relation stimmt mit 4. überein, da $(m+r-k)_{m+2}=(m+r-k)_{r-k-2}$, und $(m+r)_{m+1}=(m+r)_{r-1}$ ist.

Uebrigens habe ich die Formel 21. aus der viel allgemeinern 20. erhalten, nämlich

[illegible]

XXXVII.

Weitere Erörterungen analytischer Gegenstände. Versuch einer genetischen Erklärung der analytischen Reihe.

Von dem

Herrn Dr. Barfuss zu Weimar.

§. 1.

Fragt man nach der Summe einer Reihe

$$\text{I.}\quad f(0,x)+f(1,x)+f(2,x)+\ldots+f(n,x)$$

in welcher jedes Glied als einerlei Function des Stellenzeigers n und einer willkührlichen Grösse x zu denken ist, so verlangt man bekanntlich einen, der Summe aller Glieder gleichen Ausdruck, der zwar auch eine Summe mehrerer Glieder sein kann, in welchem aber die Anzahl der Glieder sich gleich bleibt, welches auch der Stellenzeiger n des letzten Gliedes in der Reihe I. sein mag. Wir kennen nur eine Reihe, welche sich in Folge unserer arithmetischen Theorien unmittelbar summiren lässt, nämlich die Summe gleicher Glieder $a+a+a+\ldots$, für welche wir na schreiben. Jede andere Reihe muss also auf diese zurückgeführt werden können, wenn wir nur noch dazu bemerken, dass a auch 0 sein kann; ausserdem wäre die Summation gar nicht ausführbar. Es ergiebt sich hieraus leicht der Grundgedanke für alle Reihensummirung; man muss mit der Gleichung:

$$\text{II.}\quad \Sigma(n,x)=f(0,x)+f(1,x)+f(2,x)+\ldots+f(n,x)$$

irgend eine Rechnung anstellen, wodurch sich die Reihe auf eine, von n abhängige Anzahl gleicher Glieder reducirt, sei es auch, dass ausserdem noch einige andere Glieder, deren Anzahl durch n nicht bedingt ist, stehen bleiben. Man erhält dadurch eine Gleichung für $\Sigma(n,x)$, aus welcher dieses in der verlangten Form hervorgeht. Dabei machen wir den wesentlichen Unterschied, ob man nach der Reduction eine Reihe $a+a+a+\ldots$ erhält, in welcher $a=$ einer bestimmten Grösse ist, oder ob $a=0$ gefunden

wird. So wie man Reihen der ersten Art arithmetische nennt, so will ich die der anderen Art geometrische nennen. Die einfache arithmetische Reihe

$$0.x + 1.x + 2.x + \ldots + n.x$$

und die geometrische

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

geben das Beispiel.

§. 2.

Welchen Weg man einschlagen muss, um die Summe einer Reihe zu finden, hängt lediglich vom Bildungsgesetz ihrer Glieder ab, aber so wie dieses Bildungsgesetz in vielerlei Formen, die alle analytisch gleichgeltend sind, ausgesprochen werden kann, so lässt sich auch die Summirung auf mancherlei Weise gestalten. Bei der geometrischen Reihe lässt die Reduction etwas am Anfange stehen, was eine vom Stellenzeiger n des letzten Gliedes unabhängige Grösse ist und in manchen Fällen auch 0 sein kann, dann verschwinden sämmtliche Glieder bis zur Stelle $n=\mu$, wobei μ bei allen Werthen von n constant bleibt, und nun behält man noch einige von n abhängige Glieder, die sich also ändern, wenn n verschiedene Werthe annimmt. Die Anzahl derselben bleibt sich entweder bei jedem Werthe von n gleich, und dann ist das Summirungsgeschäft vollständig gelungen, oder aber es ist ihre Anzahl mit n veränderlich, und dann ist die Summe in der oben geforderten Weise nicht gefunden, vielmehr ist die beabsichtigte Summation nur auf eine andere, vielleicht noch verwickeltere zurückgeführt. Bezeichnet man die mit der Reihe angestellte Rechnung mit F, so ist die durch $F.\Sigma(n,x)$ dargestellte Grösse nur in so fern von n abhängig, als $\Sigma(n,x)$ davon abhängt.

Damit man die Glieder, welche bei der Reduction am Anfange und am Ende der Reihe noch stehen bleiben, gehörig von einander sichten könne, sagt man, die Glieder am Ende seien diejenigen, welche dadurch in die Rechnung kommen, dass man die Reihe mit dem Gliede $f(n,x)$ abbricht. Denkt man sich nämlich die Reihe ins Unbestimmte fortgesetzt, so verliert man bei der Reduction die Endglieder und man findet die Anfangsglieder ohne Zweideutigkeit. Aber klarer noch wird der Ausdruck, wenn man die Reihe

III. $$\Sigma(n,v,x) = v^0 f(0,x) + v^1 f(1,x) + v^2 f(2,x) + \ldots + v^n f(n,x)$$

zu Grunde legt, aus welcher die in II. entsteht, wenn $v=1$ wird. Hier haben die Glieder am Ende wenigstens den Factor $v^{n-\mu}$ und die Rechnung giebt überhaupt einen Ausdruck von der Form:

IV. $$F.\Sigma(n,v,x) = a + bv + cv^2 + \ldots + dv^\delta + Av^{n-\mu} + Bv^{n-\mu+1} + Cv^{n-\mu+2} + \ldots$$

Dabei sind $abc\ldots d$ Functionen von x, nicht von n oder v, $ABC\ldots$ aber sind Functionen von n und x. Die Zahl der Glieder in der Reihe $a+bv+cv^2+\ldots+dv^\delta$ ist unveränderlich bei jedem Werthe von n, und eben dieses gilt oft auch von der Reihe $Av^{n-\mu}+Bv^{n-\mu+1}+\ldots$, aber in vielen Fällen wächst hier auch die Anzahl der Glieder mit n, obschon sie immer endlich ist. Immer ist μ eine unveränderliche ganze Zahl und man könnte die Rechnung in allen Fällen so gestalten, dass man $\mu=-1$ hätte.

Dass man an die Stelle der Reihe

$$f(0,x)+f(1,x)+f(2,x)+\ldots+f(n,x)$$

die allgemeinere

$$f(0,x)+vf(1,x)+v^2f(2,x)+\ldots+v^nf(n,x)$$

setzen kann, ergiebt sich daraus, dass jene aus dieser hervorgeht, wenn $v=1$ genommen wird. Man wird leicht gewahr, dass das für die Reihe II. angegebene Summationsverfahren von aller Unbestimmtheit befreit wird, wenn man es dem Gesetz der Reihe III., welches ich das Gesetz der geometrischen Reihe nennen will, unterordnet, ja es ist ohne Weiteres klar, dass, wenn die erstere in der bezeichneten Weise bildsam ist, es auch die letztere sein muss. Die Nichtachtung dieser Bemerkung ist der Grund aller Schwierigkeiten in der Reihenlehre gewesen; man verlor die syntaktische Bedeutung des ganzen Reductionsverfahrens und glaubte sich nur dann zu einem Schlusse berechtigt, wenn das, was man den Rest nennt, für unendlich grosse Stellenzeiger verschwindet.

§. 3.

Wir lassen nun die sämmtlichen Glieder weg, welche bei der Reduction am Ende der Reihe stehen bleiben, also die Glieder, die eben daher stammen, dass man die Reihe bei einem Gliede abbricht, oder die Glieder, die in dem Ausdrucke in IV. den Factor $v^{n-\mu}$ haben. Wir erhalten dadurch die allerdings unrichtige Gleichung:

$$F.\Sigma(n,v,x)=a+bv+cv^2+\ldots+dv^\delta,$$

und finden hieraus statt des wahren $\Sigma(n,v,x)$ eine blosse Function von v und x, die wir die Summe der unendlichen, d. h. der ohne letztes Glied gedachten Reihe $f(0,x)+vf(1,x)+v^2f(2,x)+\ldots$ nennen. Bezeichnen wir sie mit $\varphi(v,x)$, so schreiben wir dann:

$$\text{V.}\quad \varphi(v,x)=f(0,x)+vf(1,x)+v^2f(2,x)+\ldots$$

und es ist klar, dass diese Gleichung immer unrichtig sein muss, wenn man die Reihe bei einem Gliede abbricht, mag sie nun der Function $\varphi(v,x)$ sich ohne Ende nähern oder nicht. Man darf daher diesen Ausdruck auch nicht so verstehen, als ob

$$\varphi(v,x) = f(0,x) + vf(1,x) + v^2 f(2,x) + \ldots + v^n f(n,x)$$

für $n = \infty$ sei, vielmehr folgt auch jenseits des Gliedes $v^\infty f(\infty, x)$ noch die endlose Reihe $v^{\infty+1} f(\infty+1, x) + \ldots$. Diess muss man wohl berücksichtigen, wenn man bei dem Gebrauche der unendlichen Reihen nicht auf widersinnige Resultate gelangen will.

Der Ausdruck: „Summe einer unendlichen Reihe" hat an sich keinen Sinn, denn man kann immer nur eine endliche Anzahl von Gliedern zusammenzählen. Man muss ihm erst eine Bedeutung beilegen, und so wie nun die neuere Analysis in ihrer Einseitigkeit hierfür die Annäherungsgrenze bestimmt, so hat die ältere aus allgemeineren Rücksichten diejenige Formel gewählt, die ich eben erklärt habe. Hier bezieht sich nämlich die Unendlichkeit der Reihe gar nicht auf eine unendliche Menge von Gliedern, sondern lediglich auf die analytische Behandlungsweise, welche unter allgemeineren Bedingungen möglich ist, als unter denen der Convergenz.

§. 4.

Diese so bestimmte Summe der unendlichen Reihe hat nun zwei sehr merkwürdige Eigenschaften. Einmal nämlich ist sie denselben analytischen Bedingungen unterworfen, denen die Reihe unterliegt, wenn diese ohne letztes Glied gedacht und nach dem Gesetz behandelt wird, welches ich in §. 2. aufgestellt habe. Wir sagen dafür, die Summenformel habe mit der Reihe gleiche syntaktische Eigenschaften. In V. nämlich hat die Function $\varphi(v,x)$ die Eigenschaft, dass $a + bv + cv^2 + \ldots + dv^l$ durch die Rechnung $F.\varphi(v,x)$ herauskommt, aber eben diese Eigenschaft hat auch die Reihe $f(0,x) + vf(1,x) + v^2 f(2,x) + \ldots$, wenn in ihr kein Glied als das letzte gedacht wird. Wem die Unendlichkeit der Reihe Schwierigkeiten macht, der kann diese Redensart auch ganz vermeiden, wenn er dafür den Ausdruck der Dimension substituirt. Ein Glied von der Dimension m hat die Form Mv^m, wo M nicht weiter von v abhängt. Darnach hat die Reihe $f(0,x) + vf(1,x) + v^2 f(2,x) + \ldots$ bis auf Glieder von beliebiger Dimension mit der Function $\varphi(v,x)$ gleiche syntaktische Eigenschaften, nämlich bis auf Glieder von der Dimension $n-1$, wenn die Reihe mit dem Gliede $n$ter Dimension abgebrochen wird. So ist denn zugleich klar, dass die ältere Theorie mit unendlichen Reihen eigentlich gar nichts zu schaffen hat.

Aus der Identität der Summe und der Reihe hinsichtlich ihrer syntaktischen Eigenschaften entspringt der sehr allgemeine Reihencalcul der älteren Analysis, welcher nur dem Gesetz unterworfen ist, dass da, wo man mit den Reihen rechnet, die Glieder gleicher Dimension vollständig beisammen stehen und dass nur solche Glieder weggelassen werden, welche bei beliebiger Fortführung der Reihen zu beliebigen Dimensionen aufsteigen können. Auf solche Weise finden sich einerseits endliche, d. h. vom Dimensionszeichen unabhängige Formen, andererseits unendliche Reihen mit gleichen syntaktischen Eigenschaften, also unendliche Reihen mit ihren Summen in dem erklärten Sinne.

Dagegen ist uns die Function $\varphi(v,x)$ oft zuerst gegeben und wir sollen sie in eine Reihe entwickeln. Diese Entwickelung geschieht immer nur unter der Bedingung, dass die Reihe mit ihrer erzeugenden Function $\varphi(v,x)$ die syntaktischen Eigenschaften theile, und hieraus ist klar, dass Entwickeln und Summiren solche Operationen sind, deren eine das Umgekehrte der anderen ist. Der Entwickelung dient vorzüglich die Methode der unbestimmten Coefficienten, mit Hülfe derer man auf die leichteste Weise findet, wie die Glieder der Reihe Functionen ihres Stellenzeigers sind. Die Bestimmung geschieht eben nach den syntaktischen Eigenschaften, denen die Reihe zufolge der ihr schon gesetzten Summe genügen muss.

§. 5.

Doch das Alles giebt den unendlichen Reihen nur syntaktische Bedeutung; ihre arithmetische Bedeutung und somit ihren praktischen Werth erhalten sie durch den Satz, dass die Summe der Reihe zugleich ihre Annäherungsgrenze ist, wenn sie eine solche hat.

Setzen wir nämlich der Kürze halber in dem Ausdrucke IV.:

$$a+bv+cv^2+\ldots+dv^\delta = y,$$
$$Av^{n-\mu}+Bv^{n-\mu+1}+\ldots = y_n;$$

so haben wir

$$F.\Sigma(n,v,x) = y-y_n;$$

und wenn wir dann die Rechnung, durch welche $F.\Sigma(n,v,x)$ sich in $\Sigma(n,v,x)$ verwandelt, durch Φ bezeichnen, so ist

$$\text{VI.} \quad \Sigma(n,v,x) = \Phi.(y-y_n),$$

wobei die Rechnung Φ nur in so fern von n abhängig ist, als y_n davon abhängt. Nähert sich nun $\Sigma(n,v,x)$ bei wachsendem n einer festen Grenze, so wird sich natürlich $\Phi.(y-y_n)$ derselben Grenze nähern, und um diese Grenze zu erhalten, wird man aus $y-y_n$ alles das weglassen müssen, was den Ausdruck $\Phi.(y-y_n)$ von n abhängig macht, denn die Annäherungsgrenze ist eben von n unabhängig. Daher muss man das ganze y_n weglassen, denn was davon stehen bleiben dürfte, müsste doch von n unabhängig sein, und es würde somit aus dem Ausdrucke $y_n = Av^{n-\mu}+Bv^{n-\mu+1}+\ldots$, in welchem $A, B \ldots$ von n nicht abhängen, eine von n unabhängige Grösse sich sondern, was aber wegen des Factors $v^{n+\mu}$ unmöglich ist.

Diess scheint mir die, der alten Analysis eigenthümliche Schlussweise zu sein, und wenn man auch eine genauere Zergliederung der Gedanken hier wünschen mag, so bleibt die Sache doch vollkommen richtig und liegt so nahe, dass die älteren Analysten, wie es scheint, gar nicht an eine weitere Ausführung dachten. Ihnen stand daher der Satz:

dass diejenige Formel, welche die Annäherungsgrenze der Reihe vorstellt, mit der Reihe gleiche syntaktische Eigenschaften habe, wie ein Axiom fest, und diess muss man bei der Beurtheilung der älteren Theorie wohl im Auge haben, wenn man über ihre Methoden ein richtiges Urtheil fällen will.

Obige Art zu schliessen ist auch in der That so oberflächlich nicht, als sie beim ersten Anblick scheinen mag. Wenn der Ausdruck $\Phi_n(y-y_n)$ mit wachsendem n sich einer bestimmten Grenze nähert, so ist er eben mit n veränderlich, aber nur in so fern, als y_n von n abhängt, und man kann seine Annäherungsgrenze nur dadurch erhalten, dass man aus $y-y_n$ das mit n Veränderliche weglässt. Daher ist dieselbe entweder $\Phi.y$ oder $\Phi.(y+z)$, wo z nur eine Function von v und x sein kann. Dieses z müsste sich nun als ein analytischer Bestandtheil von y_n nachweisen lassen, denn die Grenze, welcher sich $\Phi_n(y-y_n)$ ohne Ende nähert, ist ja durch die Natur dieses Ausdrucks bedingt und muss aus derselben bestimmbar sein. Wenn sich aber aus

$$y_n = v^n x\,(A+Bv+\ldots)$$

das Glied z nach irgend welchen analytischen Bedingungen absondert, so muss aus $A+Bv+Cv^2+\ldots$ ein Glied $\frac{z}{v^n x}$ sich ausscheiden lassen, und da A von v nicht abhängt, so hätte man das Glied $\frac{z}{v^n}$ in $Bv+Cv^2+\ldots$ zu suchen. Aus $B+Cv+\ldots$ müsste sich also ein Glied von der Form $\frac{z}{v^{n-1}}$ absondern lassen, und da B von v nicht abhängt, so hätte man dieses Glied in $Cv^2+\ldots$ zu suchen. Indem man aber so fortschliesst, findet man, dass das Glied z in y_n nirgends gefunden wird, dass also $\Phi.y$ die Annäherungsgrenze von $\Phi_n(y-y_n)$ ist.

§. 6.

Hiermit habe ich die wesentlichsten Momente der älteren Theorie der Reihen dargelegt, so wie ich sie aus der Lectüre verschiedener Werke geschöpft habe. Dabei habe ich Sorge getragen, so viel als möglich Alles zu vermeiden, was ich vielleicht als mein Eigenthum in Anspruch nehmen dürfte, um dem Leser mit möglichster Treue das vorzuführen, was sich aus den Quellen schöpfen lässt. Statt der Reihe II. wählte ich die allgemeinere in III., weil die letztere in der That für alle Rechnungen mit Reihen das allgemeine Formular ist, ich will aber damit nicht sagen, dass die Theorie nicht auf die blosse Form in II. gegründet werden könne.

Es scheint mir allerdings ein Mangel der älteren Theorie zu sein, dass sie ihren Hauptsatz nicht gehörig begründet hat, ja dass man denselben aus den meisten Werken erst herausklauben muss. Dieser Hauptsatz heisst:

die Formel, welche die Annäherungsgrenze einer Reihe vorstellt, hat mit derselben Reihe, wenn sie als geometrische behandelt wird, gleiche syntaktische Eigenschaften.

Gegen diesen Mangel der älteren Analysis hat aber die neuere einen Vorzug, denn sie weist uns zwar in den meisten Fällen gar nach, wie die Reihe einer bestimmten Grenze sich ohne Ende nähert, aber sie weist nicht nach, wie dieser Umstand eine nothwendige Folge der Rechnung war, durch welche man die Summe fand. Man giebt daher unnöthiger Weise noch die Betrachtung des Restes hinzu, während doch daraus, dass die Summenformel mit der Reihe gleiche syntaktische Eigenschaften bekam, das Verschwinden des Restes bei convergirenden Reihen mit Nothwendigkeit folgte.

Ueberhaupt liegt in der Verkennung des obigen Satzes das ganze Missverständniss, und sehr häufig bleiben auch die älteren Analysten in dieser Beziehung nicht vorwurfsfrei. Daher z. B. die verschiedenen Ansichten über die Methode der unbestimmten Coefficienten, namentlich der unnütze Zusatz, dass man die Form der Reihe vor der Coefficientenbestimmung gerechtfertigt wissen will. Begreift man unter dieser Methode alle die Fälle, wo man statt unbekannter Zahlen $A, B, C \ldots$ setzt, so mag die gedachte Forderung gerecht sein, sie fällt aber alsbald weg, wenn die Coefficienten durch eine Reihe von Gleichungen folgeweise aus einander bestimmt sind. Denn hier kann die Reihe nur so gezählt werden, dass sie mit der ihr im Voraus gesetzten Summe gleiche syntaktische Eigenschaften bekommt. Darnach bestimmt sich aber nicht nur die Relation der Coefficienten, sondern auch zugleich das, was man die Form der Reihe nennt.

Steht nun der obige grosse Satz der älteren Analysis fest, und er wird stehen trotz aller modernen Kritik, so ist zugleich klar, dass die neuere Analysis gegen die ältere in ein kümmerliches Licht zurücktritt. Die älteren Methoden, namentlich die der unbestimmten Coefficienten, die der Umkehrung der Reihen, die combinatorische Anordnung des Systemes nach deutscher Erfindung, behalten nicht nur ihre volle Gültigkeit, sondern sie sind sogar schön und echt wissenschaftlich, da sie das Mannigfaltige zu einem innigen Ganzen verbinden. Wo weist denn die neuere Theorie nach, dass Summiren und Entwickeln ganz gleiche Operationen sind, in welchen sich nur die Aufgabe umkehrt?

§ 7.

Am Schlusse dieser Abhandlung will ich noch folgende zwei Bemerkungen anführen. Die erste betrifft den Gebrauch des Zeichens $=$ zwischen der Function und ihrer entwickelten Darstellung. So viel ich mich erinnere, hat Thibaut zuerst über diese Sache klar gesprochen, da man nach ihm den Ausdruck

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n$$

nicht als eine identische Gleichung verstehen, sondern ihn unter

der Bedingung auffassen soll, dass die Reihe bis zum $n$ten Gliede vollständig sei und dass dem zu Folge der Fehler über die $n$te Dimension hinausgehe. Daher müsste der Ausdruck eigentlich so vervollständigt werden:

$$f(x) \text{ bis zum Gliede } n\text{ter Dimension} = A_0 + A_1 x + B_2 x^2 + \ldots\ldots + A_n x^n.$$

Dieses behält seine Geltung, die Reihe mag con- oder divergiren, aber das Gleichheitszeichen lässt sich immer dadurch rechtfertigen, dass der Fehler recht klein werden kann. Zu unseren modernen Theorien fehlt nur noch eine, welche nur recht stark convergirende Reihen als richtig zulässt.

Obige Bemerkung Thibaut's lässt sich nun leicht zur höchsten Allgemeinheit bringen, wenn man die Reihe ohne letztes Glied auffasst. Dadurch enthält sie immer den Rest in sich, wodurch sie sich zur vollständigen Function ergänzt, und das Gleichheitszeichen wird eben so nothwendig, wie bei der Formel $a+b=b+a$.

Die zweite Bemerkung betrifft die unzureichende Unterscheidung zwischen con- und divergirenden Reihen. Alle Reihen, welche nicht einer endlichen Grösse als ihrer Grenze sich nähern, nennt man divergirende, und versagt dadurch einer Menge von Reihen die Theilnahme am Begriff der Convergenz, bei welchen sich die Summe unendlich vieler Glieder eben so rechtfertigen lässt, wie wenn Annäherung an eine endliche Grenze statt hat. Man denke sich die Reihe so gestaltet und ihre Glieder so gruppirt, dass eine Reihe mit lauter positiven Gliedern entsteht. Bezeichnet dann Σ_n die Summe aller Glieder vom 1sten bis zum $n$ten, so hat man

$$X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n + X_{n+1} + \ldots\ldots + X_{n+m} = \Sigma_n + \Sigma_{n+m} - \Sigma_n,$$

also

$$\Sigma_{n+m} = \Sigma_n \left(1 + \frac{\Sigma_{n+m} - \Sigma_n}{\Sigma_n}\right).$$

Verschwindet nun der Quotient $\frac{\Sigma_{n+m} - \Sigma_n}{\Sigma_n}$ für $n = \infty$, auch dann, wenn man $m = \infty$ nimmt, so hat die Reihe bei unendlich vielen Gliedern eine Summe, aber dieselbe muss nicht nothwendig endlich sein. Der Ausdruck $\frac{\Sigma_{n+m} - \Sigma_n}{\Sigma_n}$ verschwindet aber allemal, wenn die Glieder der Reihe bis zum Verschwinden abnehmen.

Bei divergirenden Reihen verschwindet der Quotient $\frac{\Sigma_{n+m} - \Sigma_n}{\Sigma_n}$ unter den angegebenen Bedingungen nicht, und daher kann auch von einer Summe ihrer unendlich vielen Glieder nicht die Rede sein, wovon auch in der That kein guter Schriftsteller geredet hat.

XXXVIII.

Ein neues Theorem von den Linien zweiten Grades.

„Die Quadratsumme der reciproken Werthe „zweier auf einander senkrechten Durchmesser „bei einem Kegelschnitt (Ellipse und Hyperbel) „ist constant, nämlich bei der Ellipse der Qua„dratsumme, bei der Hyperbel der Quadratdif„ferenz der reciproken Werthe der Axen gleich.“

Von dem
Herrn Doctor F. Arndt,
Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Es scheint mir überflüssig zu sein, dieses Theorem auf dem gewöhnlichen Wege zu erweisen, da dies keine Schwierigkeiten hat; ich erlaube mir aber den Weg anzugeben, welcher mich zur Entdeckung des Satzes führte, namentlich auch deshalb, weil so zugleich ein für die Gleichung des zweiten Grades in ihrer allgemeinsten Form geltender Ausdruck für die gedachte Quadratsumme gefunden wird.

Die den Kegelschnitt ausdrückende Gleichung sei

$$1. \quad Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0,$$

und α der Coordinatenwinkel, auf den sie sich bezieht. Die Transformation der Coordinaten in secundäre, für welche die Axen der x' und y' mit der Axe der x die auf bekannte Weise gezählten Winkel ξ und η einschliessen, und der neue Anfang durch die primitiven Coordinaten p, q dargestellt wird, giebt

$$x = p + \frac{\sin(\alpha - \xi)}{\sin\alpha} x' + \frac{\sin(\alpha - \eta)}{\sin\alpha} y',$$

$$y = q + \frac{\sin\xi}{\sin\alpha} x' + \frac{\sin\eta}{\sin\alpha} y'.$$

Verbindet man damit die Gleichung 7., so kommt

$$14.\quad \begin{cases} A' = \dfrac{A - 2B\cos\alpha + C \pm \sqrt{L}}{2\sin\alpha^2}, \\ C' = \dfrac{A - 2B\cos\alpha + C \mp \sqrt{L}}{2\sin\alpha^2}. \end{cases}$$

a) Ist nun $B^2 - AC < 0$, wie bei der Ellipse, so ist A' positiv, weil nach der ersten der Gleichungen 6. $AA'\sin\alpha^2 = [A\cos\xi - B\cos(\alpha-\xi)]^2 - (B^2 - AC)\cos(\alpha-\xi)^2$ ist*). Ferner ist auch C' positiv, weil das Product $A'C'\sin\alpha^2 = -(B^2 - AC)$, also > 0 ist. Daher ist nach 10. $F < 0$, und man kann setzen $a^2 = \dfrac{-F}{C'}$, $b^2 = \dfrac{-F}{A'}$. Die Gleichung 10. wird dann $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, und a, b sind resp. die grosse und kleine Halbaxe der Ellipse. Es ist folglich

$$15.\quad \begin{cases} \left(\dfrac{1}{a}\right)^2 = -\dfrac{A - 2B\cos\alpha + C - \sqrt{L}}{2F\sin\alpha^2}, \\ \left(\dfrac{1}{b}\right)^2 = -\dfrac{A - 2B\cos\alpha + C + \sqrt{L}}{2F\sin\alpha^2}; \end{cases}$$

also

$$16.\quad \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 = -\frac{A - 2B\cos\alpha + C}{F\sin\alpha^2},$$

und nach 8.

$$17.\quad \left(\frac{1}{x'}\right)^2 + \left(\frac{1}{y'}\right)^2 = \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2.$$

b) Wenn $B^2 - AC > 0$, wie bei der Hyperbel, so ist die Gleichung $-\dfrac{C}{F}x'^2 - \dfrac{A}{F}y'^2 = 1$. Vergleicht man dieselbe mit $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, und nimmt das Vorzeichen in dem Ausdrucke für C' so, dass $-\dfrac{C}{F}$ positiv ist, so wird $-\dfrac{A'}{F}$ für das entsprechende Vorzeichen negativ, und man kann setzen $\dfrac{1}{a^2} = -\dfrac{C'}{F}$, $\dfrac{1}{b^2} = \dfrac{A'}{F}$, oder

$$18.\quad \begin{cases} \left(\dfrac{1}{a}\right)^2 = -\dfrac{A - 2B\cos\alpha + C + \sqrt{L}}{2F\sin\alpha^2}, \\ \left(\dfrac{1}{b}\right)^2 = +\dfrac{A - 2B\cos\alpha + C \mp \sqrt{L}}{2F\sin\alpha^2}; \end{cases}$$

also

*) Der Coefficient A kann immer positiv genommen werden.

19. $$\left(\frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{b}\right)^2 = \frac{A - 2B\cos\alpha + C}{F\sin\alpha^2},$$

und nach 8.

20. $$\left(\frac{1}{x'}\right)^2 + \left(\frac{1}{y'}\right)^2 = \left(\frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{b}\right)^2.$$

Anmerkung 1. Zwei auf einander senkrechte Durchmesser der Hyperbel werden diese Kurve nur dann zu gleicher Zeit schneiden, das obige Theorem also für die Hyperbel auch nur Anwendung finden, wenn der Asymptotenwinkel ein stumpfer ist. Dies voraus gesetzt, seien OT, OT' die Asymptoten, O der Mittelpunkt, und in ihm auf OT, OT' resp. die Perpendikel OM, OM' errichtet, welche die Aeste in M, M' schneiden (Taf. V. Fig. 4.). In den Winkelräumen MOT', $M'OT$ werden dann unendlich viele Paare auf einander senkrechter Durchmesser möglich sein, welche die Kurve zugleich treffen. Wächst der eine halbe Durchmesser ON ins Unendliche, so nähert sich der andere offenbar der Grenze OM, und die Gleichung 20. geht dann über in

21. $$\left(\frac{1}{OM}\right)^2 = \left(\frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{b}\right)^2,$$

d. h. bei einer Hyperbel, deren Asymptotenwinkel stumpf, ist das Quadrat des reciproken Werths desjenigen Perpendikels, welches man im Mittelpunkte auf eine Asymptote bis zum Durchschnitt mit dem einen Ast gezogen hat, dem Quadratunterschiede der reciproken Werthe der halben Axen gleich.

Anmerkung 2. Aus dem obigen Theorem lässt sich noch ein für die Ellipse und Hyperbel zugleich geltender Satz ableiten.

Es seien OD, OD' (Taf. V. Fig. 5.) zwei beliebige auf einander senkrechte Durchmesser, O der Mittelpunkt, DD' die Verbindungslinie der Endpunkte der Durchmesser. Es ist $OD = x'$, $OD' = y'$. Nun hat man $\left(\frac{1}{x'}\right)^2 + \left(\frac{1}{y'}\right)^2 = \frac{x'^2 + y'^2}{(x'y')^2} = \frac{OD^2 + OD'^2}{(OD \cdot OD')^2}$; ist h' die Länge des von O auf DD' gefällten Perpendikels, so ist $OD \cdot OD' = DD' \cdot h'$, $(OD \cdot OD')^2 = (OD^2 + OD'^2)\, h'^2$, folglich $\frac{x'^2 + y'^2}{(x'y')^2} = \frac{1}{h'^2}$, und daraus der Satz:

Die Entfernung des Mittelpunkts einer Ellipse oder Hyperbel von der Sehne, welche die Endpunkte zweier auf einander senkrechten halben Durchmesser verbindet, ist eine constante Grösse.

XXXIX.

Ueber die natürliche Winkeleinheit in der analytischen Goniometrie und über die Ausmerzung des Kreisbogens aus den wissenschaftlich-geometrischen Erforschungen der Winkel.

Von dem

Herrn Dr. Wilh. Matzka,

Professor der Mathematik zu Tarnow in Galizien.

I.

Einleitung.

1. Die analytische Goniometrie, vornehmlich die höhere in der Differential- und Integralrechnung, pflegt durchgängig da, wo Rechnungsverbindungen zwischen Winkelfunctionen und ihren Winkeln selbst vorkommen, die Zahlwerthe der Winkel durch die Zahlwerthe der die Winkel bestimmenden Kreisbogen zu ersetzen, indem sie diese durch ihren Halbmesser ausmisst, weil so die Rechnungsformeln am einfachsten ausfallen. Eigentlich nimmt sie — was freilich fast nirgends in den Lehrbüchern der Analysis gesagt wird — denjenigen Winkel zur Messeinheit, dessen bestimmender Kreisbogen die Länge seines Halbmessers hat.

2. Solches Hin- und Herspringen vom Winkel zum Bogen und vom Bogen zum Winkel, wo man es doch nur mit Einer dieser zwei wesentlich von einander verschiedenen Art von Grössen zu thun haben will, kann von einer unbefangenen Kritik der wissenschaftlichen Geometrie durch die allerdings hochpreisliche und für die angewandte Geometrie bei der Messung und Zeichnung von Winkeln unschätzbare Proportionalität der Winkel und ihrer Kreisbogen durchaus nicht gerechtfertigt werden; immer wird solches Durcheinandermengen ungleichartigen Grössen nur als Krücke angesehen werden müssen, deren sich die Wissenschaft gewiss entledigen wird, sobald sie auf sicherem Fusse einherzugehen sich im Stande fühlen wird.

3. Am meisten lag mir in der, von mir aufgestellten Fundamentallehre der Geometrie daran, die Elemente *) aller Raumgebilde, nemlich die Strecken und Winkel sowohl einzeln als mit einander verbunden, und auf einander einwirkend, vollständig und dermassen durch sie allein zu erforschen, dass an solche niedere Goniometrie die höhere unmittelbar, ohne Dazwischentreten der Lehre von der Kreislinie, sich anschliessen könne. Nach vielem Sinnen gelang mir dies im Jänner des Jahres 1841, wo ich entdeckte, dass der oben beschriebene, als natürliche Winkelmesseinheit der analytischen Goniometrie dienende Winkel auch die Grenze ist, welcher diejenigen Winkel zugleich ohne Ende sich nähern, die sich bei der Theilung eines unendlich abnehmenden Winkels einerseits durch seinen Sinus, andererseits durch seine Tangente als Quotienten ergeben. Dadurch erst wurde meine geometrische Fundamentallehre in sich selbst vollkommen abgeschlossen. Ich hoffe, die Darstellung dieses neuartigen Gegenstandes werde den Geometern nicht unwillkommen sein.

V.

Proportionalität unendlich abnehmender Winkel zu ihren Sinus und Tangenten; und Grenze der Quotienten eines unendlich abnehmenden Winkels durch dessen Sinus und Tangente.

4. Nähert sich der ablenkende Endschenkel eines Winkels α dem Anfangsschenkel unendlich, d. i. nimmt der Winkel α unendlich ab und nähert sich so seiner Grenze 0 ohne Ende, so nähern sich auch seine goniometrischen Functionen den gleichnamigen des Winkels 0 als ihren Grenzen unendlich; folglich sein Cosinus ohne Ende wachsend der Grenze 1, sein Sinus und seine Tangente aber, unendlich abnehmend, der gemeinschaftlichen Grenze 0.

In Zeichen: für $\lim \alpha = 0$ ist $\lim \cos\alpha = 1$, $\lim \sin\alpha = 0$, $\lim \tang\alpha = 0$.

5. Bei dieser gleichzeitigen unendlichen Abnahme des Winkels α, seines Sinus und seiner Tangente tritt jedoch der höchst merkwürdige Umstand ein, dass dieselbe nahe und desto genauer in gleichem Verhältnisse oder in directer Proportionalität dieser dreierlei Grössen erfolgt, je kleiner sie insgesammt schon geworden sind, nemlich, dass dem Verhältnisse jeder zwei schon hinreichend kleiner Winkel das Verhältniss sowohl ihrer Sinus als ihrer Tangenten sehr nahe und um so genauer gleich wird, je näher beide Winkel an ihrem gänzlichen Verschwinden stehen.

6. Seien, um dies zu beweisen, α und ϵ zwei einstimmige (zugleich positive oder zugleich negative) und schon so kleine Winkel, dass in den bekannten Gleichungen

*) Vergleiche meinen obigen Aufsatz Nro. XXXIV.

$$\sin(\alpha+\alpha') = \sin\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha'\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tang}(\alpha+\alpha') = \frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\alpha'}{1 - \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\alpha'}$$

die Cosinus positiv und die Tangenten bereits kleiner als 1 ausfallen, wozu die Winkel einzeln kleiner als ein halber rechter sein müssen.

Um Doppelvergleichungen — das nach Umständen Grösser- oder Kleinersein — zu vermeiden, und weil hier mit den Winkeln ihre Sinus und Tangenten einstimmig sind, mögen die Winkel so wie ihre Functionen nur absolut — weder positiv noch negativ — betrachtet werden.

Nehmen nun die Winkel α, α' nach und nach ohne Ende ab, was durch

$$\lim.\ (\alpha, \alpha') \doteq 0$$

angedeutet werden soll; so nehmen auch ihre Sinus und Tangenten eben so ab, ihre Cosinus dagegen wachsen allmälig bis auf 1, so dass man hat:

$$\lim.\ (\cos\alpha, \cos\alpha') \doteq 1, \quad \lim.\ (\sin\alpha, \sin\alpha') \doteq 0,$$

$$\lim.\ (\operatorname{tang}\alpha, \operatorname{tang}\alpha') \doteq 0.$$

Dann ist, wenn man in der ersten Gleichung $\cos\alpha$, $\cos\alpha'$ durch die gewöhnlich grössere und nur ausnahmsweise am Ende eben so grosse Zahl 1, dagegen im Nenner der zweiten Gleichung die $\operatorname{tang}\alpha$, $\operatorname{tang}\alpha'$ durch die gewöhnlich kleinere und nur ausnahmsweise am Ende eben so grosse Zahl 0 ersetzt,

$$\lim.\ \sin(\alpha+\alpha') \doteq \sin\alpha + \sin\alpha',$$

$$\lim.\ \operatorname{tang}(\alpha+\alpha') \doteq \operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\alpha'.$$

Mit den hinreichend abnehmenden Winkeln stehen demnach nicht blos ihre Sinus, sondern auch ihre Tangenten, dermassen in Verbindung, dass zur Summe jeder zweier Winkel desto genauer nicht nur die Summe ihrer Sinus, sondern auch die Summe ihrer Tangenten gehört, je kleiner diese Winkel sind. Folglich sind den hinreichend kleinen Winkeln sowohl ihre Sinus als auch ihre Tangenten direct proportionirt.

7. Nemlich für die kleinsten Winkel ist, wenn wir die angenäherte Gleichheit durch $=$ andeuten,

$$\alpha : \alpha' = \sin\alpha : \sin\alpha' = \operatorname{tang}\alpha : \operatorname{tang}\alpha',$$

oder auch:

$$\frac{\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\alpha'}{\sin\alpha'} \text{ und } \frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha} = \frac{\alpha'}{\operatorname{tang}\alpha'},$$

h. der Quotient jedes hinreichend kleinen Winkels urch seinen Sinus oder durch seine Tangente ist fast uz unveränderlich, oder bei unendlich abnehmendem Winkel nähert sich bei der Theilung des Winkels soohl durch seinen Sinus als auch durch seine Tangente er Quotient, welcher also, weil die Winkelfunctionen Zahlen nd, wieder ein Winkel ist, einer fixen Grenze, die demnach benfalls ein Winkel sein muss.

8. Beide diese veränderlichen Quotienten streben ber der nemlichen Grenze zu.

Denn wegen $\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ist $\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha} = \frac{\alpha}{\sin\alpha}\cos\alpha$, also

$\frac{\alpha}{\operatorname{ang}\alpha} : \frac{\alpha}{\sin\alpha} = \cos\alpha$; folglich, weil für $\lim\alpha \geqq 0$, $\lim\cos\alpha \leqq 1$ ist,

uss $\lim\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha} : \lim\frac{\alpha}{\sin\alpha} \leqq 1$, also $\lim\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha} \leqq \lim\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ sein.

9. Bezeichnen wir nun mit Γ den Winkel, der den Quotienten $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ und $\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}$ als gemeinschaftliche Grenze vorgesteckt ist, so aben wir

$$\lim\frac{\alpha}{\sin\alpha} = \Gamma = \lim\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

III.

Der erste Quotient nähert sich abnehmend, der zweite wachsend ihrer gemeinschaftlichen Grenze.

10. Höchst wichtig ist die Frage, wie diese beiden veränderlichen Quotienten ihrer gemeinsamen Grenze Γ zustreben, ob wachsend oder abnehmend. Darüber geben obige Vergleichungen in 6.) Aufschluss. Denn ersetzt man in ihnen erst α' durch $\alpha+\alpha''$, dann α'' durch $\alpha''+\alpha'''$, nachher wieder α''' durch $\alpha'''+\alpha^{IV}$ u. s. f., so findet man

$$\sin(\alpha+\alpha'+\alpha''+\alpha'''+\ldots) \leqq \sin\alpha+\sin\alpha'+\sin\alpha''+\sin\alpha'''+\ldots,$$

$$\operatorname{tang}(\alpha+\alpha'+\alpha''+\alpha'''+\ldots) \geqq \operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\alpha'+\operatorname{tang}\alpha''+\operatorname{tang}\alpha'''+\ldots;$$

und wenn man hierin alle Winkel gleich werden lässt:

$$\sin n\alpha \leqq n\sin\alpha, \quad \operatorname{tang} n\alpha \geqq n\operatorname{tang}\alpha.$$

Theilt man hiedurch den Winkel $n\alpha$, so findet man

$$\frac{n\alpha}{\sin n\alpha} \gtrless \frac{\alpha}{\sin\alpha}, \quad \frac{n\alpha}{\operatorname{tang} n\alpha} \lessgtr \frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}$$

Sinkt demnach der Winkel auf einen vielten (aliquoten) Theil seiner selbst herab, so muss sein Quotient durch den Sinus abnehmen, jener durch die Tangente wachsen.

Der Quotient eines unendlich abnehmenden Winkels durch seinen Sinus / seine Tangente nähert sich also im Abnehmen / Wachsen der ihnen beiden gemeinschaftlichen Grenze, wenigstens dann, wenn der Winkel jedesmal auf einen vielten Theil seiner selbst, insbesondere also in einer geometrischen Reihe abnimmt.

II. Ganz allgemein führt man aber die Untersuchung, indem man durch obige Vergleichungen (in 6.) die Winkelsumme $\alpha+\alpha'$ theilt, wodurch man zunächst

$$\frac{\alpha+\alpha'}{\sin(\alpha+\alpha')} \gtrless \frac{\alpha+\alpha'}{\sin\alpha+\sin\alpha'}, \quad \frac{\alpha+\alpha'}{\operatorname{tang}(\alpha+\alpha')} \lessgtr \frac{\alpha+\alpha'}{\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\alpha'}$$

erhält. Die zweiten Quotienten sind aber bekanntlich eigenthümliche (zusammengesetzte arithmetische) Mittel, folglich ist

$$\frac{\alpha+\alpha'}{\sin(\alpha+\alpha')} \gtrless \operatorname{Med}\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha}, \frac{\alpha'}{\sin\alpha'}\right),$$

$$\frac{\alpha+\alpha'}{\operatorname{tang}(\alpha+\alpha')} \lessgtr \operatorname{Med}\left(\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}, \frac{\alpha'}{\operatorname{tang}\alpha'}\right).$$

Soll aber der erstartige / zweitartige der Winkelsumme $\alpha+\alpha'$ angehörige Quotient grösser / kleiner sein als das Mittel der den beiden Theilen α und α' entsprechenden Quotienten, so muss er, da alle diese Quotienten absolute Grössen sind, auch gewiss grösser / kleiner sein als einer (der kleinere / „ grössere) der beiden letzteren Quotienten, folglich entweder zwischen sie beide hineinfallen oder auch noch grösser / kleiner sein als der andere.

Jenes Dazwischenfallen ist jedoch unmöglich. Denn da die Summe $\alpha+\alpha'$ grösser als jeder ihrer Theile α und α' ist, so müsste bei abnehmendem Winkel jeder solche Quotient bald abnehmen, bald wachsen. Allein die Theile dieser Winkelsumme, d. h. die Abnahmen des veränderlichen Winkels, können beliebig klein, mithin auch so klein angenommen werden, dass derlei abwechselndes Zu- und Abnehmen des Quotienten endlich einmal aufhört und daher nur ununterbrochenes Zu- oder Abnehmen eintritt.

Mithin muss der $\begin{matrix}\text{erstartige}\\ \text{zweitartige}\end{matrix}$ der Winkelsumme $\alpha+\alpha'$ entsprechende Quotient $\begin{matrix}\text{grösser}\\ \text{kleiner}\end{matrix}$ sein als jeder einzelne der den beiden Theilen α und α' entsprechenden Quotienten; nemlich weil $\alpha+\alpha'$ (α, α') ist, muss sein:

$$\frac{\alpha+\alpha'}{\sin(\alpha+\alpha')} \gtrless \left(\frac{\alpha}{\sin\alpha}, \frac{\alpha'}{\sin\alpha'}\right),$$

$$\frac{\alpha+\alpha'}{\operatorname{tang}(\alpha+\alpha')} \lessgtr \left(\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}, \frac{\alpha'}{\operatorname{tang}\alpha'}\right).$$

12. Der Quotient eines bereits hinreichend kleinen und noch immer weiter abnehmenden Winkels durch $\begin{matrix}\text{seinen Sinus}\\ \text{seine Tangente}\end{matrix}$ muss demnach $\begin{matrix}\text{abnehmen}\\ \text{wachsen}\end{matrix}$, und fortwährend $\begin{matrix}\text{grösser}\\ \text{kleiner}\end{matrix}$ sein als die gemeinschaftliche Grenze beider Quotienten, nemlich für $\lim \alpha \gtrless 0$ ist

$$\lim \frac{\alpha}{\sin\alpha} \gtrless \Gamma \lessgtr \lim \frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha},$$

und für hinreichend kleine Winkel α ist

$$\frac{\alpha}{\sin\alpha} > \Gamma > \frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

13. Die letzte Vergleichung lässt sich sogleich benützen, um zwei ausgezeichnete einschliessende Grenzen für den Grenzwinkel Γ aufzustellen. Setzt man nemlich $\alpha = \frac{1}{2}R$, so ist $\operatorname{tang}\alpha = 1$; und setzt man $\alpha = \frac{1}{3}R$, so ist $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; daher findet man

$$\tfrac{1}{3}R < \Gamma < \tfrac{2}{3}R.$$

Der Grenzwinkel Γ ist demnach ein spitziger zwischen der Hälfte und zwei Drittheilen des rechten Winkels, oder zwischen 45 und 60 Grad liegender Winkel.

Benennung des Grenzwinkels.

14. Dieser Winkel muss wegen seiner engsten Verknüpfung mit den Winkelfunctionen nothwendig in vielerlei weiteren Forschungen der Goniometrie vorkommen, und weil er als eine fixe Grenze mit einer bestimmten — sogleich genügend scharf zu ermittelnden — Grösse begabt ist, gleich jedem andern bestimmten Winkel zur Messung der Winkel geeignet sein. Desswegen verdient er gewiss durch eine eigenthümliche Benennung ausgezeichnet zu werden. Ich glaube zu einer solchen lieber ein Nennwort als ein Eigenschaftswort in Antrag bringen zu sollen; theils

wegen der wünschenswerthen Kürze, theils weil man auch der gewöhnlichen Winkeleinheit, dem neunzigsten Theile des rechten Winkels, den einsilbigen Namen Grad (franz. degré) beigelegt hat. Darum schlage ich vor, ihm den kurzen altdeutschen Namen „der Gehren" zu geben *). Denn dieser Winkel ist, wie wir so eben nachgewiesen haben, ein mittlerer spitziger, und der Gehren heisst (landschaftlich) ein spitziges Werkzeug, besonders ein Pfeil, Spiess, Speer, ferner ein spitz zulaufendes Stück Land, ein keilförmiger Streifen Zeug, Keil in Hemden, Zwickel in Strümpfen (franz. le chanteau, engl. goar); daher auch das Gehrmaass oder -holz, bei Holzarbeitern ein Richtscheit mit einem nach einem Winkel von 45 Graden abgeschrägten Querbrettchen zum Vorzeichnen einer schrägen Richtung, die sie eine Gehre oder Gehrung nennen **).

IV.

Berechnung des Gehrens.

15. Sei wieder α ein genügend kleiner absoluter Winkel. Um die Grössen der Winkel $\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}$ und $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ schätzen zu können, vergleichen wir sie mit einem bereits festbestimmten Winkel, am angemessensten mit dem, ganz natürlich gleich am Anfange der Lehre von den Winkeln sich aufdringenden, gestreckten Winkel, den man jetzt schon gern mit G zu bezeichnen pflegt. Ihre Verhältnisse zu diesem oder ihre Maasse, Maasszahlen, Zahlwerthe, wenn sie durch ihn ausgemessen werden, mögen durch p und q bezeichnet werden, so dass man hat

$$\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha} : G = p, \quad \frac{\alpha}{\sin\alpha} : G = q.$$

16. Dann geben die obigen Vergleichungen (in 12.) durch G getheilt

$$p \leq \frac{\Gamma}{G} \leq q \quad \text{und}$$

$$\lim p \leq \frac{\Gamma}{G} \leq \lim q.$$

Das Verhältniss $\frac{\Gamma}{G}$ des Gehrens Γ zum gestreckten Winkel G liegt also zwischen zwei zu einerlei Winkel α gehörigen Zahlen p und q; von denen, bei unendlich abnehmendem Winkel α, die erstere wachsend, die andere abnehmend, diesem Verhältnisse als ihrer gemeinsamen Grenze ohne Ende zustrebt.

---

*) Wie ich bereits in einer Note zu meinem Aufsatze im Archiv. Theil 6. Heft. 2. Seite 120. gethan habe.

**) Vergleiche die Wörterbücher von Adelung, Heinsius, Heyse, u. a.

17. Setzen wir nun den Winkel α auf seine Hälfte, $\frac{1}{2}\alpha$, herab, so mögen die aus ihr hervorgehenden Winkel $\frac{\frac{1}{2}\alpha}{\text{tang}\frac{1}{2}\alpha}$ und $\frac{\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$ zum gestreckten Winkel die Verhältnisse p_1 und q_1 haben, so dass man habe

$$\frac{\frac{1}{2}\alpha}{\text{tang}\frac{1}{2}\alpha} : G = p_1, \quad \frac{\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha} : G = q_1.$$

Sind nun für einen gewissen Winkel α seine Functionen sin und tang bekannt, daher auch beide Zahlen p und q bestimmbar, so lassen sich aus ihnen auch die dem halben Winkel $\frac{1}{2}\alpha$ zukommenden ähnlichen Zahlen p_1 und q_1 äusserst leicht berechnen. In der That, obige Gleichungen geben auf der Stelle

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\alpha}{pG}, \quad \sin\alpha = \frac{\alpha}{qG};$$

und wenn man diese Gleichung durch jene theilt:

$$\cos\alpha = \frac{p}{q};$$

daher in gleicher Weise

$$\text{tang}\frac{1}{2}\alpha = \frac{\frac{1}{2}\alpha}{p_1 G}, \quad \sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{\frac{1}{2}\alpha}{q_1 G},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{p_1}{q_1}.$$

Ferner können von den zwischen den goniometrischen Functionen des ganzen und halben Winkels bestehenden Beziehungsgleichungen hier am besten folgende zwei benützt werden:

$$\cos\alpha = 2\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 - 1, \quad \sin\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Denn die Substitution obiger Ausdrücke für die Winkelfunctionen verwandelt diese Gleichungen in

$$\frac{p}{q} = 2\frac{p_1^2}{q_1^2} - 1, \quad \frac{1}{q} = \frac{p_1}{q_1^2}.$$

Theilt man nun die erste Gleichung nach Uebertragung des Gliedes -1 durch die zweite und durch 2, so findet man sogleich für p_1 den höchst einfachen Ausdruck

$$p_1 = \frac{p+q}{2},$$

und die zweite Gleichung gibt dazu

$$q_1^2 = q p_1 \quad \text{oder} \quad q_1 = \sqrt{q p_1}.$$

Es ist also p_1 das arithmetische Mittel (die halbe Summe) von p und q; und q_1 das geometrische Mittel (die zweite Wurzel aus dem Producte) von q und p_1.

Weil der Winkel α einen rechten nicht übersteigt, so sind seine Functionen allesammt positiv, folglich wegen $\cos\alpha = \frac{p}{q} < 1$ sicher $p < q$. Daher ist auch $p < p_1 < q$ und $p_1 < q_1 < q$, also im Zusammenhange $p < p_1 < q_1 < q$.

18. Will man nun diese Halbirung des Winkels α hinreichend oft wiederholen, und aus den, für einen gewissen Winkel geltenden bekannten Verhältnissen p und q zu den nach und nach sich ergebenden Winkeln

$$\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2^2}, \frac{\alpha}{2^3}, \ldots$$

die ähnlichen Verhältnisse

$$p_1 q_1, \; p_2 q_2, \; p_3 q_3, \; \ldots$$

also in Gesammtheit die Zahlenreihe

$$p, q; \; p_1, q_1; \; p_2, q_2; \; p_3, q_3; \; \ldots$$

aufstellen, so wird man vom dritten Gliede an jedes nachkommende wie folgt berechnen.

Zu den bekannten zwei Anfangsgliedern p, q rechnet man ihr arithmetisches Mittel p_1 und schreibt es als drittes Glied an. Darauf berechnet man von den jetzigen zwei Schlussgliedern q, p_1 das geometrische Mittel q_1, und setzt es als viertes Glied an. Und in dieser Weise rechnet man fortwährend von den jedesmaligen zwei Schlussgliedern abwechselnd das arithmetische und geometrische Mittel und schreibt dieses als unmittelbar nachfolgendes Glied an.

Bei einer solchen Reihe fällt jedes spätere Glied zwischen die zwei ihm zunächst vorangehenden, also auch zwischen jedwede zwei unmittelbar auf einander folgende frühere Glieder. Desswegen müssen die Glieder einer derartigen Reihe einer gewissen gemeinschaftlichen Grenze zustreben, der sie desto näher liegen, je spätere sie sind, und welche zwischen jeden zwei benachbarten Gliedern liegt. Darum sind auch die gemeinschaftlichen Anfangsziffern jeder zwei decimal ausgedrückten Nachbarglieder auch die Anfangsziffern der decimal dargestellten Grenze, hier des Verhältnisses des Gehrens zum gestreckten Winkel.

19. Die Rechnung anlangend, so lässt sich noch bemerken, dass man anstatt des geometrischen Mittels zweier nur wenig von einander unterschiedenen Zahlen ihr arithmetisches Mittel nehmen könne, und zwar dann schon gewiss, wenn diese Zahlen, in Decimalen ausgedrückt, wenigstens in halb

vielen Anfangsziffern übereinstimmen, als in wie vielen man as geometrische Mittel berechnen will. Denn sei δ der Unterschied zweier absoluten Zahlen a und b, von denen $a > b$ ist, emlich

$$\delta = a - b.$$

un ist bekanntlich

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab,$$

also

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab \text{ und } \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab},$$

d. h. das arithmetische Mittel zweier Zahlen ist jedenfalls grösser als ihr geometrisches.

Sei d der Unterschied und m das arithmetische Mittel dieser zwei Mittel, also

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = d,$$

$$\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab} = 2m,$$

so ist

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = 2dm;$$

folglich nach dem Obigen $2dm = \left(\frac{\delta}{2}\right)^2$. Daraus ergibt sich

$$d = \frac{\delta^2}{8m}$$

und sofort

$$\frac{d}{m} = \frac{1}{8}\left(\frac{\delta}{m}\right)^2.$$

Stimmen nun die Zahlen a und b, also auch ihr Mittel m in obersten Ziffern überein, so beginnt der in einen Decimalbruch verwandelte Quotient $\frac{\delta}{m}$ an der $n$ten Decimalstelle mit einer von Null verschiedenen (geltenden) Ziffer, folglich seine zweite Potenz in der $2n$ten Decimalstelle, wenigstens mit 1 und höchstens mit 9, und also ihr 8ter Theil oder der Quotient $\frac{d}{m}$ spätestens an der $(2n+1)$ten Decimalstelle mit einer geltenden Ziffer oder an der $2n$ten Decimalstelle höchstens mit 12. Mithin beginnt der dem Quotienten $\frac{d}{m}$ gleiche Decimalbruch frühestens an der $(2n-1)$ten Decimalstelle und da höchstens mit 1, gewöhnlich aber erst an der $2n$ten und spätestens an der $(2n+1)$ten Decimalstelle. Folglich

stimmen das arithmetische und geometrische Mittel $\frac{a+b}{2}$ und $\sqrt{ab}$, und also auch ihr eigenes arithmetisches Mittel wenigstens in $2n-1$, gewöhnlich in $2n$, und höchstens in $2n+1$ obersten oder Anfangsziffern überein.

Begehrt man demnach das geometrische Mittel der Zahlen a und b in p obersten Ziffern genau, so muss sein, $2n+(-1, 0, +1) = p$; also ist $n = \frac{p+(1,0,-1)}{2}$, nemlich n wenigstens die kleinere, meistens aber die grössere Hälfte von p, wenn p ungerad, dagegen die genaue Hälfte, wenn p gerad ist. Z. B. für $p=7$ ist $n=4$ oder 3; für $p=8$ ist $n=4$.

Man kann demnach das geometrische Mittel zweier Zahlen durch ihr leichter zu berechnendes arithmetisches dann schon ganz gewiss ersetzen, wenn die zwei Zahlen entweder in der genauen oder grösseren Hälfte der Anzahl Ziffern übereinstimmen, in der man das Mittel zu berechnen beabsichtigt.

20. Ist man sonach in der aufzustellenden Zahlenreihe (Art. 18.) so weit vorgerückt, dass zwei Glieder in der ersten oder grösseren Hälfte der Ziffern, in der man die Glieder insgesammt berechnet, übereinstimmen; so hat man fortan von den jedesmaligen zwei Schlussgliedern nur immer ihr arithmetisches Mittel zu rechnen und als nächst kommendes Glied anzusetzen. Allein die Grenze einer nach diesem Bildungsgesetze der einzelnen Glieder aufzustellenden Reihe lässt sich ganz einfach durch die beiden gegebenen Anfangsglieder der Reihe ausdrücken.

Denn sind a und b diese Anfangsglieder, so findet man für die weiteren Glieder folgende Ausdrücke:

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2},$$

$$\frac{a}{2^2} + \frac{b}{2} + \frac{b}{2^2},$$

$$\frac{a}{2^2} + \frac{a}{2^3} + \frac{b}{2} + \frac{b}{2^3},$$

$$\frac{a}{2^2} + \frac{a}{2^4} + \frac{b}{2} + \frac{b}{2^3} + \frac{b}{2^4},$$

$$\frac{a}{2^2} + \frac{a}{2^4} + \frac{a}{2^5} + \frac{b}{2} + \frac{b}{2^3} + \frac{b}{2^5},$$

$$\frac{a}{2^2} + \frac{a}{2^4} + \frac{a}{2^6} + \frac{b}{2} + \frac{b}{2^3} + \frac{b}{2^5} + \frac{b}{2^6},$$

u. s. w.

Demnach ist von diesen das $2r$te Glied

$$= \frac{a}{2^2} + \frac{a}{2^4} + \frac{a}{2^6} + \cdots + \frac{a}{2^{2r}} + \frac{b}{2} + \frac{b}{2^3} + \frac{b}{2^5} \cdots + \frac{b}{2^{2r-1}} + \frac{b}{2^{2r}}$$

und das $(2r+1)$te

$$= \frac{a}{2^2} + \frac{a}{2^4} + \frac{a}{2^6} + \ldots + \frac{a}{2^{2r}} + \frac{a}{2^{2r+1}} + \frac{b}{2} + \frac{b}{2^3} + \frac{b}{2^5} + \ldots + \frac{b}{2^{2r+1}},$$

also, wenn man diese geometrischen Reihen in umgekehrter Folge summirt,

$$\text{jenes Glied} = \frac{a - \frac{a}{2^{2r}} + 2b - \frac{b}{2^{2r-1}}}{3} + \frac{b}{2^{2r}},$$

$$\text{und dieses} = \frac{a - \frac{a}{2^{2r}} + 2b - \frac{b}{2^{2r+1}}}{3} + \frac{a}{2^{2r+1}}.$$

Mithin ist die gemeinsame Grenze, welcher sämmtliche Glieder zustreben, oder der die Reihe zustrebt,

$$= \frac{a+2b}{3} = b + \frac{a-b}{3} = b - \frac{b-a}{3},$$

nemlich gleich dem zweiten Gliede mehr oder weniger dem Drittel des Unterschiedes beider Anfangsglieder, je nachdem das erste oder zweite Glied das grössere von beiden ist.

21. Sonach braucht man die Glieder der Zahlenreihe (in 18.) dadurch, dass man abwechselnd das arithmetische und geometrische Mittel nimmt, nur so weit zu berechnen, bis einmal die beiden Schlussglieder in der ersten oder grösseren Hälfte der für alle Glieder festgesetzten Ziffermenge übereinstimmen, oder vielmehr, bis ihr geometrisches Mittel mit ihrem arithmetischen übereinstimmt; da man dann aus diesen zwei Schlussgliedern höchst leicht die Grenzzahl, nemlich das Verhältniss des Gehrens zum gestreckten Winkel, berechnen kann. Bedient man sich der Logarithmen, so kann man aus den Logarithmen der einander schon sattsam genäherten Glieder auf gleiche Weise den Logarithmen der fraglichen Grenze berechnen; weil der Logarithme des geometrischen Mittels zweier Zahlen das arithmetische Mittel der Logarithmen dieser Zahlen ist.

22. Zu Winkeln, deren goniometrische Functionen leicht angebbar sind, und mit denen man die hier beschriebene Rechnung anheben kann, eignen sich am besten diejenigen vielten Theile des gestreckten Winkels, deren Nenner die kleinsten Primzahlen, 2 und 3 sind, d. i. die Hälfte und das Drittel des gestreckten Winkels. Denn für

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\, G = R \text{ ist } \cos\alpha = 0,\ \sin\alpha = 1,\ \operatorname{tang}\alpha = \tfrac{1}{0},$$

$$\text{also } p = 0,\ q = \tfrac{1}{2} = 0{\cdot}5;$$

und für

$\alpha = \frac{1}{3}G = \frac{2}{3}R$ ist $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{3}$;

$$\text{daher } p = \frac{1}{3\sqrt{3}},\quad q = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

23. Legt man nun *erstens* die Hälfte des gestreckten Winkels zu Grunde, so erhält man folgende Tafel zusammengehöriger Werthe:

Anzahl der Winkelhalbirungen.	$G:\alpha$ d. i. der Winkel α ist der ...te Theil des gestreckten	p	q	$\log p$	$\log q$
0	2	0	0·5	.	9·6989700
1	4	0·25	0·3535534	9·3979400	9·5484550
2	8	0·3017767	0·3266407	9·4796857	9·5140700
3	16	0·3142087	0·3203643	9·4972181	9·5056442
4	32	0·3172865	0·3188217	9·5014516	9·5035479
5	64	0·3180541	0·3184376	9·5025010	9·5030244
6	128	0·3182458	0·3183417	9·5027627	9·5028935

Nun fällt bereits das geometrische Mittel 0·3183417 der beiden nächst früheren Glieder mit ihrem arithmetischen überein *), daher lässt sich das Verhältniss $\frac{\Gamma}{G}$ und sein Logarithme aus den zwei Schlussgliedern wie folgt berechnen.

Vorletztes Glied	0·3182458,	sein Logarithme	9·5027627
Letztes „	0·3183417	„ „	9·5028935
Unterschied	959		1308
Dessen Drittel	320		436
Dieses ab vom Letzten			

Daher die Grenze $\frac{\Gamma}{G} = 0{\cdot}3183097$ und $\log\frac{\Gamma}{G} = 9{\cdot}5028499$

24. Geht man aber *zweitens* von dem Drittel des gestreckten Winkels aus, so findet man folgende Tafel zusammengehöriger Werthe:

*) Hier ist $\delta = 0{\cdot}0001919$, $m = 0{\cdot}318\ldots$, also $\frac{\delta}{m} = 0{\cdot}00060\ldots$ und $\frac{\delta}{m} = 0{\cdot}000000015\ldots$

Anzahl der Winkelhalbirungen.	$G:\alpha$ d. h. der Winkel α ist der ... Theil des gestreckten	p	q	$\log p$	$\log q$
0	3	0·1924501	0·3849002	9·2843181	9·5853481
1	6	0·2886751	0·3333333	9·4604094	9·5228787
2	12	0·3110042	0·3219752	9·4927663	9·5078225
3	24	0·3164897	0·3192207	9·5003596	9·5040910
4	48	0·3178552	0·3185372	9·5022293	9·5031602
5	96	0·3181962	0·3183666	9·5026949	9·5029275
6	192	0·3182814	0·3183240	9·5028112	9·5028693

Nun kommt schon das geometrische Mittel 0·3183240 der beiden Vorläufer mit ihrem arithmetischen überein *). Daher findet man das Verhältniss $\frac{\Gamma}{G}$ und seinen Logarithmen aus den zwei letzten Gliedern auf folgende Weise:

Letztes	Glied 0·3183240,	sein Logarithme	9·5028693
Vorletztes	„ 0·3182814	„ „	9·5028112
Unterschied	 426	. . . .	581
Dessen Drittel	 142	. . . .	194
Dieses ab von dem Letzten			

bleibt die Grenze $\frac{\Gamma}{G} = 0{\cdot}3183098$ und $\log \frac{\Gamma}{G} = 9{\cdot}5028499$.

25. Es ist demnach mit einer geringen Unsicherheit der letzten Decimalziffer

das Verhältniss $\frac{\Gamma}{G} = 0{\cdot}3183098$

und sein Logarithme $\log \frac{\Gamma}{G} = 9{\cdot}5028499$.

Führt man die Rechnung in mehr Decimalen aus, so findet man

$$\frac{\Gamma}{G} = 0{\cdot}31830\ 98861\ 83790$$

$$\log \frac{\Gamma}{G} = 9{\cdot}50285\ 01273\ 05866.$$

*) Hier hat man $\delta = 0{\cdot}0000852$, $m = 0{\cdot}318$, also $\frac{\delta}{m} \leq 0{\cdot}00027$ und $\frac{d}{m} \leq 0{\cdot}0000000091$.

Daher ist der Gehren

$\Gamma = 0.318309886\, G$ in gestreckten Winkeln ausgedrückt

$= 0.636619772\, R$ „ rechten „ „

$= 57.295779^0$ „ Graden „ „

$= 57^0 17' 44{\cdot}806''$ „ Graden, Min. u. Sec. „ „

$= 206264{\cdot}806''$ „ Secunden „ „

V.

Der Gehren als Winkeleinheit. Ludolphische Zahl.

26. Da der Gehren ein bestimmter Winkel ist, so ist er eben so wie jeder andere bestimmte Winkel, wie der gestreckte und der rechte Winkel und der Grad, zur Messung aller übrigen Winkel geeignet, und sogar in den höheren goniometrischen Rechnungen die gewöhnliche Messeinheit der Winkel.

Nimmt man den Gehren Γ zur Winkeleinheit, so wird der Zahlwerth des gestreckten Winkels, also das Verhältniss $\frac{\Gamma}{G}$ des gestreckten Winkels G zum Gehren Γ, das ist das umgekehrte des früheren Verhältnisses $\frac{\Gamma}{G}$, des Gehrens Γ zum gestreckten Winkel G, von ihrem ersten ausführlichen Berechner Ludolph von Köln die Ludolphische Zahl genannt, und stets mit dem Buchstaben π bezeichnet, also $\frac{G}{\Gamma} = \pi$ gesetzt.

Auf diese Weise ist nach unserem obigen Rechnungsergebnisse

$$\frac{\Gamma}{G} = \frac{1}{\pi} = 0{\cdot}318309886183790$$

$$\log\frac{\Gamma}{G} = \log\frac{1}{\pi} = 9{\cdot}502850127305866,$$

und hieraus folgt durch Umkehrung der Betrag der Ludolphischen Zahl und ihres Logarithmen:

$$\frac{G}{\Gamma} = \pi = 3{\cdot}14159\ 26535\ 89793$$

$$\log\frac{G}{\Gamma} = \log\pi = 0{\cdot}49714\ 98726\ 94133.$$

Durch den Gehren Γ ausgedrückt oder ausgemessen ist demnach

der gestreckte Winkel $G = \pi\Gamma$,

der rechte Winkel $R = \frac{\pi}{2}\Gamma$,

der volle Winkel $2G = 4R = 2\pi\Gamma$,

und der Grad $\frac{G}{180} = \frac{R}{90} = \frac{\pi}{180}\Gamma$.

27. Bisher nahmen wir die Winkel selbst, ungemessen, in Betrachtung und bezeichneten sie durch Buchstaben. Denken wir sie uns nun durch den Gehren ausgemessen und lassen wir die früher gebrauchten Buchstaben α, G, R, Γ gegenwärtig die Zahlwerthe der Winkel vorstellen. Dann ist

der Gehren $\Gamma = 1$,

der gestreckte Winkel $G = \pi$,

der rechte Winkel $R = \frac{\pi}{2}$,

der volle Winkel $4R = 2G = 2\pi$,

der Grad $= \frac{\pi}{180}$.

28. Theilen wir durch die obigen Vergleichungen (in 12.) insgemein den Winkel α, so finden wir für jeden hinreichend kleinen Winkel α

$$\sin\alpha < \frac{\alpha}{\Gamma} < \operatorname{tang}\alpha;$$

und für einen unendlich abnehmenden Winkel α

$$\lim \sin\alpha \leqq \frac{\alpha}{\Gamma} \leqq \lim \operatorname{tang}\alpha.$$

Man ersieht auf den ersten Blick, dass diese Vergleichungen am einfachsten ausfallen, wenn man den Gehren zur Winkeleinheit macht, und diese Buchstaben Γ und α wieder Werthzahlen vorstellen, also $\Gamma = 1$ sein lässt. Denn so erhält man

$$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tang}\alpha,$$

und für $\lim\alpha \geqq 0$

$$\lim \sin\alpha \leqq \alpha \leqq \lim \operatorname{tang}\alpha.$$

Nimmt man demnach den Gehren zur Winkeleinheit, so ist der Zahlwerth jedes spitzen Winkels grösser als sein Sinus und kleiner als seine Tangente;

und bei unendlichem Abnehmen des Winkels nähern sich sein Sinus wachsend, seine Tangente aber abnehmend dem Zahlwerthe des Winkels;

oder bei den kleinsten Winkeln sind die Sinus und Tangenten den Zahlwerthen der Winkel gleich.

Die letzten Grenzgleichungen sind bekanntlich die Grundlage der goniometrischen Differentiations-Gesetze, also auch der Entwickelung der goniometrischen Functionen in Reihen.

29. Andere zuweilen brauchbare Grenzgleichungen ergeben sich, wenn man in den früheren (in 15.) für p und q ihre Ausdrücke und für $\frac{\Gamma}{G}$ auch noch $\frac{1}{\pi}$ einführt. So erhält man

$$\lim \frac{\alpha : G}{\sin \alpha} \leqq \frac{1}{\pi} \leqq \lim \frac{\alpha : G}{\operatorname{tang} \alpha},$$

und wenn man alles umkehrt

$$\lim \frac{\sin \alpha}{\alpha : G} \geqq \pi \geqq \lim \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\alpha : G},$$

oder

$$\lim \left(G : \frac{\alpha}{\sin \alpha}\right) \geqq \pi \geqq \lim \left(G : \frac{\alpha}{\operatorname{tang} \alpha}\right).$$

VI.

Anwendung des Gehrens in der Kreisrechnung.

30. Aus dieser ganzen Darstellung ersieht man nun, dass und wie die gesammte niedere und höhere Goniometrie ohne jene unwissenschaftliche Einmengung des Kreisbogens abgehandelt werden kann. Zum Schlusse soll hier nur noch gewiesen werden, wie die so eben gegebene Lehre vom Gehren sowohl in der Rectification der Kreisbogen und Kreislinien als auch in der Quadratur der Kreisausschnitte und Kreise sich anwenden lässt.

31. Rectification der Kreisbogen und Quadratur der Kreisausschnitte.

Sei a die Länge eines mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreisbogens, α der ihm angehörige Winkel am Mittelpunkte und S der Flächeninhalt des ihm entsprechenden Kreisausschnittes.

Man betrachte vom Winkel α einen beliebigen Theil, halbire ihn, bezeichne eine solche Hälfte mit ω und führe die Sehne des dem vollen Theile 2ω angehörigen Kreisbogens, die dann auf der Halbirungslinie dieses Winkeltheils senkrecht steht und durch sie halbirt wird. Dann kann diese Halbirungslinie an einer jeden solchen Winkelhälfte ω als Anfangsschenkel und Hauptprojectionsaxe angesehen werden. Mithin ist des als Endschenkel von ω vorfindigen Halbmessers r Hauptprojection der Abstand der Sehne vom Mittelpunkte also $r \cos \omega$, und seine Nebenprojection die halbe Sehne daher $= r \sin \omega$; folglich der Flächeninhalt des von diesen drei Strecken gebildeten rechtwinkligen Dreieckes

$$= \tfrac{1}{2} r \cos \omega \, . \, r \sin \omega = \tfrac{1}{2} r^2 \sin \omega \cos \omega = \tfrac{1}{4} r^2 \sin 2\omega.$$

Mithin ist die ganze Sehne $= 2r \sin \omega$ und der Flächeninhalt des von ihr und von den, ihren Grenzpunkten angehörigen Halbmessern begrenzten gleichschenkligen Dreieckes $= \tfrac{1}{2} r^2 \sin 2\omega$.

Theilt man nun den ganzen Winkel in beliebige Theile, deren Hälften der Reihe nach $\omega, \omega', \omega'', \omega'''$... sind, und zieht die den ganzen Theilen $2\omega, 2\omega', 2\omega'', 2\omega'''$... zukommenden Sehnen, so ist die aus ihnen zusammengesetzte, und dem Kreisbogen a eingeschriebene gebrochene Linie

$$= 2r(\sin\omega + \sin\omega' + \sin\omega'' + \sin\omega''' + \ldots),$$

und der Flächeninhalt des von ihr und von den, dem Winkel α als Schenkel dienenden Halbmessern begrenzten, dem Kreisausschnitte S eingeschriebenen Vieleckes

$$= \tfrac{1}{2}r^2(\sin 2\omega + \sin 2\omega' + \sin 2\omega'' + \sin 2\omega''' + \ldots).$$

Lässt man nun sämmtliche Winkeltheile $\omega, \omega', \omega''\ldots$ unendlich abnehmen, so ist der Kreisbogen die Grenze der ihm eingeschriebenen gebrochenen Linie, und der Kreisausschnitt die Grenze des ihm eingeschriebenen Vieleckes, nemlich für

$$\lim(\omega, \omega', \omega''\ldots) = 0$$

ist

$$a = \lim 2r(\sin\omega + \sin\omega' + \sin\omega'' + \ldots),$$

$$S = \lim \tfrac{1}{2}r^2(\sin 2\omega + \sin 2\omega' + \sin 2\omega'' + \ldots).$$

Zur Reduction dieser Ausdrücke multipliciren wir dieselben, weil

$$\alpha = 2\omega + 2\omega' + 2\omega'' + \ldots$$

ist, mit α, und theilen sie durch $2\omega + 2\omega' + 2\omega'' \ldots$. Da erhalten wir

$$a = r\alpha : \lim \frac{\omega + \omega' + \omega'' + \ldots}{\sin\omega + \sin\omega' + \sin\omega'' + \ldots},$$

$$S = \tfrac{1}{2}r^2\alpha : \lim \frac{2\omega + 2\omega' + 2\omega'' + \ldots}{\sin 2\omega + \sin 2\omega' + \sin 2\omega'' + \ldots};$$

oder, weil die vorkommenden Quotienten eigenthümliche Mittel sind:

$$a = r\alpha : \text{Med}\left(\lim\frac{\omega}{\sin\omega}, \lim\frac{\omega'}{\sin\omega'}, \lim\frac{\omega''}{\sin\omega''}, \ldots\right),$$

$$S = \tfrac{1}{2}r^2\alpha : \text{Med}\left(\lim\frac{2\omega}{\sin 2\omega}, \lim\frac{2\omega'}{\sin 2\omega'}, \lim\frac{2\omega''}{\sin 2\omega''}, \ldots\right).$$

Alle diese Quotienten haben aber nach dem oben Erwiesenen eine gemeinschaftliche Grenze, nemlich den Gehren T; daher ist diesem auch ihr Mittel gleich, und sofort erhält man die Länge des Kreisbogens

$$a = r\frac{\alpha}{T}.$$

und den Flächeninhalt des Kreisausschnittes

$$S = \tfrac{1}{2} r^2 \frac{\alpha}{\Gamma}.$$

Man berechnet demnach die Länge eines Kreisbogens, wenn man mit dem Zahlwerthe seines durch den Gegemessenen Winkels am Mittelpunkte den Halbmesser multipli

32. Noch ist hier folgende Wahrnehmung von Wichtig Für $\alpha = \Gamma$ wird $a = r$.

Mithin ist der von uns „Gehren" genannte Winkel auch derjenige Winkel, dessen bestimmender Kreisbogen so lang wie sein Halbmesser ist *).

33. Rectification der Kreislinie und Quadratur des Kreises.

Lassen wir in den letzten Ausdrücken von a und S den Winkel α am Mittelpunkte in einen vollen $= 2\pi\Gamma$ übergehen, bezeichnen wir die Länge der Kreislinie mit C und den Flächeninhalt des Kreises mit K; so wird

$$C = 2\pi r, \quad K = \pi r^2.$$

Lassen wir noch d den Durchmesser des Kreises bedeuten, dann ist $r = \frac{d}{2}$, daher

$$C = \pi d, \quad K = \frac{\pi}{4} d^2.$$

34. Die erstere Gleichung gibt auch $\frac{C}{d} = \pi$.

Mithin ist die Ludolphische Zahl π auch das Verhältniss jeder Kreislinie zu ihrem Durchmesser, das sogenannte Kreisverhältniss; in welcher Bedeutung sie eigentlich gewöhnlich in der Geometrie vorkommt.

*) Vergl. nochmals die bereits oben citirte Note zu meinen Lehrsätze im Archiv. Thl. VI. Heft 2. S. 120.

XL.

Note sur la convergence des séries.

Par

Monsieur C. J. Malmsten,

Professeur des Math. à l'Université d'Upsal.

§. 1.

Pour décider la convergence d'une série

$$f(0), f(1), f(2) \ldots f(n) \ldots \quad (1)$$

Mr. Cauchy a proposé le théorème suivant (Exerc. de Math. Tom. II. pag. 230.):

„La série (1), dont tous les termes sont positifs, est conver„gente, lorsque des valeurs infinies de n réduisent toujours à „zéro non seulement le produit

$$n f(n) \quad (2)$$

„mais encore le produit

$$n^{1+\delta} f(n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

„δ désignant un nombre déterminé, mais qui peut être aussi „petit que l'on voudra. La même série est divergente, quand „le produit (2) diffère sensiblement de zéro, et devient supérieur „à une certaine quantité A, toutes les fois qu'on attribue au „nombre n des valeurs considérables et supérieures à une limite „donnée."

Nous donnerons dans la note présente une extension très importante de ce théorème.

§. 2.

Pour cela nous démontrerons en premier lieu les trois théorèmes suivants.

Théorème I. En désignant comme à l'ordinaire par lx le logarithme Népérien de x, et en posant

$$l^2x = llx,\ l^3x = ll^2x,\ \ldots\ l^{(p)}x = ll^{(p-1)}x \ldots$$

on aura toujours

$$l^{(p+1)}(n+1) - l^{(p+1)}n < \frac{1}{n.ln.l^2n \ldots l^{(p-1)}n.l^{(p)}n} \quad \ldots \quad (4)$$

pourvuque n soit suffisamment grand pour que $l^{(p)}n$ soit une quantité positive.

Démonstration. Pour toutes les valeurs positives de x on a

$$l(1+x) < x, \quad \ldots \quad (5)$$

d'où

$$l(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$$

c'est à dire

$$l(n+1) - ln < \frac{1}{n} \quad (6)$$

Cette formule donne immédiatement

$$l(n+1) < ln\,(1+\frac{1}{n.ln}),$$

d'où, en prenant les logarithmes,

$$l^2(n+1) - l^2n < l\,(1+\frac{1}{n.ln}),$$

et à l'aide de (5)

$$l^2(n+1) - l^2n < \frac{1}{n.ln} \quad (7)$$

De cette formule on aura

$$l^2(n+1) < l^2n\left\{1+\frac{1}{n.ln.l^2n}\right\}$$

et, en prenant les logarithmes,

$$l^3(n+1) - l^3n < l\,(1+\frac{1}{n.ln.l^2n}),$$

d'où encore, à l'aide de (5),

$$l^3(n+1) - l^3n < \frac{1}{n.ln.l^2n} \quad (8)$$

La formule (4) étant ainsi démontrée pour $p=1$ et $p=2$, il t actuellement de faire voir qu'elle a encore lieu pour $p+1$, le est vraie pour p. Supposons donc qu'elle est vraie pour n aura

$$l^{(p+1)}(n+1) < l^{(p+1)}n \cdot \left\{1 + \frac{1}{n.ln.l^2n \ldots l^{(p)}n.l^{(p+1)}n}\right\}$$

n prenant les logarithmes,

$$l^{(p+2)}(n+1) - l^{(p+2)}n < l\left(1 + \frac{1}{n.ln.l^2n \ldots l^{(p+1)}n}\right)$$

enfin à l'aide de (2)

$$l^{(p+2)}(n+1) - l^{(p+2)}n < \frac{1}{n.ln.l^2n \ldots l^{(p)}n.l^{(p+1)}n},$$

à dire le même résultat que celui de (4), en y mettant $p+1$ eu de p. C. Q. F. D.

Théorème II. Les mêmes choses étant supposées dans le théorème I., on a toujours

$$l^{(p+1)}n - l^{(p+1)}(n-1) > \frac{1}{n.ln.l^2n \ldots l^{(p)}n} \quad (9)$$

Démonstration. Étant x positif et inférieur à 1 on a

$$-l(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \text{etc.}$$

l'on voit que $-l(1-x)$ est une quantité positive et supérieure , c'est à dire que

$$-l(1-x) > x. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

aide de cette formule, étant

$$ln - l(n-1) = -l\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

ura

$$ln - l(n-1) > \frac{1}{n},$$

e qui est la même chose

$$ln\left\{1 - \frac{1}{n.ln}\right\} > l(n-1),$$

, en prenant les logarithmes,

$$l^2 n - l^2(n-1) > -l\left(1-\frac{1}{nln}\right),$$

et de plus, en vertu de (10),

$$l^2 n - l^2(n-1) > \frac{1}{nln}.$$

Ainsi la formule (9) étant démontrée pour $p=1$, il s actuellement de faire voir que, si elle était vraie pour p, elle sera encore pour $p+1$. Supposons donc qu'elle soit vraie pour on aura

$$l^{(p+1)} n \left\{1-\frac{1}{n.ln\ldots l^{(p)}n.l^{(p+1)}n}\right\} > l^{(p+1)}(n-1) \quad \ldots\ldots(10'),$$

d'où, en prenant les logarithmes, on aura

$$l^{(p+2)} n - l^{(p+2)}(n-1) > -l\left(1-\frac{1}{n.ln\ldots l^{(p)}n.l^{(p+1)}n}\right),$$

et enfin à l'aide de (10)

$$l^{(p+2)} n - l^{(p+2)}(n-1) > \frac{1}{n.ln\ldots l^{(p)}n.l^{(p+1)}n},$$

c'est à dire le même résultat que celui de (10*), en y remplaçant $p+1$ au lieu de p. C. Q. F. D.

Théorème III. Les mêmes choses étant supposées que dans les théorèmes précédents, on a toujours

$$\frac{1}{n.ln\ldots l^{(p-1)}n.(l^{(p)}n)^{\alpha}} < \frac{[l^{(p)}(n-1)]^{1-\alpha} - (l^{(p)}n)^{1-\alpha}}{\alpha-1},$$

toutes les fois que $\alpha > 1$.

Démonstration. En vertu de la formule connue

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

on voit facilement que pour toutes les valeurs positives de x

$$e^x > 1 + x.$$

Mais la formule (9) donne

$$l^{(p+1)} n - \frac{1}{n.ln\ldots l^{(p)}n} > l^{(p+1)}(n-1),$$

d'où il suit

$$e^{l^{(p+1)}n - \frac{1}{n.ln\ldots l^{(p)}n}} > e^{l^{(p+1)}(n-1)},$$

c'est à dire

$$l^{(p)}n \cdot e^{-\frac{1}{n.ln...l^{(p)}n}} > l^{(p)}(n-1),$$

Cette formule élevée à $1-\alpha$ donnera, toutefois que $\alpha > 1$,

$$[l^{(p)}n]^{1-\alpha} \cdot e^{\frac{\alpha-1}{n.ln...l^{(p)}n}} < [l^{(p)}(n-1)]^{1-\alpha},$$

d'où, *a fortiori* (à cause de (12)) il provient

$$(l^{(p)}n)^{1-\alpha} \cdot \left\{1 + \frac{\alpha-1}{n.ln...l^{(p)}n}\right\} < [l^{(p)}(n-1)]^{1-\alpha},$$

c'est à dire

$$\frac{1}{n.ln...l^{(p-1)}n.(l^{(p)}n)^{\alpha}} < \frac{[l^{(p)}(n-1)]^{1-\alpha} - [l^{(p)}n]^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

$(\alpha > 1)$. C. Q. F. D.

§. 3.

A l'aide des formules (4) et (11) nous pouvons démontrer très facilement, qu'en posant

$$u_k^{(\alpha)} = \frac{1}{(m+k).l(m+k).l^2(m+k)...l^{(p-1)}(m+k).(l^{(p)}(m+k))^{\alpha}}$$

(m étant suffisamment grand pour que $l^{(p)}m$ soit positif), la série

$$u_0^{(\alpha)}, \quad u_1^{(\alpha)}, \quad u_2^{(\alpha)}, \quad u_3^{(\alpha)}, \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

est *divergente* pour $\alpha \leq 1$, et *convergente* pour $\alpha > 1$.

A) La série (13) est divergente pour $\alpha \leq 1$. Désignons par $S_k^{(\alpha)}$ la somme de k premiers termes de la série (13), c'est à dire

$$S_k^{(\alpha)} = u_0^{(\alpha)} + u_1^{(\alpha)} + u_2^{(\alpha)} + \ldots + u_{k-1}^{(\alpha)},$$

et faisons dans (4) n successive égal à

$$m, \; m+1, \; m+2, \ldots, m+k-1;$$

en ajoutant les resultats nous aurons

$$S_k^{(1)} > l^{(p+1)}(m+k-1) - l^{(p+1)}m,$$

ce qui fait voir que pour des valeurs toujours croissantes de k la somme $S_k^{(1)}$ croît elle-même au delà de toute limite, d'où il suit nécessairement que la série (13) est divergente pour $\alpha=1$; elle l'est donc encore plus pour $\alpha<1$.

B) La série (13) est convergente pour $\alpha>1$. Faisons dans (11) n successive égal à

$$m+k,\ m+k+1,\ m+k+2,\ \ldots\ m+k+r-1;$$

en ajoutant les résultats nous obtiendrons

$$S_{k+r}^{(\alpha)} - S_k^{(\alpha)} < \frac{[l^{(p)}(m+k-1)]^{1-\alpha} - [l^{(p)}(m+k+r-1)]^{1-\alpha}}{\alpha-1},$$

d'où en passant à la limite pour k (α étant >1), on aura

$$\lim\,(S_{k+r}^{(\alpha)} - S_k^{(\alpha)}) = 0, \quad [k=\infty]$$

pour une valeur quelconque de r. Cette formule ayant lieu, la série (13) ne pourra qu'être convergente pour $\alpha>1$.

§ 4.

En vertu de ce que nous venons de prouver, nous pouvons démontrer les propositions suivantes.

Théorème IV. Soit proposée la série infinie

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \quad (14)$$

s'il existe un nombre entier p tel que non seulement la limite du produit

$$n.ln.l^2n \ldots l^{(p-1)}n.l^{(p)}n.u_n \quad (15)$$

mais encore celle du produit

$$n.ln.l^2n \ldots l^{(p-1)}n.(l^{(p)}n)^{1+\delta}.u_n \quad (16)$$

s'évanouit pour $n=\infty$, δ désignant une quantité positive aussi petite que l'on voudra, mais déterminée, la série (14) sera convergente; si au contraire la limite du produit (15) diffère sensiblement de zéro, la même série sera divergente (supposé que tous ses termes soient du même signe).

Démonstration. *A*) Supposons que l'expression (16) s'évanouisse toujours pour $n=\infty$, et désignons par S_n la somme des n premiers termes de la série (14). Soit N le plus grand des produits $\varphi(n).u_n$, $\varphi(n+1).u_{n+1}$, $\varphi(n+2).u_{n+2}$, $\ldots\ \varphi(n+m-1).u_{n+m-1}$

où nous avons posé pour abréger les expressions

$$\varphi(n) = n \,.\, ln \,.\, l^2 n \ldots l^{(p-1)} n \,.\, (l^{(p)} n)^{1+\delta}.$$

N deviendra nul pour $n = \infty$. D'ailleurs on voit aisément que la différence

$$S_{n+m} - S_n$$

sera inférieure au produit

$$N \,.\, \left\{ \frac{1}{\varphi(n)} + \frac{1}{\varphi(n+1)} + \frac{1}{\varphi(n+2)} + \ldots + \frac{1}{\varphi(n+m-1)} \right\},$$

qui s'évanouit pour $n = \infty$, quelque grand que soit m (en vertu de ce que nous avons démontré dans le paragraphe précédent). La série (14) sera donc elle-même convergente.

B) Supposons en second lieu que pour $n = \infty$ l'expression (15) diffère sensiblement de zéro et qu'elle devienne constamment supérieur à une quantité positive A. Alors, tous le termes de la série (14) étant supposés du même signe, la différence $S_{n+m} - S_n$ surpassera le produit

$$A \,.\, \left\{ \frac{1}{\psi(n)} + \frac{1}{\psi(n+1)} + \frac{1}{\psi(n+2)} + \ldots + \frac{1}{\psi(n+m-1)} \right\} \ldots (17)$$

où nous avons posé, pour abréger, les expressions

$$\psi(n) = n \,.\, ln \,.\, l^2 n \ldots l^{(p-1)} n \,.\, l^{(p)} n \ldots (18)$$

Donc comme le produit (17) croîtra indéfiniment avec m, attendu que la série (13) pour $\alpha = 1$ est divergente, il est clair que la série (14) dans ce cas sera pareillement divergente.

C. Q. F. D.

Théorème V. Étant proposée une série infinie

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots u_n, \ldots \ldots (19)$$

soit pour $n = \infty$

$$\lim \left\{ l \,.\, \frac{1}{u_n \,.\, n \,.\, ln \ldots l^{(p-1)} n} \right\} = \alpha \ldots (20)$$

où p est un entier; la série (19) sera convergente, s'il existe un tel p que $\alpha - 1$ est une quantité positive, qui diffère sensiblement de zéro; au contraire la même série sera divergente (supposé que tous ses termes soient du même signe) s'il existe un tel p, que $\alpha - 1$ devient une quantité négative sensiblement différente de zéro.

Démonstration. *A*) Supposons $\alpha - 1 = \varepsilon$, ε étant positif et différent de zéro; donc la formule (20) donne pour des valeurs infiniment grandes de n

$$l. \frac{1}{u_n . n . ln \ldots . l^{(p-1)} n} = (1+\varepsilon) l^{(p+1)} n,$$

c'est à dire

$$\frac{1}{u_n . n . ln \ldots . l^{(p-1)} n} = (l^{(p)} n)^{1+\varepsilon},$$

ou ce qui est la même chose

$$u_n . n . ln \ldots . l^{(p-1)} n . (l^{(p)} n)^{1+\varepsilon} = 1.$$

Mais ε étant positif et sensiblement différent de zéro, on peut poser

$$\varepsilon = \delta + \delta',$$

où δ et δ' sont tous les deux positifs et sensiblement différents de zéro. On aura donc enfin

$$u_n . n . ln \ldots . l^{(p-1)} n . (l^{(p)} n)^{1+\delta} = \frac{1}{(l^{(p)} n)^{\delta'}},$$

c'est à dire la limite du produit (16) s'évanouit pour $n = \infty$; d'où il suit (Théor. IV.) que la série (19) est convergente dans le cas où $\alpha - 1$ est positif et différent de zéro.

B) Supposons en second lieu que $\alpha - 1 = -\varepsilon$, ε étant positif et sensiblement différent de zéro. La formule (20) donne pour $n = \infty$

$$l. \frac{1}{u_n . n . ln \ldots . l^{(p-1)} n} = (1-\varepsilon) l^{(p+1)} n,$$

c'est à dire

$$\frac{1}{u_n . n . ln \ldots . l^{(p-1)} n} = (l^{(p)} n)^{1-\varepsilon},$$

ou enfin

$$u_n . n . ln \ldots . l^{(p-1)} n . l^{(p)} n = (l^{(p)} n)^{\varepsilon}.$$

Ainsi la limite du produit (15) étant différente de zéro, il suit du théorème IV., que la série (19) est divergente (supposé que tous les termes soient du même signe), si $\alpha - 1$ est négatif et sensiblement différent de zéro. C. Q. F. D.

§. 5.

Le théorème, que nous venons de démontrer, ne fait en effet ue relever les règles pour discerner la convergence des séries finies, qui se trouvent exposées en détail dans un Mémoire ex-llent de M. Bertrand (dans le Journ. de Math. par M. Liou-lle. Tom. 7. pag. 35.). Ces règles constituent, comme on sait, criterium très général pour le cas exceptionel

$$\lim . \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,$$

l'aide duquel on pourra le plus souvent décider, s'il y a con-rgence ou divergence. Mais étant fondées essentiellement sur s formules (4) et (11), dont la déduction a exigé jusqu'à présent secours du calcul intégral, elles n'ont pu être proposées con-iointement avec les autres propositions élémentaires sur les suites finies.

Ce qu'il y a de plus important dans la note présente c'est ue nous avons demontré les dites formules (4) et (11) sans secours u calcul intégral et par cela donné aux règles de M. Bertrand eur place méritée dans la théorie élémentaire des suites.

XLI.

Ueber die höheren Differenzialquotienten beliebiger Funktionen des Logarithmus.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

Kennt man die successiven Differenzialquotienten $f'(z)$, $f''(z)$, $''(z)$, etc. einer beliebigen Funktion $f(z)$, so kann man hieraus den öheren Differenzialquotienten

$$\frac{\partial^n f(lx)}{\partial x^n}$$

f folgende sehr einfache Weise ableiten.

Für $lx = z$, also $\partial z = \frac{\partial x}{x}$, ist

$$\frac{\partial f(lx)}{\partial x} = \frac{\partial f(z)}{\partial x} = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = f'(z)\,\frac{1}{x}$$

oder

$$\frac{\partial f(lx)}{\partial x} = \frac{1}{x} f'(lx).$$

Differenziirt man wieder diese Gleichung nach der Rege die Differenziation der Produkte und bemerkt, dass analog Vorigen $\frac{\partial f'(lx)}{\partial x} = \frac{1}{x} f''(lx)$ ist, so erhält man leicht

$$\frac{\partial^2 f(lx)}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}\{f'(lx) - f''(lx)\}.$$

Erneuerte Differenziationen führen weiter zu den Gleichungen

$$\frac{\partial^3 f(lx)}{\partial x^3} = +\frac{1}{x^3}\{2f'(lx) - 3f''(lx) + f'''(lx)\},$$

$$\frac{\partial^4 f(lx)}{\partial x^4} = -\frac{1}{x^4}\{6f'(lx) - 11f''(lx) + 6f'''(lx) - f^{IV}(lx)\},$$

u. s. w.

Man schliesst hieraus, dass der $n$te Differenzialquotient v $f(lx)$ unter folgender Form stehen werde:

$$\frac{\partial^n f(lx)}{\partial x^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\{A_1 f'(lx) + A_2 f''(lx) + A_3 f'''(lx) \ldots \pm A_n f^{(n)}(lx)\} \quad (1)$$

worin $A_1, A_2, \ldots A_n$ gewisse numerische Coeffizienten bedeu Es ist in der That sehr leicht, sich mittelst des Schlusses n auf $n+1$ von der formellen Richtigkeit der induktorisch ab leiteten Gleichung (1) zu überzeugen.

Um nun die Werthe der genannten Coeffizienten zu bestimm braucht man blos zu bemerken, dass dieselben nur durch Stellung bedingt sind, keineswegs aber von der Natur der Fu $f(z)$ oder $f(lx)$ abhängen, dass folglich diese n unbek Grössen ganz im Allgemeinen bestimmt sind, wenn man irgend eine spezielle Form von $f(z)$ ermittelt hat. Um aber Letztere bewerkstelligen zu können, wird es nöthig, für $f(z)$ solche Wahl zu treffen, dass man die auf beiden Seiten der chung (1) angedeuteten Differenziationen ganz unmittelbar führen kann. Diess ist nun in der That der Fall, wenn man

$$f(z) = e^{-u},$$

etzt, wobei μ eine beliebige Constante bedeutet. Es wird dann ir ein ganzes positives k

$$f^{(k)}(z) = (-1)^k \mu^k e^{-\mu z},$$

lso

$$f^{(k)}(lx) = (-1)^k \mu^k x^{-\mu}.$$

Ferner hat man unmittelbar

$$f(lx) = x^{-\mu},$$

lso

$$\frac{\partial^n f(lx)}{\partial x^n} = (-1)^n \mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1)\, x^{-\mu-n}.$$

Substituiren wir diesen Werth nebst Den, was sich aus der origen Gleichung für $k = 1, 2, \ldots n$ ergiebt, in die Gleichung 1), so folgt

$$\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1)\, x^{-\mu-n}$$
$$= \frac{1}{x^n}\{A_1 \mu x^{-\mu} + A_2 \mu^2 x^{-\mu} + A_3 \mu^3 x^{-\mu} + \ldots + A_n \mu^n x^{-\mu}\}$$

der, wenn man beiderseits mit $x^{-\mu-n}$ hebt,

$$\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1)$$
$$= A_1 \mu + A_2 \mu^2 + A_3 \mu^3 + \ldots + A_n \mu^n.$$

Diese Relation unter den Grössen $A_1, A_2, \ldots A_n$ sagt uns, lass dieselben mit den sogenannten Fakultätenkoeffizienten dentisch sind, welche die Coeffizienten der successiven Potenzen on μ bilden, wenn man die Fakultät $\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-1)$ in eine ach steigenden Potenzen von μ fortschreitende Reihe verwandelt, was durch gewöhnliche Multiplikation geschehen kann. Bezeichnen ir die Fakultätenkoeffizienten einer Fakultät vom Grade n mit

$$C_1^n, C_2^n, C_3^n, \ldots C_n^n;$$

o ist für jedes ganze positive k

$$A_k = C_k^n,$$

olglich nach Nro. (1)

$$\frac{\partial^n f(lx)}{\partial x^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\{C_1^n f'(lx) - C_2^n f''(lx) \pm C_3^n f'''(lx) - \ldots \pm C_n^n f^{(n)}(lx)\},$$

und hiermit hat unsere Aufgabe ihre vollständige Lösung gefun
da sich die Fakultätenkoeffizienten vermöge ihrer combinatori
Bedeutung independent berechnen lassen.

Beispielsweis sei $f(z) = z^m$, wobei m eine ganz belie
Grösse ist; es wird dann für ein positives ganzes k

$$f^{(k)}(z) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)\,z^{m-k},$$

oder wenn wir mit m_k den $k$ten Binomialkoeffizienten des E
nenten m und $1.2\ldots k$ mit k' bezeichnen,

$$f^{(k)}(z) = k' m_k z^{m-k};$$

folglich

$$f^{(k)}(lx) = k' m_k (lx)^{m-k}.$$

Da ferner $f(lx) = (lx)^m$ ist, so ergiebt sich jetzt

$$3.\quad \frac{\partial^n (lx)^m}{\partial x^n} =$$

$$\frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\{1' m_1 \overset{n}{C}_1 (lx)^{m-1} - 2' m_2 \overset{n}{C}_2 (lx)^{m-2} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} n' m_n \overset{n}{C}_n (lx)^{m-n}\}$$

Mittelst dieser Formel lässt sich auch der Ausdruck $[l(1+x$
für ganze positive m nach dem Taylorschen Theoreme

$$F(h+x) = F(h) + \frac{F'(h)}{1} x + \frac{F''(h)}{1.2} x^2 + \ldots \text{ etc.}$$

in eine Reihe verwandeln, wenn man

$$F(x) = (lx)^m$$

und $h = 1$ setzt. Es ist dann nach dem Vorigen

$$4.\quad F^{(n)}(x) =$$

$$\frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\{1' m_1 \overset{n}{C}_1 (lx)^{m-1} - 2' m_2 \overset{n}{C}_2 (lx)^{m-2} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} n' m_n \overset{n}{C}_n (lx)^{m-n}\}$$

Hier sind nun drei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich n
$n = m$ oder $n > m$ ist. Im ersten bleiben die Exponenten m
$m-2, \ldots m-n$ sämmtlich positiv und grösser als Null, und
her wird für $x = h = 1$

$$5.\quad F^{(n)}(1) = 0, \quad n < m.$$

Im zweiten Falle ist $n-n=0$, folglich das letzte Glied in der Parenthese

$$= (-1)^{m-1} m' m_m \overset{m}{C}_m,$$

während in allen übrigen Gliedern positive von Null verschiedene Exponenten des lx vorkommen. Es wird daher

$$6. \qquad F^{(n)}(1) = m' m_m \overset{m}{C}_m, \quad n = m.$$

Für $n > m$ endlich fallen alle diejenigen Glieder weg, in welchen lx negative Exponenten erhalten würde, weil bekanntlich

$$m_{m+1} = m_{m+2} = m_{m+3} = \ldots = 0$$

ist. Es reduzirt sich daher die Formel (4) auf

$$F^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{x^n} \{1' m_1 \overset{n}{C}_1 (lx)^{m-1} - 2' m_2 \overset{n}{C}_2 (lx)^{m-2} + \ldots + (-1)^{m-1} m' m_m \overset{n}{C}_m\},$$

woraus für $x = h = 1$ folgt

$$7. \qquad F^{(n)}(1) = (-1)^{m+n} m' m_m \overset{m}{C}_m, \quad n > m.$$

Nehmen wir jetzt

$$n = 0, 1, 2, \ldots (m-1), m, (m+1), (m+2), \text{ etc.}$$

so giebt das Taylor'sche Theorem unter Benutzung der unter (5), (6) und (7) gefundenen Werthe

$$[l(1+x)]^m = \frac{m' m_m}{1.2..m} \overset{m}{C}_m x^m - \frac{m' m_m}{1.2..(m+1)} \overset{m+1}{C}_m x^{m+1} + \frac{m' m_m}{1.2..(m+2)} \overset{m+2}{C}_m x^{m+2} - \ldots\ldots,$$

oder, weil $m_m = 1$, $m' = 1.2..m$ ist,

$$8. \quad [l(1+x)]^m = \overset{m}{C}_m x^m - \overset{m+1}{C}_m \frac{x^{m+1}}{m+1} + \overset{m+2}{C}_m \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} - \ldots\ldots$$

Die noch nöthige Untersuchung über die Gränzen der Gültigkeit dieses Resultats (Convergenzbetrachtung) reduzirt sich auf die einfache Bemerkung, dass die vorstehende Gleichung die $m$te Potenz der folgenden

$$l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$$

sein muss, also nur so lange bestehen kann, aber auch bestehen muss, als die letztere gilt. Hieraus folgt sogleich, dass die Gültigkeit der Gleichung (8) an die Gränzen $x = +1$, $x = -1$ gebunden ist.

Für $m = 2$ hat man z. B.

$$C_2^1 = 1, \quad C_2^2 = 2+1 = 1.2.(1+\frac{1}{2}),$$

$$C_2^3 = 3.2+3.1+2.1 = 1.2.3.(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}), \text{ u. s. w.}$$

woraus man leicht das schon bekannte Resultat findet:

$$[l(1+x)]^2 =$$

$$x^2 - \frac{2}{3}(1+\frac{1}{2})x^3 + \frac{2}{4}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})x^4 - \frac{2}{5}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})x^5 + \ldots$$

$$1 \geqq x \geqq -1.$$

Nimmt man in der Gleichung (8)

$$x = -\frac{z}{1+z},$$

wo nun x durch jedes beliebige positive z zum ächten Bruche wird, so ergiebt sich

$$[l(1+z)]^m =$$

$$C_m^m \left(\frac{z}{1+z}\right)^{m+1} + \frac{C_m^{m+1}}{m+1}\left(\frac{z}{1+z}\right)^{m+1} + \frac{C_m^{m+2}}{(m+1)(m+2)}\left(\frac{z}{1+z}\right)^{m+2} + \cdots$$

$$+\infty \geqq z \geqq 0.$$

Die Gleichung (8) kann auch zur Transformation von Reihen dienen, welche nach Potenzen von $l(1+x)$ fortschreiten. Ein besonders elegantes Beispiel hierzu bietet die Reihe für den Integrallogarithmus dar. Man hat nämlich für jedes z:

$$li(z) = A + \frac{1}{2}l[(lz)^2] + \frac{lz}{1\cdot 1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(lz)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(lz)^3}{1.2.3} + \cdots$$

worin A die von Soldner und Mascheroni auf 0,5772156649 bestimmte Constante bedeutet.

Für $z = 1+x$ wird hier

$$li(1+x) = A + \frac{1}{2} l[l(1+x)^2] + \frac{1}{1} \cdot \frac{l(1+x)}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{l(1+x)^2}{1.2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{l(1+x)^3}{1.2.3} + \ldots$$

Unter der Bedingung, dass $1 \geqq x \geqq -1$ ist, lässt sich hier jedes einzelne Glied nach Formel (7) für $m = 1, 2, 3$, etc. in eine Reihe verwandeln. Vereinigt man hierauf diejenigen Glieder, welche gleiche Potenzen von x enthalten, so gelangt man ohne alle Schwierigkeit zu der folgenden Formel:

$$li(1+x) = A + \frac{1}{2} l[l(1+x)^2] + \frac{a_1 x}{1} - \frac{a_2 x^2}{1.2} + \frac{a_3 x^3}{1.2.3} - \ldots$$

$$1 \geqq x \geqq -1,$$

worin irgend ein Koeffizient a_n mittelst der Gleichung

$$a_n = \frac{1}{1} {}^{n}C_1 - \frac{1}{2} {}^{n}C_2 + \frac{1}{3} {}^{n}C_3 - \ldots \pm \frac{1}{n} {}^{n}C_n$$

bestimmt wird.

XLII.

Ueber eine geodätische Aufgabe.

Von

dem Herausgeber.

§. 1.

Fast in allen Sammlungen trigonometrischer Aufgaben kommt das folgende Problem vor:

Aus drei gegebenen in einer horizontalen Ebene in gerader Linie liegenden Punkten werden die Neigungswinkel der von diesen drei Punkten nach einem vierten beliebigen Punkte im Raume gezogenen Linien gegen die horizontale Ebene, in welcher die drei gegebenen Punkte liegen, gemessen; man soll die Höhe dieses

$$\{\varrho_1^2 \sin i_1^2 - \varrho^2 \sin i^2 - (a-a_1)^2 - (b-b_1)^2\} \cos i_1^2$$
$$= (c-c_1)^2 - E_1^2 \cos i_1^2$$
$$+ 2\varrho\,(c-c_1) \cos i \sin i_1^2$$
$$- \varrho^2 (\sin i^2 \cos i_1^2 - \cos i^2 \sin i_1^2),$$

$$\{\varrho_2^2 \sin i_2^2 - \varrho^2 \sin i^2 - (a-a_2)^2 - (b-b_2)^2\} \cos i_2^2$$
$$= (c-c_2)^2 - E_2^2 \cos i_2^2$$
$$+ 2\varrho\,(c-c_2) \cos i \sin i_2^2$$
$$- \varrho^2 (\sin i^2 \cos i_2^2 - \cos i^2 \sin i_2^2);$$

oder

$$\{\varrho_1^2 \sin i_1^2 - \varrho^2 \sin i^2 - (a-a_1)^2 - (b-b_1)^2\} \cos i_1^2$$
$$= (c-c_1)^2 - E_1^2 \cos i_1^2$$
$$+ 2\varrho\,(c-c_1) \cos i \sin i_1^2$$
$$- \varrho^2 \sin (i+i_1) \sin (i-i_1),$$

$$\{\varrho_2^2 \sin i_2^2 - \varrho^2 \sin i^2 - (a-a_2)^2 - (b-b_2)^2\} \cos i_2^2$$
$$= (c-c_2)^2 - E_2^2 \cos i_2^2$$
$$+ 2\varrho\,(c-c_2) \cos i \sin i_2^2$$
$$- \varrho^2 \sin (i+i_2) \sin (i-i_2).$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$9) \quad \begin{cases} K_1 \cos i_1^2 = (c-c_1)^2 - E_1^2 \cos i_1^2 \\ \qquad + 2\varrho\,(c-c_1) \cos i \sin i_1^2 \\ \qquad - \varrho^2 \sin (i+i_1) \sin (i-i_1), \\ K_2 \cos i_2^2 = (c-c_2)^2 - E_2^2 \cos i_2^2 \\ \qquad + 2\varrho\,(c-c_2) \cos i \sin i_2^2 \\ \qquad - \varrho^2 \sin (i+i_2) \sin (i-i_2); \end{cases}$$

so ist nach 6):

$$10) \quad \begin{cases} 2\{(a-a_1) \cos\varphi + (b-b_1) \cos\psi\}\varrho = K_1, \\ 2\{(a-a_2) \cos\varphi + (b-b_2) \cos\psi\}\varrho = K_2; \end{cases}$$

folglich

$$11) \quad \begin{cases} 2\varrho \cos\varphi = \dfrac{(b-b_2) K_1 - (b-b_1) K_2}{(a-a_1)(b-b_2) - (b-b_1)(a-a_2)}, \\ 2\varrho \cos\psi = -\dfrac{(a-a_2) K_1 - (a-a_1) K_2}{(a-a_1)(b-b_2) - (b-b_1)(a-a_2)}. \end{cases}$$

Nach der ersten der Gleichungen 3) ist aber

$$(2\varrho \cos\varphi)^2 + (2\varrho \cos\psi)^2 = 4\varrho^2 \sin i^2;$$

ist nach 11):

$$4\varrho^2 \sin i^2 = \frac{|(a-a_2)K_1 - (a-a_1)K_2|^2 + |(b-b_2)K_1 - (b-b_1)K_2|^2}{|(a-a_1)(b-b_2) - (b-b_1)(a-a_2)|^2},$$

he Gleichung nun bloss noch die eine unbekannte Grösse ϱ ält.
Setzt man der Kürze wegen:

$$13)\quad \begin{cases} A = (a-a_2)\{(c-c_1)^2 - E_1^2\cos i_1^2\}\cos i_2^2 \\ \quad -(a-a_1)\{(c-c_2)^2 - E_2^2\cos i_2^2\}\cos i_1^2, \\ B = (b-b_2)\{(c-c_1)^2 - E_1^2\cos i_1^2\}\cos i_2^2 \\ \quad -(b-b_1)\{(c-c_2)^2 - E_2^2\cos i_2^2\}\cos i_1^2; \\ A_1 = (a-a_2)(c-c_1)\cos i \sin i_1^2\cos i_2^2 \\ \quad -(a-a_1)(c-c_2)\cos i \sin i_2^2\cos i_1^2, \\ B_1 = (b-b_2)(c-c_1)\cos i \sin i_1^2\cos i_2^2 \\ \quad -(b-b_1)(c-c_2)\cos i \sin i_2^2\cos i_1^2; \\ A_2 = -(a-a_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2^2 \\ \quad +(a-a_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1^2, \\ B_2 = -(b-b_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2^2 \\ \quad +(b-b_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1^2; \end{cases}$$

, wenn

$$14)\quad \begin{cases} \varkappa_1 = (c-c_1-E_1\cos i_1)(c-c_1+E_1\cos i_1)\cos i_2^2, \\ \varkappa_2 = (c-c_2-E_2\cos i_2)(c-c_2+E_2\cos i_2)\cos i_1^2; \\ \lambda_1 = (c-c_1)\cos i \sin i_1^2\cos i_2^2, \\ \lambda_2 = (c-c_2)\cos i \sin i_2^2\cos i_1^2; \\ \mu_1 = -\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2^2, \\ \mu_2 = -\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1^2 \end{cases}$$

tzt wird:

$$15)\quad \begin{cases} A = \varkappa_1(a-a_2) - \varkappa_2(a-a_1), \\ A_1 = \lambda_1(a-a_2) - \lambda_2(a-a_1), \\ A_2 = \mu_1(a-a_2) - \mu_2(a-a_1): \end{cases}$$

$$16)\quad \begin{cases} B = \varkappa_1(b-b_2) - \varkappa_2(b-b_1), \\ B_1 = \lambda_1(b-b_2) - \lambda_2(b-b_1), \\ B_2 = \mu_1(b-b_2) - \mu_2(b-b_1); \end{cases}$$

t

$$\{\varrho_1^2 \sin i_1^2 - \varrho^2 \sin i^2 - (a-a_1)^2 - (b-b_1)^2\} \cos i_1^2$$
$$= (c-c_1)^2 - E_1^2 \cos i_1^2$$
$$+ 2\varrho (c-c_1) \cos i \sin i_1^2$$
$$- \varrho^2 (\sin i^2 \cos i_1^2 - \cos i^2 \sin i_1^2)$$

$$\{\varrho_2^2 \sin i_2^2 - \varrho^2 \sin i^2 - (a-a_2)^2 - (b-b_2)^2\} \cos i_2^2$$
$$= (c-c_2)^2 - E_2^2 \cos i_2^2$$
$$+ 2\varrho (c-c_2) \cos i \sin i_2^2$$
$$- \varrho^2 (\sin i^2 \cos i_2^2 - \cos i^2 \sin i_2^2);$$

oder

$$\{\varrho_1^2 \sin i_1^2 - \varrho^2 \sin i^2 - (a-a_1)^2 - (b-b_1)^2\} \cos i_1^2$$
$$= (c-c_1)^2 - E_1^2 \cos i_1^2$$
$$+ 2\varrho (c-c_1) \cos i \sin i_1^2$$
$$- \varrho^2 \sin (i+i_1) \sin (i-i_1),$$

$$\{\varrho_2^2 \sin i_2^2 - \varrho^2 \sin i^2 - (a-a_2)^2 - (b-b_2)^2\} \cos i_2^2$$
$$= (c-c_2)^2 - E_2^2 \cos i_2^2$$
$$+ 2\varrho (c-c_2) \cos i \sin i_2^2$$
$$- \varrho^2 \sin (i+i_2) \sin (i-i_2).$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$9) \quad \begin{cases} K_1 \cos i_1^2 = (c-c_1)^2 - E_1^2 \cos i_1^2 \\ \qquad\qquad + 2\varrho (c-c_1) \cos i \sin i_1^2 \\ \qquad\qquad - \varrho^2 \sin (i+i_1) \sin (i-i_1), \\ K_2 \cos i_2^2 = (c-c_2)^2 - E_2^2 \cos i_2^2 \\ \qquad\qquad + 2\varrho (c-c_2) \cos i \sin i_2^2 \\ \qquad\qquad - \varrho^2 \sin (i+i_2) \sin (i-i_2) \end{cases}$$

so ist nach 6):

$$10) \quad \begin{cases} 2\{(a-a_1) \cos \varphi + (b-b_1) \cos \psi\} \varrho = K_1, \\ 2\{(a-a_2) \cos \varphi + (b-b_2) \cos \psi\} \varrho = K_2; \end{cases}$$

folglich

$$11) \quad \begin{cases} 2\varrho \cos \varphi = \dfrac{(b-b_2) K_1 - (b-b_1) K_2}{(a-a_1)(b-b_2) - (b-b_1)(a-a_2)}, \\ 2\varrho \cos \psi = -\dfrac{(a-a_2) K_1 - (a-a_1) K_2}{(a-a_1)(b-b_2) - (b-b_1)(a-a_2)}. \end{cases}$$

Nach der ersten der Gleichungen 3) ist aber

$$(2\varrho \cos \varphi)^2 + (2\varrho \cos \psi)^2 = 4\varrho^2 \sin i^2;$$

25) $$\varrho_1 = \frac{c - c_1 + \varrho\cos i}{\cos i_1}, \quad \varrho_2 = \frac{c - c_2 + \varrho\cos i}{\cos i_2};$$

ie Winkel φ_1, ψ_1; φ_2, ψ_2 ergeben sich mittelst der Formeln:

$$\left\{\begin{aligned} \cos\varphi_1 &= \frac{a - a_1 + \varrho\cos\varphi}{\varrho_1}, \quad \cos\psi_1 = \frac{b - b_1 + \varrho\cos\psi}{\varrho_1}; \\ \cos\varphi_2 &= \frac{a - a_2 + \varrho\cos\varphi}{\varrho_2}, \quad \cos\psi_2 = \frac{b - b_2 + \varrho\cos\psi}{\varrho_2}; \end{aligned}\right.$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{a - a_1 + \varrho\cos\varphi}{c - c_1 + \varrho\cos i}\cos i_1, \quad \cos\psi_1 = \frac{b - b_1 + \varrho\cos\psi}{c - c_1 + \varrho\cos i}\cos i_1;$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{a - a_2 + \varrho\cos\varphi}{c - c_2 + \varrho\cos i}\cos i_2, \quad \cos\psi_2 = \frac{b - b_2 + \varrho\cos\psi}{c - c_2 + \varrho\cos i}\cos i_2;$$

e gesuchten Coordinaten x, y, z des Punktes N erhält man mittelst der Formeln:

$$\left\{\begin{aligned} x &= a + \varrho\cos\varphi = a_1 + \varrho_1\cos\varphi_1 = a_2 + \varrho_2\cos\varphi_2, \\ y &= b + \varrho\cos\psi = b_1 + \varrho_1\cos\psi_1 = b_2 + \varrho_2\cos\psi_2, \\ z &= c + \varrho\cos i = c_1 + \varrho_1\cos i_1 = c_2 + \varrho_2\cos i_2. \end{aligned}\right.$$

§. 3.

enn $c = c_1 = c_2 = 0$ ist, d. h. wenn die drei gegebenen M, M_1, M_2 in der Ebene der xy liegen, so ist im vorenden Paragraphen:

29) $$\left\{\begin{aligned} \varkappa_1 &= -E_1^2\cos i_1^2\cos i_2^2, \\ \varkappa_2 &= -E_2^2\cos i_1^2\cos i_2^2; \\ \lambda_1 &= 0, \\ \lambda_2 &= 0; \\ \mu_1 &= -\sin(i + i_1)\sin(i - i_1)\cos i_2^2, \\ \mu_2 &= -\sin(i + i_2)\sin(i - i_2)\cos i_1^2 \end{aligned}\right.$$

30) $$\left\{\begin{aligned} A &= \varkappa_1(a - a_2) - \varkappa_2(a - a_1), \\ A_1 &= 0, \\ A_2 &= \mu_1(a - a_2) - \mu_2(a - a_1) \end{aligned}\right.$$

31) $$\left\{\begin{aligned} B &= \varkappa_1(b - b_2) - \varkappa_2(b - b_1), \\ B_1 &= 0, \\ B_2 &= \mu_1(b - b_2) - \mu_2(b - b_1). \end{aligned}\right.$$

Also wird in diesem Falle die Gleichung 22):

32) $0 = AA + BB + 2(AA_2 + BB_2 - 2C_1 C_1)\varrho^2 + (A_2A_2 + B_2B_2)\varrho^4$,

und kann folglich wie eine quadratische Gleichung aufgelöst werden.

Gehen wir in diesem Falle auf die ursprüngliche Gleichung 21) zurück, so wird dieselbe:

33) $4C_1^2\varrho^2 = (A + A_2\varrho^2)^2 + (B + B_2\varrho^2)^2$.

Setzen wir also

34) $X = A + A_2\varrho^2$, $Y = B + B_2\varrho^2$;

so ist

35) $\varrho^2 = \dfrac{X - A}{A_2} = \dfrac{Y - B}{B_2}$,

und nach 33) haben wir also zur Bestimmung von X, Y die beiden folgenden Gleichungen:

36) $\dfrac{X - A}{A_2} = \dfrac{Y - B}{B_2} = \dfrac{X^2 + Y^2}{4C_1^2} = \left(\dfrac{X}{2C_1}\right)^2 + \left(\dfrac{Y}{2C_1}\right)^2$.

Setzen wir jetzt

37) $U = \dfrac{Y}{X}$,

so werden diese Gleichungen

38) $\dfrac{X - A}{A_2} = \dfrac{XU - B}{B_2} = \left(\dfrac{X}{2C_1}\right)^2(1 + U^2)$.

Aus der ersten Gleichung

$$\frac{X - A}{A_2} = \frac{XU - B}{B_2}$$

oder

folgt:

39) $X = \dfrac{AB_2 - BA_2}{B_2 - A_2U}$.

Also ist, wenn man dies in die Gleichung

$$\frac{X - A}{A_2} = \left(\frac{X}{2C_1}\right)^2(1 + U^2)$$

einführt:

$$-(B - AU)(B_2 - A_2U) = \left(\frac{AB_2 - BA_2}{2C_1}\right)^2(1 + U^2)$$

oder

40) $$\left(\frac{AB_2 - BA_2}{2C_1}\right)^2 (1 + U^2) = -BB_2 + (AB_2 - BA_2)\,U - AA_2 U^2.$$

Nun ist aber

$$AB_2 - BA_2 = \{x_1(a-a_2) - x_2(a-a_1)\}\{\mu_1(b-b_2) - \mu_2(b-b_1)\}$$
$$- \{x_1(b-b_2) - x_2(b-b_1)\}\{\mu_1(a-a_2) - \mu_2(a-a_1)\}$$
$$= (x_1\mu_2 - \mu_1 x_2)\{(a-a_1)(b-b_2) - (b-b_1)(a-a_2)\},$$

. i. nach 19):

41) $$AB_2 - BA_2 = \frac{x_1\mu_2 - \mu_1 x_2}{\sin i \cos i_1^2 \cos i_2^2} C_1,$$

ad folglich, weil nach 29)

$$\frac{X-A}{x_1\mu_2 - \mu_1 x_2} = \frac{Y-B}{\mu_1 - \mu_2} = \frac{Z-C}{x_2 - x_1}$$

$$= E_1^2 \cos i_1^4 \cos i_2^2 \sin(i+i_2)\sin(i-i_2)$$
$$- E_2^2 \cos i_1^2 \cos i_2^4 \sin(i+i_1)\sin(i-i_1)$$

t:

42) $$AB_2 - BA_2 = \frac{E_1^2 \cos i_1^2 \sin(i+i_2)\sin(i-i_2) - E_2^2 \cos i_2^2 \sin(i+i_1)\sin(i-i_1)}{\sin i} C_1.$$

Setzen wir also

3) $$D_1 = \frac{E_1^2 \cos i_1^2 \sin(i+i_2)\sin(i-i_2) - E_2^2 \cos i_2^2 \sin(i+i_1)\sin(i-i_1)}{2 \sin i}$$

o ist

44) $$AB_2 - BA_2 = 2C_1 D_1,$$

nd nach 40) haben wir also die Gleichung:

45) $$D_1 D_1 (1+U^2) = -BB_2 + 2C_1 D_1 U - AA_2 U^2,$$

oder

46) $$(AA_2 + D_1 D_1) U^2 - 2C_1 D_1 U + BB_2 + D_1 D_1 = 0,$$

oder

47) $$U^2 - \frac{2C_1 D_1}{AA_2 + D_1 D_1} U = -\frac{BB_2 + D_1 D_1}{AA_2 + D_1 D_1}.$$

Löst man nun diese Gleichung des zweiten Grades auf gewöhnliche Weise auf, so erhält man:

48) $$U = \frac{C_1 D_1 \pm \sqrt{C_1^2 D_1^2 - (AA_2 + D_1 D_1)(BB_2 + D_1 D_1)}}{AA_2 + D_1 D_1}.$$

Hat man U auf diese Weise gefunden, so ergiebt sich X mittelst der Gleichung 39), d. i. nach 44) mittelst der Gleichung:

$$61)\quad \varrho = \begin{cases} \text{tang } \Theta \\ \text{tang } \Theta_1 \end{cases}.$$

Führt man in die Gleichungen 60) für A, A_1, A_2 ihre Werthe aus 15) ein, so erhält man:

$$62)\quad \begin{cases} \cot(\Theta+\Theta_1) = \dfrac{(\varkappa_1-\mu_1)(a-a_2)-(\varkappa_2-\mu_2)(a-a_1)}{2\{\lambda_1(a-a_2)-\lambda_2(a-a_1)\}}, \\ \cos(\Theta-\Theta_1) = -\dfrac{(\varkappa_1+\mu_1)(a-a_2)-(\varkappa_2+\mu_2)(a-a_1)}{2\{\lambda_1(a-a_2)-\lambda_2(a-a_1)\}}\sin(\Theta+\Theta_1). \end{cases}$$

Zur Bestimmung der Winkel φ und ψ hat man nun nach dem Obigen die drei Gleichungen:

$$63)\quad \begin{cases} \cos\varphi^2+\cos\psi^2=\sin i^2, \\ 2\{(a-a_1)\cos\varphi+(b-b_1)\cos\psi\}\varrho=K_1, \\ 2\{(a-a_2)\cos\varphi+(b-b_2)\cos\psi\}\varrho=K_2; \end{cases}$$

und kann φ, ψ sowohl aus der ersten und zweiten, als auch aus der ersten und dritten bestimmen, aber nicht aus der zweiten und dritten, weil

$$(a-a_1)(b-b_2)-(b-b_1)(a-a_2)=0$$

ist. Am besten wird man jedoch jederzeit die gerade Linie, in welcher die Projectionen der drei gegebenen Punkte M, M_1, M_2 auf der Ebene der xy liegen, als Axe der x annehmen. Dann ist $b=b_1=b_2=0$, und wir erhalten zur Bestimmung von φ die beiden einfachen Formeln:

$$64)\quad \cos\varphi=\frac{K_1}{2(a-a_1)\varrho}=\frac{K_2}{2(a-a_2)\varrho};$$

zur Bestimmung von ψ aber die Formel

$$\cos\psi=\pm\sqrt{\sin i^2-\cos\varphi^2},$$

d. i., wie man leicht findet:

$$65)\quad \cos\psi=\pm\sqrt{-\cos(i-\varphi)\cos(i+\varphi)}.$$

Die Grössen ϱ und ϱ_1 ergeben sich mittelst der Formeln:

$$66)\quad \varrho_1=\frac{c-c_1+\varrho\cos i}{\cos i_1},\quad \varrho_2=\frac{c-c_2+\varrho\cos i}{\cos i_2};$$

und die Winkel φ_1, ψ_1; φ_2, ψ_2 mittelst der Formeln

$$67)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1=\dfrac{a-a_1+\varrho\cos\varphi}{\varrho_1},\ \cos\psi_1=\dfrac{\varrho\cos\psi}{\varrho_1}; \\ \cos\varphi_2=\dfrac{a-a_2+\varrho\cos\varphi}{\varrho_2},\ \cos\psi_2=\dfrac{\varrho\cos\psi}{\varrho_2}; \end{cases}$$

ndlich die gesuchten Coordinaten x, y, z des Punktes N mittelst ler Formeln

$$68)\quad \left\{\begin{aligned} x &= a+\varrho\cos\varphi = a_1+\varrho_1\cos\varphi_1 = a_2+\varrho_2\cos\varphi_2,\\ y &= \varrho\cos\psi = \varrho_1\cos\psi_1 = \varrho_2\cos\psi_2,\\ z &= c+\varrho\cos i = c_1+\varrho_1\cos i_1 = c_2+\varrho_2\cos i_2. \end{aligned}\right.$$

Ueber die Unbestimmtheit, welche in allem Vorhergehenden ie doppelten Zeichen oder überhaupt die mehrfachen Wurzeln er Gleichungen lassen, muss aus der Natur jedes einzelnen voregenden Falls besonders entschieden werden, was bei praktichen Anwendungen selten eine Schwierigkeit haben wird.

§. 51.

Wenn in dem im vorhergehenden Paragraphen behandelten alle $c=c_1=c_2=0$ ist, d. h. wenn die drei gegebenen Punkte M, M_1, M_2 in der Ebene der xy in einer geraden Linie liegen, ist $\lambda_1=\lambda_2=0$, und folglich auch $A_1=B_1=0$. Also hat man ach 58) zur Bestimmung von ϱ die beiden Gleichungen:

$$69)\quad A+A_2\varrho^2=0,\quad B+B_2\varrho^2=0;$$

us deren erster sich z. B., weil ϱ seiner Natur nach eine posive Grösse ist,

$$70)\quad \varrho=\sqrt{-\frac{A}{A_2}}$$

rgiebt. Nach 15) ist also

$$71)\quad \varrho=\sqrt{-\frac{\varkappa_1(a-a_2)-\varkappa_2(a-a_1)}{\mu_1(a-a_2)-\mu_2(a-a_1)}},$$

nd folglich nach 14)

$$72)\quad \varrho = \pm \cos i_1 \cos i_2 \sqrt{\frac{(a-a_1)E_2^2-(a-a_2)E_1^2}{(a-a_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2^2-(a-a_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1^2}},$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem das Product $\cos i_1 \cos i_2$ positiv oder negativ ist. (Nehmen wir die gerade Linie, in welcher die drei gegebenen Punkte M, M_1, M_2 liegen, als Axe der x an, so ist $b = b_1 = b_2 = 0$, und folglich nach 8)

$$E_1^2 = (a-a_1)^2, \quad E_2^2 = (a-a_2)^2;$$

also

$$73)\quad \varrho = \pm \cos i_1 \cos i_2 \sqrt{\frac{(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a)}{(a-a_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1^2-(a-a_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2^2}},$$

worin man auch noch $b = 0$ setzen könnte, wodurch aber die Formel eher an Eleganz verlieren als gewinnen würde.

Für K_1 und K_2 hat man im vorliegenden Falle nach 9) Ausdrücke

$$74)\quad \begin{cases} K_1 \cos i_1^2 = -(a-a_1)^2 \cos i_1^2 - \varrho^2 \sin(i+i_1)\sin(i-i_1), \\ K_2 \cos i_2^2 = -(a-a_2)^2 \cos i_2^2 - \varrho^2 \sin(i+i_2)\sin(i-i_2); \end{cases}$$

also nach 73)

75) $$K_1 = -(a-a_1)\frac{(a-a_1)^2\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1^2-(a-a_2)^2\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2^2}{(a-a_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1^2-(a-a_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2^2},$$

$$K_2 = -(a-a_2)\frac{(a-a_1)^2\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1^2-(a-a_2)^2\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2^2}{(a-a_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1^2-(a-a_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2^2}.$$

Den Winkel φ erhält man mittelst der Formeln

76) $$\cos\varphi = \frac{K_1}{2(a-a_1)\varrho} = \frac{K_2}{2(a-a_2)\varrho},$$

nach 74) mittelst der Formeln:

77)
$$\left\{\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{(a-a_1)^2\cos i_1^{\,2}+\varrho^2\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)}{2(a-a_1)\,\varrho\cos i_1^{\,2}},\\ \cos\varphi &= \frac{(a-a_2)^2\cos i_2^{\,2}+\varrho^2\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)}{2(a-a_2)\,\varrho\cos i_2^{\,2}};\end{aligned}\right.$$

oder mittelst der Formeln:

78)
$$\left\{\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{a-a_1}{2\varrho}-\frac{\varrho\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)}{2(a-a_1)^2\cos i_1^{\,2}},\\ \cos\varphi &= \frac{a-a_2}{2\varrho}-\frac{\varrho\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)}{2(a-a_2)^2\cos i_2^{\,2}}.\end{aligned}\right.$$

Auch könnte man mittelst der Formeln 73), 75), 76) leicht einen ganz independenten Ausdruck für $\cos\varphi$ entwickeln, was wir dem Leser überlassen.

Den Winkel ψ erhält man nach 65) wieder mittelst der Formel

79)
$$\cos\psi = \pm\sqrt{-\cos(i-\varphi)\cos(i+\varphi)},$$

und ϱ_1, ϱ_2 mittelst der Formeln:

80)
$$\varrho_1 = \varrho\frac{\cos i}{\cos i_1},\qquad \varrho_2 = \varrho\frac{\cos i}{\cos i_2}.$$

Die Winkel φ_1, ψ_1; φ_2, ψ_2 ergeben sich mittelst der Formeln:

81)
$$\left\{\begin{aligned}\cos\varphi_1 &= \frac{a-a_1+\varrho\cos\varphi}{\varrho_1}, & \cos\psi_1 &= \frac{\varrho\cos\psi}{\varrho_1},\\ \cos\varphi_2 &= \frac{a-a_2+\varrho\cos\varphi}{\varrho_2}, & \cos\psi_2 &= \frac{\varrho\cos\psi}{\varrho_2};\end{aligned}\right.$$

und die Coordinaten x, y, z endlich mittelst der Formeln:

82)
$$\left\{\begin{aligned}x &= a+\varrho\cos\varphi = a_1+\varrho_1\cos\varphi_1 = a_2+\varrho_2\cos\varphi_2,\\ y &= \varrho\cos\psi = \varrho_1\cos\psi_1 = \varrho_2\cos\psi_2,\\ z &= \varrho\cos i = \varrho_1\cos i_1 = \varrho_2\cos i_2.\end{aligned}\right.$$

Durch die Coordinate z wird die mit ihrem gehörigen Zeichen genommene Entfernung des Punktes N von der Ebene der xy bestimmt. Nach 73) und 82) ist

$$83)\quad z = \pm \cos i \cos i_1 \cos i_2 \sqrt{\frac{(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a)}{(a-a_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1^2 - (a-a_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2^2}},$$

in welcher Formel das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem das Product $\cos i_1 \cos i_2$ positiv oder negativ ist.

Bezeichnet man die Entfernungen der Projection des Punktes N auf der Ebene xy von den drei gegebenen Punkten M, M_1, M_2 respective durch r, r_1, r_2, so ist offenbar

$$84)\quad r^2 = \varrho^2 \sin i^2,\quad r_1^2 = \varrho_1^2 \sin i_1^2,\quad r_2^2 = \varrho_2^2 \sin i_2^2;$$

folglich nach 80):

$$85)\quad r = \varrho \sin i,\quad r_1 = \varrho \cos i \operatorname{tang} i_1,\quad r_2 = \varrho \cos i \operatorname{tang} i_2;$$

also nach 73)

$$86)\quad r = \pm \sin i \cos i_1 \cos i_2 \sqrt{\frac{(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a)}{(a-a_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1^2 - (a-a_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2^2}},$$

$$r_1 = \pm \cos i \sin i_1 \cos i_2 \sqrt{\frac{(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a)}{(a-a_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1^2 - (a-a_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2^2}},$$

$$r_2 = \pm \cos i \cos i_1 \sin i_2 \sqrt{\frac{(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a)}{(a-a_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1^2 - (a-a_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2^2}};$$

in welchen Formeln die obern oder untern Zeichen genommen werden müssen, jenachdem das Product $\cos i_1 \cos i_2$ positiv oder negativ ist.

Ich sollte, wie ich auch schon im Eingange angedeutet habe, meinen, dass sich von den in den vorhergehenden Paragraphen aufgelösten Aufgaben in der Praxis zuweilen eine recht vortheilhafte Anwendung machen lassen möchte; der bisher allein behandelte specielle Fall, wenn die drei gegebenen Punkte in einer der

drei angenommenen Coordinatenebenen, etwa in der Ebene der xy, in einer geraden Linie liegen, dürfte dazu aber gerade am wenigsten geeignet sein.

XLIII.

Miscellen.

Anschaulicher Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes.

Von Herrn R. Hoppe, Lehrer der Mathematik zu Keilhau bei Rudolstadt.

Unter den hundert und mehr Beweisen, welche bereits für den pythagoräischen Lehrsatz existiren sollen, möchte ich auf einen aufmerksam machen, der darin besteht, die Flächenräume, deren Gleichheit bewiesen werden soll, in fünf Paar congruente und parallel liegende Stücke zu zerlegen, was er mittelst einer einzigen Hülfslinie bewerkstelligt. Er steht demnach mit dem gewöhnlichen Beweise für die Gleichheit der Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen auf einer Linie, an welchem Anfängern die Anwendung des Beweises zur Sicherstellung der Richtigkeit gewöhnlich zuerst klar wird, weil er von der unmittelbaren Anschauung durch einen einfachen Schluss zu dem nicht unmittelbar angeschauten führt.

Man lege, wenn in Taf. V. Fig. 6. AE das rechtwinklige Dreieck ist, das Quadrat der grossen Kathete $CD'E'$ nach aussen, dagegen die Quadrate der Hypotenuse und der kleinen Kathete $ABCDE$ und AB' nach innen, wie es in der Figur geschehen ist, und fälle von der ausserhalb der Kathetenquadrate liegenden Ecke des Hypotenusenquadrats ein Perpendikel auf die Verlängerung der kleinen Kathete: so fehlt es nicht an Stücken, aus denen sich die Congruenz der mit gleichen Buchstaben bezeichneten Dreiecke folgern lässt. Nun braucht man bloss die Data folgendermassen zusammenzustellen:

$$\begin{aligned} \text{Quadrat der kl. Kathete} &= A + B', \\ \text{Quadrat der gr. Kathete} &= C + D' + E', \\ \text{Quadrat der Hypotenuse} &= A + B + C + D + E, \end{aligned}$$

um die Gleichheit der Summe der ersten beiden mit dem letzten in die Augen fallen zu lassen.

Zur Abhandlung XLVII in Theil VII.

Von dem Herrn Dr. J. Dienger zu Sinsheim bei Heidelberg.

Die dort angeführten Resultate können leicht auf folgende Weise noch verallgemeinert werden.

Die Formel (I) des §. 1. jener Abhandlung giebt nämlich

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^m K}{dx^m} - \frac{d^m K'}{dx^m} &= \sum_0^r [n.(n-1)....(n-m+1) A_n x^{n-m}, \\ \int^m K dx^m - \int^m K' dx^m &= \sum_0^r \left[\frac{A_n x^{n+m}}{(n+1)(n+2)....(n+m)}\right] \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

welche beide Formeln höchst allgemeine Summirungsformeln sind. Soll man also die Summe der Glieder des Ranges $0, 1, \ldots r$ der Reihe finden, deren allgemeines Glied $n.(n-1)\ldots(n-m+1)A_n x^{n-m}$ ist, so suche man die Summe $\sum_0^r A_n x^n$; heisst diese S, die erstere S', so hat man

$$S' = \frac{d^m S}{dx^m} \quad (2)$$

Soll man dagegen die Summe $\sum_0^r \frac{A_n x^{n+m}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)} = S_1$ finden, so ist dieselbe

$$S_1 = \int^m S dx^m \quad (2)$$

wenn S die nämliche Bedeutung, wie in (1) hat. Für $m=1$ folgt, wenn $S = \sum_0 A_n x^n$, $S' = \sum_0 n A_n x^{n-1}$, $S_1 = \sum_0 \frac{A_n x^{n+1}}{n+1}$

$$S' = \frac{dS}{dx}, \quad S_1 = \int S dx \quad (3)$$

Bei den Formeln (2) und der zweiten in (3) haben wir die jedesmals beizufügenden Konstanten mit inbegriffen; dieselben sind übrigens immer leicht zu bestimmen, da für $x=0$ die Werthe von S' und S_1 bekannt sind.

So findet sich

$$\sum_0^r n x^{n-1} \cos nt = \frac{d}{dx}\left(\frac{1 - x\cos t - x^{r+1}\cos(r+1)t + x^{r+2}\cos rt}{1 - 2x\cos t + x^2}\right),$$

$$\sum_0^r \frac{x^{n+1}\cos nt}{n+1} = \int_0^x \left(\frac{1 - x\cos t - x^{r+1}\cos(r+1)t + x^{r+2}\cos rt}{1 - 2x\cos t + x^2}\right) dx,$$

$$\sum_0^r n x^{n-1} \sin nt = \frac{d}{dx}\left(\frac{(\sin t - x^r \sin(r+1)t + x^{r+1}\sin rt)x}{1 - 2x\cos t + x^2}\right)$$

$$\sum_0^r \frac{x^{n+1}\sin nt}{n+1} = \int_0^x \frac{(\sin t - x^r \sin(r+1)t + x^{r+1}\sin rt)x}{1 - 2x\cos t + x^2}\, dx;$$

aus welchen Formeln folgt:

$$\sum_0^r \frac{\cos nt}{n+1} = \int_0^1 \frac{1 - x\cos t - x^{r+1}\cos(r+1)t + x^{r+2}\cos rt}{1 - 2x\cos t + x^2}\, dx,$$

$$\sum_0^r \frac{\sin nt}{n+1} = \int_0^1 \frac{(\sin t - x^r \sin(r+1)t + x^{r+1}\sin rt)x}{1 - 2x\cos t + x^2}\, dx;$$

und hieraus wieder

$$\sum_0^r \frac{1}{n+1} = \int_0^1 \frac{1 - x^{r+1} + x^{r+1} - x^{r+2}}{1 - 2x + x^2}\, dx = \int_0^1 \frac{1 - x^{r+1}}{1 - x}\, dx;$$

Nun ist $\int \frac{dx}{1-x} = -l(1-x)$,

$$\int \frac{x^{r+1}}{1-x} dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + \frac{x^r}{r} + \frac{x^{r-1}}{r-1} + \ldots - l(1-x);$$

also $$\sum_0^r \frac{1}{n+1} = \frac{1}{r+1} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r-1} + \ldots + 1,$$

was identisch das Gleiche ist, so dass auf diese Art der Werth von $\sum_0^r \frac{1}{n+1}$ nicht gefunden wird. Dagegen aber hat man hierdurch ein Mittel, den Werth des bestimmten Integrals $\int_0^1 \frac{1-x^{r+1}}{1-x}\,dx$ zu finden, der übrigens ganz eben so auf anderm Wege zu finden ist. Die Beispiele lassen sich leicht vermehren.

Berichtigungen.

In meinem Einiges von den Kegelschnitten überschriebenen Aufsatze Nr. XLII. im ersten Theile des Archivs sind auf S. 322. einige Zeichen verschrieben worden. Man muss nämlich auf dieser Seite für $1-\cos(\Theta-\omega)$, $1-\cos(\Theta_1-\omega)$, $1-\cos(\Theta_2-\omega)$ überall $1+\cos(\Theta-\omega)$, $1+\cos(\Theta_1-\omega)$, $1+\cos(\Theta_2-\omega)$, ferner in der 5ten und 7ten Zeile von unten für $r-r_1$ und $r-r_2$ beziehungsweise $-(r-r_1)$ und $-(r-r_2)$ schreiben, endlich dem Bruche, durch welchen in der 2ten Zeile von unten $\sin\omega$ ausgedrückt wird, das Zeichen — vorschreiben, das Zeichen — vor dem Bruche in der ersten Zeile von unten, durch welchen $\cos\omega$ dargestellt wird, aber streichen. Ich bitte diese leicht vorzunehmenden Abänderungen gefälligst nicht unberücksichtigt zu lassen. Ferner muss es auch auf S. 324. oben

statt $|1-\cos(\Theta-\Theta_1)^2|$, $|1-\cos(\Theta_1-\Theta_2)^2|$, $|1-\cos(\Theta_2-\Theta)^2|$
heissen: $|1-\cos(\Theta-\Theta_1)|^2$, $|1-\cos(\Theta_1-\Theta_2)|^2$, $|1-\cos(\Theta_2-\Theta)|^2$.

Thl. VII. S. 69. In dem gesperrt gedruckten Ausdrucke der aufzulösenden Aufgabe schalte man Z. 3. v. u. hinter dem Gedankenstriche die folgenden Worte ein: „und die Neigungswinkel der von dem ersten und zweiten gegebenen Punkte nach dem dritten Punkte gezogenen Linien gegen die durch die beiden gegebenen Punkte gelegten Horizontalebenen.“

Zugleich bitte ich in dem Ueber eine astronomische Aufgabe überschriebenen Aufsatze Thl. VIII. Nr. VIII. S. 101. oben Z. 4—6 statt der Worte: „nur eine Drehung des Fernrohrs um den unverrückt stehen gebliebenen Höhenkreis erfordert“ das Folgende zu setzen: „nur eine leicht zu bewirkende Drehung des Höhenkreises um 180° erfordert.“ Der Fehler hatte sich bei der Redaction des Aufsatzes durch eine vorgefallne Verwechselung mit etwas Anderem eingeschlichen und wurde erst später bemerkt. G.

In Thl. VIII. Heft 2. S. 147. Z. 5. ist $B_n < \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}} B_1$ statt $B_n < \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} B_1$ zu setzen.

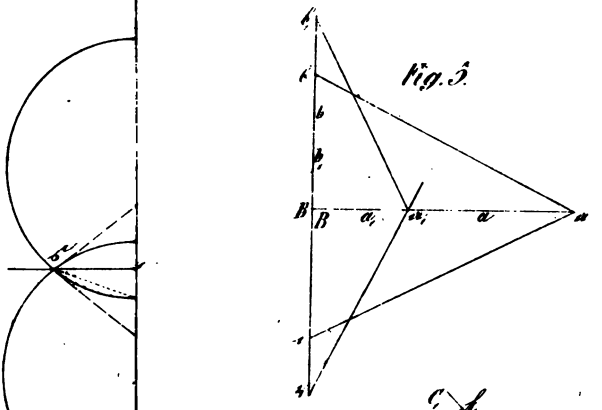


Fig. 3.

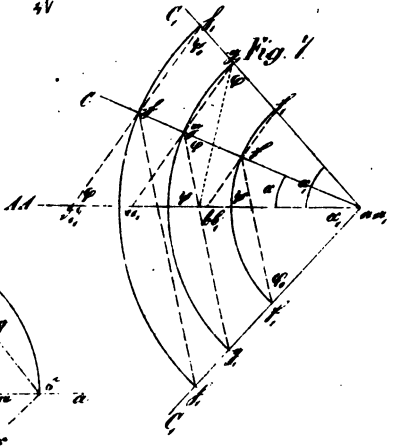


Fig. 4.

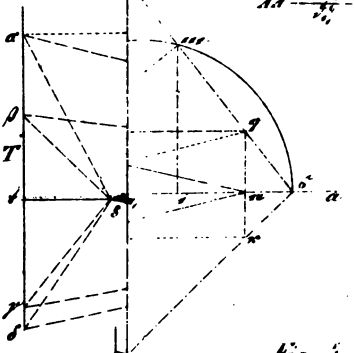
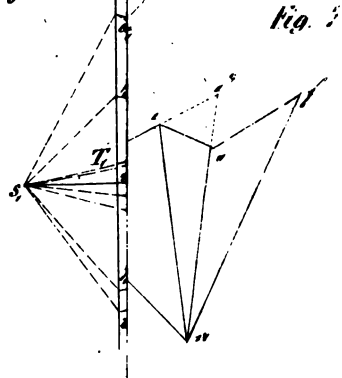
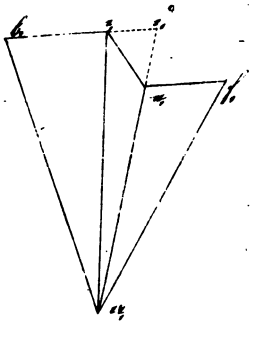


Fig. 5.





Grunert Arch.

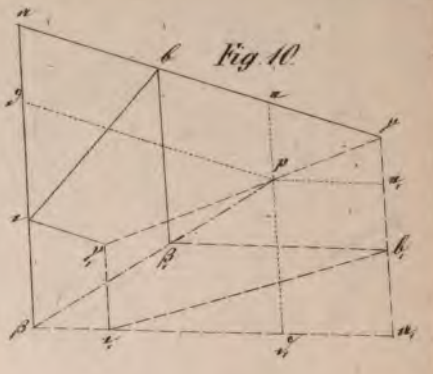


Fig. 10

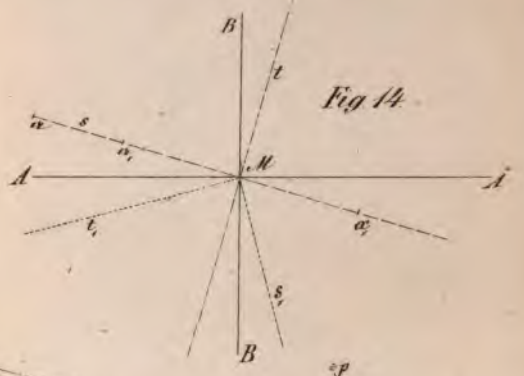


Fig. 14

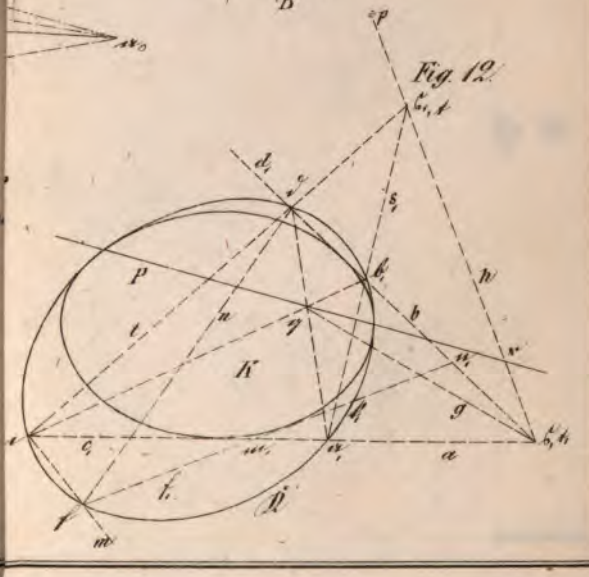


Fig. 12

Fig. 4.

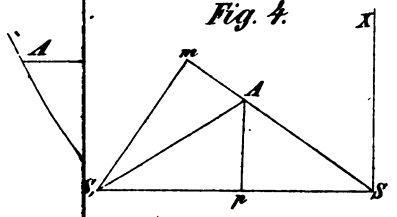
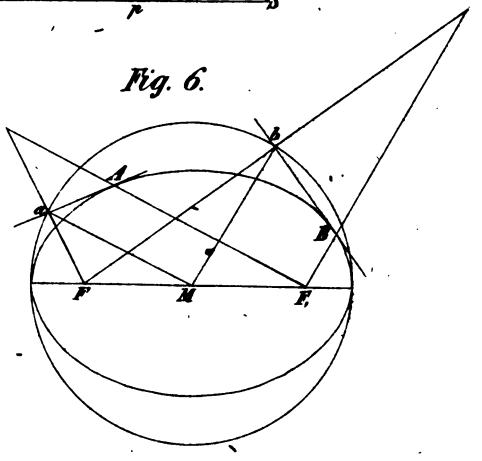


Fig. 6.



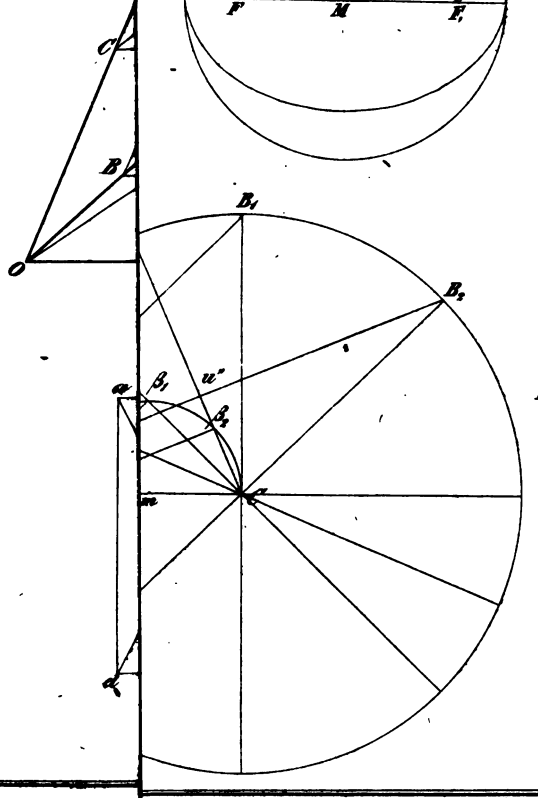
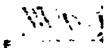
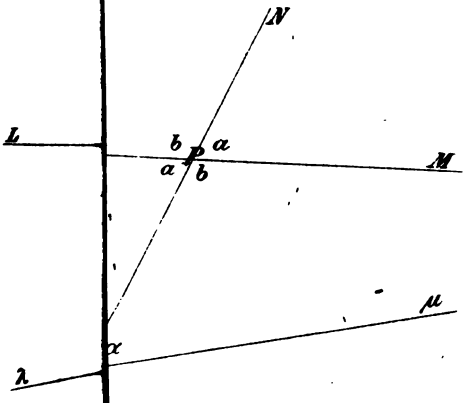


Fig. 10.





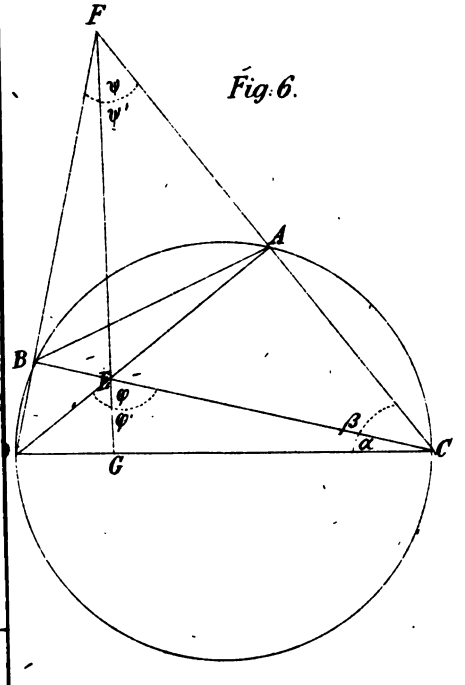


Fig. 6.

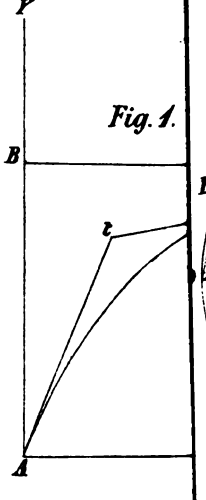


Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

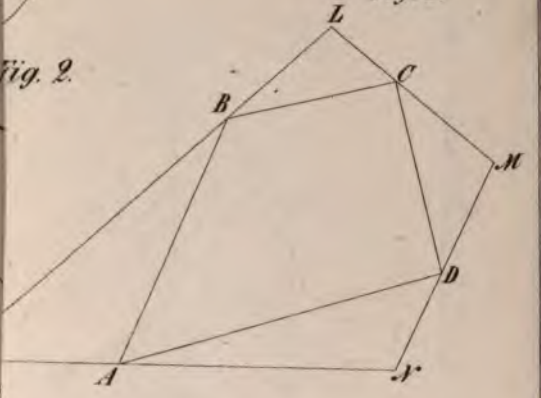


Fig. 6.

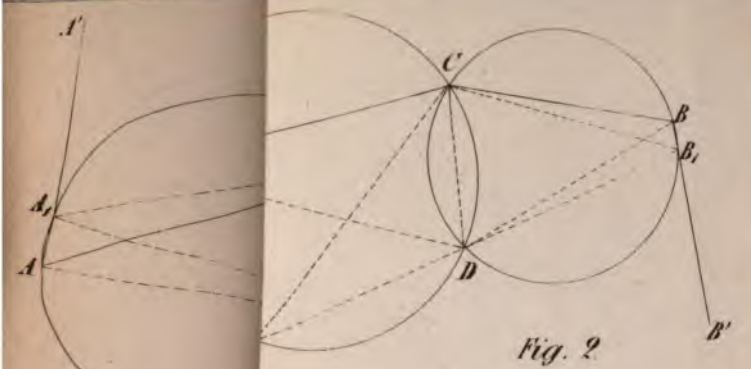


Fig. 2

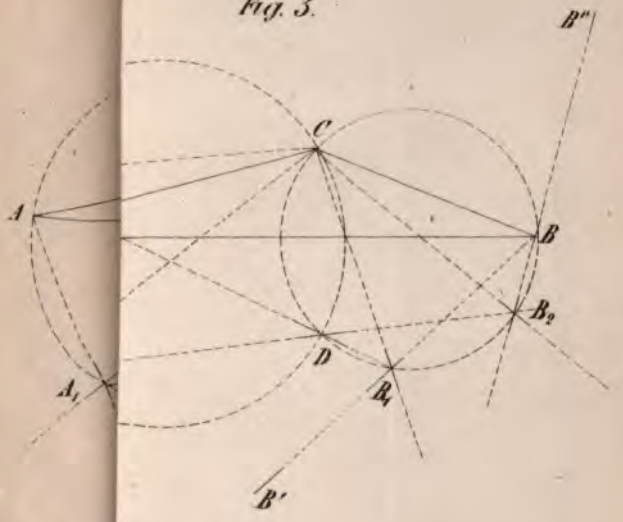



Fig. 3.